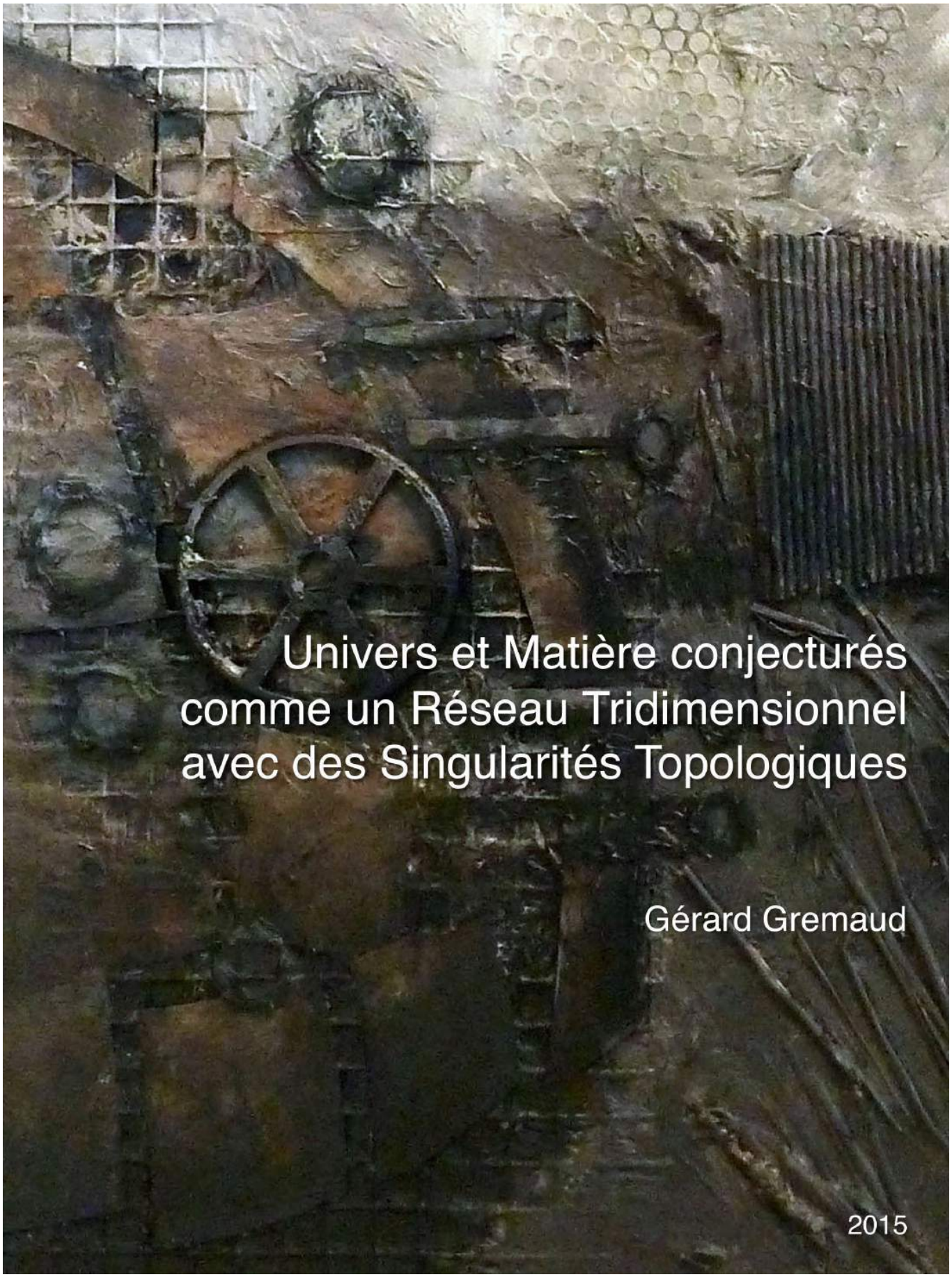


Univers et Matière conjecturés comme un Réseau Tridimensionnel avec des Singularités Topologiques

Gérard Gremaud

2015

“Univers et Matière conjecturés
comme un Réseau Tridimensionnel
avec des Singularités Topologiques”

English translation by Marc Fleury
of the original french book:

“Universe and Matter conjectured
as a 3-dimensional Lattice
with Topological Singularities”

Original version V1 (in french), July 2, 2014, DOI: 10.13140/2.1.3557.9521
Second version V2 (in french), December 2014, DOI: 10.13140/2.1.1033.6329
Third version V3 (in french), November 2015, DOI: 10.13140/RG.2.1.2266.5682
Third version V3 (in english), November 2015, DOI: 10.13140/RG.2.1.3839.4325

The three books are freely available online at:
http://gerardgremaud.ch/
http://www.researchgate.net/profile/G_Gremaud

Illustration of book cover: Jenny Gremaud (illustrator)
http://wuika-jennyburgy.blogspot.ch/?view=classic
burgy.jenny@gmail.com

On n'a peut-être pas encore prêté assez d'attention [à] l'utilité dont cette étude [de la Géométrie] peut être pour préparer comme insensiblement les voies à l'esprit philosophique, et pour disposer toute une nation à recevoir la lumière que cet esprit peut y répandre [...]. Bientôt l'étude de la Géométrie conduira [...] à la vraie Philosophie qui par la lumière générale et prompte qu'elle répandra, sera bientôt plus puissante que tous les efforts de la superstition.

Jean le Rond D'Alembert *("article "Géométrie" de l'Encyclopédie, 1772)*

The more the universe seems comprehensible, the more it also seems pointless. But if there is no solace in the fruits of our research, there is at least some consolation in the research itself [...] The effort to understand the universe is one of the very few things that lifts human life a little above the level of farce, and gives it some of the grace of tragedy.

Steven Weinberg *(from The First Three Minutes)*

Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand."

Albert Einstein

Pensons, il en restera toujours quelque chose!
(Think, there will always be something left!)

Snoopy

Remerciements

J'aimerais remecier ici Gianfranco D'Anna, Willy Benoit, Marc Fleury et Daniele Mari pour leurs précieux commentaires, et remercier chaleureusement Marc Fleury pour sa traduction anglaise du livre.

Gérard Gremaud

Table des matières

INTRODUCTION

PARTIE I A - Théorie eulérienne des réseaux déformables newtoniens

Chapitre 1 - Distorsions d'un réseau

1.1 - Evolution spatio-temporelle d'un milieu solide déformable 3
1.2 - Définition de grandeurs locales en coordonnées d'Euler 9
1.3 - Equations géométrocinétiques eulériennes 12
1.4 - Tenseurs eulériens de distorsion 14
1.5 - Exemples de champs de vitesse et de distorsion 18

Chapitre 2 - Repères locaux et géométrocompatibilité d'un réseau

2.1 - Définition de repères locaux dans les réseaux solides 29
2.2 - Projection des équations géométrocinétiques dans le référentiel local 37
2.3 - Géométrocompatibilité en coordonnées d'Euler 41

Chapitre 3 - Contorsions d'un réseau

3.1 - Rotationnel et divergence d'un tenseur 49
3.2 - Liens entre dérivés spatiales en cas de géométrocompatibilité 51
3.3 - Tenseurs de contorsion d'un solide 52
3.4 - Interprétation physique des équations de compatibilité 58
3.5 - Conditions de passage à travers une interface compatible 61
3.6 - Exemples de champs de flexion et de torsion 63

Chapitre 4 - Dynamique newtonienne et thermocinétique eulérienne

4.1 - Principe de la dynamique newtonienne 67
4.2 - Principe de continuité de l'énergie 70
4.3 - Principe de continuité de l'entropie 71

Chapitre 5 - Propriétés physiques d'un réseau newtonien

5.1 - Elasticité d'un réseau 75
5.2 - Anélasticité et plasticité d'un réseau 82
5.3 - Auto-diffusion dans un réseau 85
5.4 - Dynamique newtonienne d'un réseau 91

Chapitre 6 - Equations d'évolution d'un réseau newtonien

6.1 - Equations d'évolution d'un réseau 95
6.2 - Relations phénoménologiques d'un réseau 101
6.3 - Bilan énergétique 107
6.4 - Equations d'évolution spatio-temporelle 107

PARTIE I B - Application: exemples de phénoménologies des solides usuels

Chapitre 7 - Exemples de phénoménologies des solides usuels
7.1 - Fonctions et équations d'état des solides isotropes 115
7.2 - Modules élastiques des solides isotropes 118
7.3 - Comportements thermiques des solides isotropes 120
7.4 - Phénomènes de transport dans les solides isotropes 121
7.5 - Propagation d'ondes et relaxation thermoélastique 122
7.6 - Equations de transport et relaxations inertielles 126
7.7 - Création-annihilation de paires lacune-interstitiel 128
7.8 - Phénoménologie de l'anélasticité 131
7.9 - Transitions structurales displacives de 2ème et de 1ère espèce 136
7.10 - Phénoménologie de la plasticité 148

PARTIE I C - Charges de dislocation et charges de désinclinaison

Chapitre 8 - Densité et flux de charges de dislocation et de désinclinaison
8.1 - Concept macroscopique de charges de distorsion plastique 153
8.2 - Concept macroscopique de charges de contorsion plastique 163
8.3 - Description topologique complète des solides chargés 168

Chapitre 9 - Singularités topologiques associées aux charges
9.1 - Cordes et lignes de dislocation 173
9.2 - Membranes de dislocation et joints de torsion, de flexion et d'accommodation 186
9.3 - Cordes et lignes de désinclinaison aux frontières de membranes de dislocation 190
9.4 - Cordes et lignes de dispiration et réseaux solides à symétrie axiale 206
9.5 - Boucles de dislocation et de désinclinaison 212
9.6 - Amas de dislocations, de désinclinaisons et de dispirations 222

Chapitre 10 - Flux de charges de dislocation et relations d'Orowan
10.1 - Interprétation des flux de charges 227
10.2 - Charges et flux linéiques pour des lignes de dislocation 232
10.3 - Relations d'Orowan 235

Chapitre 11 - Equations d'évolution d'un réseau chargé et force de Peach et Koehler
11.1 - Remplacement du tenseur des distorsions plastiques 237
11.2 - Force de Peach et Koehler agissant sur les charges de dislocation 239
11.3 - Equations d'évolution spatio-temporelle des solides chargés 241

PARTIE I D - Application: éléments de théorie des dislocations dans les solides usuels

Chapitre 12 - Eléments de théorie des dislocations dans les solides usuels
12.1 - Le solide parfait et son équation de Newton 249
12.2 - Analogie avec les équations de Maxwell à expansion homogène 251
12.3 - Champs et énergies d'une dislocation vis 254
12.4 - Champs et énergies d'une dislocation coin 258
12.5 - Effets des conditions aux limites et de la nature du réseau 264

12.6 - Interactions entre dislocations 267
12.7 - Modèle de la corde 271
12.8 - Applications du modèle de la corde 275-284

PARTIE II A - Le «réseau cosmologique»

Chapitre 13 - Réseaux parfaits et équations de Newton
13.1 – Le «solide parfait» et son équation de Newton 287
13.2 – Le «réseau cosmologique» et son équation de Newton 288
13.3 – La «face cachée» du réseau cosmologique 292

Chapitre 14 - Modes de propagation d'ondes et de vibrations localisées dans le réseau cosmologique
14.1 – Propagation d'ondes transversales 294
14.2 – Propagation d'ondes longitudinales 296
14.3 – Mode de vibrations longitudinales localisées 297
14.4 – Analogies avec la gravitation d'Einstein et la physique quantique 298

Chapitre 15 - Courbure des rayons d'ondes par une singularité de l'expansion et trous noirs
15.1 – Courbure non-dispersive des rayons d'onde 303
15.2 – Sphère de perturbations et «trous noirs» 304
15.3 – Analogies avec la gravitation d'Einstein 306

Chapitre 16 - Evolutions «cosmologiques» d'une sphère finie de réseau parfait
16.1 – Comportement «cosmologique» d'un solide fini 307
16.2 – Evolutions cosmologiques d'un solide parfait 308
16.3 – Evolutions cosmologiques d'un réseau cosmologique 311
16.4 – Analogie avec l'évolution cosmologique de notre Univers et origine de l'«énergie noire» 318

PARTIE II B - Equations de Maxwell et Relativité Restreinte

Chapitre 17 - Equations de Maxwell d'évolution du champ de rotation d'un réseau cosmologique
17.1 – Séparabilité de l'équation de Newton d'un réseau cosmologique en une partie «rotationnelle» et une partie «divergente» 325
17.2 – Comportement "maxwellien" de la partie rotationnelle: équations de Maxwell du champ de rotation 327
17.3 – Analogies avec les équations de Maxwell de l'électro-magnétisme 328

Chapitre 18 - Résolution de l'équation de Newton en présence de singularités topologiques
18.1 – Séparabilité de l'équation de Newton en deux équations gérant les «distorsions élastiques» et les «perturbations d'expansion» associées à une singularité topologique du réseau 335
18.2 – Des conséquences de la séparabilité de l'équation de Newton en présence d'une singularité topologique du réseau 338

Chapitre 19 - Singularités topologiques au sein d'un réseau cosmologique
19.1 – Champs, énergies et masse d'inertie d'une dislocation vis 341
19.2 – Champs, énergies et masse d'inertie d'une dislocation coin 343
19.3 – Conditions pour qu'une coin satisfasse la relation d'Einstein 349
19.4 – Le «réseau cosmologique parfait» 350
19.5 – Singularité sphérique de charge de rotation donnée 351
19.6 – Singularité sphérique de charge de courbure donnée 353
19.7 – Charge «électrique» de rotation, énergies et masse d'inertie d'une boucle de désinclinaison vis (BV) 354
19.8 – Interaction «électrique» entre singularités topologiques localisées 358
19.9 – Charge «gravitationnelle» de courbure, énergies et masse d'une boucle de dislocation coin prismatique (BC) 358
19.10 – Champ dipolaire «électrique» de rotation, énergies et masse d'une boucle de dislocation mixte de glissement (BM) 360
19.11 – Briques topologiques élémentaires pour construire le monde des particules 363

Chapitre 20 - Dynamique relativiste des singularités topologiques dans le réseau cosmologique parfait
20.1 – Charges mobiles et transformations de Lorentz 367
20.2 – Les deux transformations de Lorentz dans le cas du réseau cosmologique avec une expansion de fond $\tau_0 > \tau_{0cr}$ 374
20.3 – L'unique transformation de Lorentz dans le cas du réseau cosmologique avec une expansion de fond $\tau_0 < \tau_{0cr}$ 377
20.4 – Dynamique relativiste d'une dislocation vis ou coin rectiligne 379
20.5 – Dynamique relativiste des singularités en boucles 384
20.6 – Dynamique relativiste d'une charge sphérique de rotation 385
20.5 – De l'explication du paradoxe de l'énergie des électrons 387
20.6 – Force de Peach & Koehler et force relativiste de Lorentz 387

Chapitre 21 - Rôle d'«éther» du réseau cosmologique parfait pour un amas mobile de singularités
21.1 – Transformation de Lorentz appliquée à un amas de singularités topologiques mobiles interagissant via leurs champs de rotation 391
21.2 – Contraction des règles, dilatation du temps et existence de l'«éther» 393
21.3 – L'expérience de Michelson-Morley et l'effet Doppler-Fizeau dans le réseau cosmologique 395
21.4 – De l'explication du fameux paradoxe des jumeaux de la Relativité Restreinte 402

PARTIE II C - Gravitation et Cosmologie

Chapitre 22 - Perturbations «gravitationnelles» de l'expansion par des singularités topologiques localisées
22.1 – Singularité localisée d'énergie de distorsion donnée 407
22.2 – Singularité localisée de charge de courbure donnée 414
22.3 – Singularité localisée de charge de rotation donnée 419
22.4 – Lacunes macroscopiques localisées au sein du réseau 427
22.5 – Interstitiels macroscopiques localisés au sein du réseau 431
22.6 – Analogies avec les champs «électriques» et «gravitationnels» 433

Chapitre 23 - Propriétés «gravitationnelles» des boucles topologiques dans le réseau cosmologique
23.1 – La boucle de désinclinaison vis (BV) 439
23.2 – La boucle de dislocation coin prismatique (BC) 441
23.3 – La boucle de dislocation mixte de glissement (BM) 445
23.4 – Les diverses propriétés des boucles topologiques élémentaires 446

Chapitre 24 - Interaction «gravitationnelle» des singularités formées de boucles de désinclinaison vis
24.1 – Interactions «gravitationnelles» à longue portée d'amas de boucles de désinclinaison vis 449
24.2 – Analogies et différences d'avec la Gravitation de Newton 451
24.3 – Les règles et l'horloge locale d'un observateur HS 453
24.4 – Observateur HS plongé dans le champ gravitationnel d'un amas 458
24.5 – Analogies et différences d'avec la Relativité Générale d'Einstein 464

Chapitre 25 - Interactions «gravitationnelles» à longue portée entre singularités topologiques du réseau
25.1 – Discussion de la dépendance des singularités topologiques du réseau cosmologique en l'expansion du réseau 469
25.2 – Interactions gravitationnelles entre les diverses singularités topologiques du réseau cosmologique 473

Chapitre 26 - Interaction «gravitationnelle» à courte portée et force faible de cohésion d'une dispiration
26.1 – Interactions à longue et courte portée entre une boucle de désinclinaison vis (BV) et une boucle de dislocation coin (BC) 489
26.2 – L'énergie de couplage d'une Boucle de dispiration Vis-Coin (BVC) formée d'une boucle vis (BV) et d'une boucle coin (BC) 490
26.3 – De l'analogie avec l'interaction faible du Modèle Standard des particules élémentaires 493

Chapitre 27 - Un scénario plausible d'évolution cosmologique vers notre Univers actuel
27.1 – Constitution de la matière et de l'anti-matière et comportements de leurs interactions gravitationnelles 497
27.2 – Un scénario plausible d'évolution cosmologique des singularités topologiques dans un réseau cosmologique parfait 501
27.3 – Constante de Hubble, «redshift» des galaxies et «refroidissement» du fond diffus cosmologique de rayonnement 509

PARTIE II D - Physique quantique et Modèle Standard des particules

Chapitre 28 - Fluctuations gravitationnelles associées aux singularités mobiles: l'équation de Schrödinger
28.1 – Fluctuations gravitationnelles dynamiques du champ d'expansion au sein du réseau 517
28.2 – Equation d'onde de Schrödinger des fluctuations gravitationnelles d'expansion

d'une singularité non-relativiste 524
28.3 – Conséquences de l'équation d'onde de Schrödinger des fluctuations gravitationnelles d'une singularité non-relativiste 527
28.4 – Superposition de singularités topologiques, bosons, fermions et principe d'exclusion 529
28.5 – De l'analogie avec la physique quantique 531

Chapitre 29 - Fluctuations gravitationnelles au coeur des singularités topologiques: spin et moment magnétique
29.1 – Champ interne de perturbations «gravitationnelles» d'expansion d'une boucle de désinclinaison vis (BV) 535
29.2 – Moment cinétique, spin et moment magnétique d'une boucle de désinclinaison vis (BV) 537
29.3 – Du problème de la valeur du spin d'une boucle topologique 540

Chapitre 30 - Fluctuations transversales quantifiées: les photons
30.1 – Fluctuations «électromagnétiques» transversales localisées 543
30.2 – Quantification de l'énergie des fluctuations «électromagnétiques» et analogie avec les quasi-particules «photons» 546

Chapitre 31 - Ingrédients d'une analogie avec le modèle standard des particules élémentaires
31.1 – Les problèmes du modèle standard des particules élémentaires 552
31.2 – Un réseau cubique «coloré» pour expliquer la première famille de quarks et de leptons du modèle standard 554
31.3 – Essai d'explication des trois familles de quarks et de leptons du modèle standard des particules élémentaires 567
31.4 – De l'intérêt de l'analogie entre le réseau cosmologique «coloré» et le modèle standard des particules élémentaires 571
31.5 – Des questions encore en suspens concernant le modèle du réseau cosmologique «coloré» et son analogie avec le modèle standard 574

PARTIE II E - Quelques conséquences hypothétiques du réseau cosmologique parfait

Chapitre 32 - Fluctuations «gravitationnelles»: fluctuations quantiques du vide, multi-univers et gravitons
32.1 – Fluctuations «gravitationnelles» longitudinales localisées 579
32.2 – Fluctuations «gravitationnelles» microscopiques aléatoires et fluctuations quantiques du vide 582
32.3 – Oscillations «gravitationnelles» stables 584
32.4 – Oscillations «gravitationnelles» macroscopiques stables dans un réseau cosmologique infini et multi-Univers 587
32.5 – Oscillations «gravitationnelles» microscopiques quantifiées: d'hypothétiques quasi-particules «gravitons» 589

CONCLUSION

ANNEXES

Annexe A - Eléments de mécanique analytique
A.1 - Les bases de la mécanique analytique 599
A.2 - Le formalisme du lagrangien 600
A.3 - Le formalisme de l'hamiltonien 601

Annexe B - Eléments de physique quantique
B.1 - La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger 603
B.2 - Le états propres stationnaires d'une particule 604
B.3 - Les bosons et les fermions 607
B.4 - Le spin des particules 609
B.5 - L'équation de Dirac 609

Annexe C - Modèle Standard des particules élémentaires
C.1 – Les leptons et les quarks 613
C.2 - Les interactions fondamentales et les bosons de jauge 614
C.3 - L'interaction électromagnétique et l'électrodynamique quantique 615
C.4 - L'interaction faible et la théorie électrofaible 615
C.5 - L'interaction forte et la théorie de chromodynamique quantique 617
C.6 - La masse des particules et le boson de Higgs 617
C.7 - Les problèmes et les questions du Modèle Standard 618

Annexe D - Les conjectures du réseau cosmologique 621

Annexe E - Formulaire mathématique
E.1 - Calcul vectoriel 623
E.2 - Analyse vectorielle 624
E.3 - Dérivés d'intégrales sur volumes, surfaces et contours mobiles 629

Introduction

Ce livre est un *essai* dont la finalité est de montrer qu'une théorie eulérienne de la déformation d'un réseau newtonien dans un espace absolu, moyennant un choix judicieux des propriétés élastiques et structurales de ce réseau, peut fournir *un cadre d'investigation* extrêmement riche et intéressant pour la physique parce qu'elle fait apparaître *des analogies très fortes et souvent parfaites avec toutes les grandes théories physiques actuelles* du Macrocosme et du Microcosme, comme les Equations de Maxwell, la Relativité Restreinte, la Gravitation Newtonienne, la Relativité Générale, la Cosmologie Moderne, la Physique Quantique et le Modèle Standard des particules élémentaires.

Cet essai n'a pas la prétention de présenter une *Théorie du Tout* qui serait déjà complètement élaborée et utilisable, mais il devrait et pourrait par contre s'avérer extrêmement fructueux pour donner des *explications simples* aux théories physiques modernes dont il est difficile, si ce n'est impossible, de comprendre le sens profond, mais aussi et surtout pour définir *des liens étroits et des ponts unificateurs* entre les diverses grandes théories de la physique moderne.

Dans la première partie de cet essai, on résume de manière autonome un premier livre[1] publié en 2013, qui jetait méthodiquement les bases d'une *approche originale des réseaux solides par les coordonnées d'Euler*, et qui introduisait aussi de manière détaillée la notion de *charges tensorielles de dislocation et de désinclinaison au sein d'un réseau,* concept qui permet de quantifier les singularités topologiques pouvant apparaître à l'échelle microscopique d'un réseau solide. Sur la base de cette approche originale des réseaux solides et de leurs singularités topologiques, on déduit un ensemble d'équations fondamentales et phénoménologiques qui permettent de traiter de manière très rigoureuse l'évolution spatio-temporelle macroscopique d'un réseau solide newtonien se déformant dans l'espace absolu du laboratoire d'un observateur extérieur au réseau.

Dans la deuxième partie de cet essai, on introduit un *réseau imaginaire*, avec des propriétés élastiques et structurales assez spéciales, et qu'on appelle *«réseau cosmologique»*. L'équation de Newton de ce réseau et les singularités topologiques qu'il peut contenir présentent alors un ensemble de propriétés très étonnantes, qui sont progressivement développées au cours des chapitres, et qui font apparaître des analogies fortes et surprenantes avec toutes les grandes théories physiques actuelles: les équations de Maxwell, la relativité restreinte, la gravitation newtonienne, la relativité générale, la cosmologie moderne, la physique quantique et le modèle standard des particules élémentaires.

---

[1] *Théorie eulérienne des milieux déformables, charges de dislocation et de désinclinaison dans les solides, G. Gremaud, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, Suisse, 2013, 750 pages (ISBN 978-2-88074-964-4)*

Le problème des théories de champs unifiés

Un des problèmes fondamentaux de la physique moderne est la recherche de la *Théorie du Tout* capable d'expliquer la nature de l'espace-temps, ce qu'est la matière et comment la matière interagit. Depuis le 19ème siècle, les physiciens ont cherché à développer des théories de champs unifiées, qui devraient consister en un cadre théorique cohérent capable de prendre en compte les diverses forces fondamentales de la nature. Parmi les tentatives de recherche d'une théorie unifiée, citons:

- la "*Grande Unification"* qui rassemble les forces d'interaction électromagnétiques, les forces faibles et les forces fortes,
- la *Gravité Quantique*, la *Gravitation Quantique à Boucles,* et les *Théories de Cordes,* qui cherchent à décrire les propriétés quantiques de la gravité,
- la *Supersymétrie* propose une extension de la symétrie d'espace-temps reliant les deux classes de particules élémentaires, les bosons et les fermions,
- les *Théorie de Cordes et de Supercordes,* sont des structures théoriques intégrant la gravité, dans lesquelles les particules ponctuelles sont remplacées par des cordes unidimensionnelles dont les états quantiques décrivent tous les types de particules élémentaires observées,,
- la *Théorie M*, qui unifie cinq versions différentes de théories de cordes, avec la propriété surprenante que des extra-dimensions sont requises pour assurer sa cohérence.

Cependant, aucune de ces approches n'est capable pour l'instant d'expliquer de manière consistante et en même temps, l'électromagnétisme, la relativité, la gravitation, la physique quantique et les particules élémentaires observées. De nombreux physiciens pensent que la Théorie M à 11 dimensions est la Théorie du Tout. Cependant, il n'existe pas un large consensus à ce propos et il n'y a pas à l'heure actuelle de théorie candidate apte à calculer la constante de structure fine ou la masse de l'électron. Les physiciens des particules espère que les résultats à venir des expériences en cours - la recherche de particules nouvelles dans les grands accélérateurs et le recherche de la matière noire - seront encore nécessaires pour définir une Théorie du Tout..

Dans ce livre, il est suggéré que l'Univers pourrait être un réseau tridimensionnel élastique et massif, et que les éléments constituants de la Matière Ordinaire pourraient être des singularités topologiques de ce réseau, à savoir diverses boucles de dislocation et de désinclinaison. On trouve, pour un réseau isotrope élastique satisfaisant la loi de Newton, avec des hypothèses spécifiques sur ses propriétés élastiques, que les comportements de ce réseau et de ces singularités topologiques regroupent "toute" la physique connue actuellement, unifiant à la fois l'électromagnétisme, la relativité, la gravitation et la physique quantique, et résolvant quelques questions de longue date à propos de la cosmologie moderne. De plus, en étudiant des réseaux avec des symétries axiales, représentées par *des réseaux cubiques 3D "colorés",* on peut identifier une structure de réseau dont les singularités topologiques en boucles coïncident avec la zoologie complexe des particules élémentaires, ce qui pourrait ouvrir un champ d'investigation très prometteur pour la physique des particules.

Les motivations et la genèse de la première partie

Lorsqu'on veut étudier la déformation des solides, il est d'usage courant de décrire l'évolution

de leur déformation à l'aide d'un système de coordonnées de Lagrange et d'utiliser diverses géométries différentielles pour décrire les défauts topologiques qu'ils contiennent.

L'utilisation des coordonnées de Lagrange pour décrire les solides déformables présente un certain nombre de difficultés qui leur sont inhérentes. D'un point de vue mathématique, les tenseurs décrivant les déformations d'un solide continu en coordonnées de Lagrange sont toujours d'ordre supérieur à un en les dérivées spatiales des composantes du champ de déplacement, ce qui conduit à un formalisme mathématique très compliqué lorsqu'un solide présente de fortes distorsions (déformations et rotations). A ces difficultés d'ordre mathématique s'ajoutent encore des difficultés d'ordre physique lorsqu'il s'agit d'introduire certaines propriétés connues des solides. En effet, le système des coordonnées de Lagrange devient pratiquement inutilisable, par exemple lorsqu'il faut décrire l'évolution temporelle de la structure microscopique d'un réseau solide (transitions de phase) et de ses défauts de structure (défauts ponctuels, dislocations, désinclinaisons, joints, etc.), ou s'il est nécessaire d'introduire certaines propriétés physiques du milieu (thermiques, électriques, magnétiques, chimiques, etc.) se traduisant par l'existence dans l'espace réel de champs scalaires, vectoriels ou tensoriels.

L'utilisation de géométries différentielles pour introduire des défauts topologiques comme les dislocations dans les milieux continus déformables a été initiée par le travail de Nye[2] (1953), qui a pour la première fois fait le rapport entre le tenseur de densité de dislocations et la courbure du réseau. D'autre part, Kondo[3] (1952) et Bilby[4] (1954) ont indépendamment montré que les dislocations peuvent s'identifier à une version cristalline du concept de Cartan[5] (1922) de torsion d'un continuum. Cette approche a été formalisée de manière très détaillée par Kröner[6] (1960). Cependant, l'utilisation de géométries différentielles pour décrire les milieux déformables se heurte très vite à des difficultés assez semblables à celles du système des coordonnées de Lagrange. Une première difficulté est liée au fait que le formalisme mathématique y est d'une très grande complexité, puisque similaire au formalisme de la relativité générale, ce qui rend par conséquent très difficiles la manipulation et l'interprétation des équations générales de champs ainsi obtenues. Une seconde difficulté apparaît avec les géométries différentielles lorsqu'il s'agit d'introduire dans le milieu des défauts topologiques d'autres types que des dislocations. Par exemple, Kröner[7] (1980) a proposé que l'existence de défauts ponctuels extrinsèques, qui peuvent être considérés comme de l'extra-matière, pourrait s'identifier à la présence de matière dans l'univers et être introduite par conséquent sous la forme d'équations d'Einstein, ce qui conduirait à une géométrie différentielle purement riemannienne en l'absence de dislocations. Il a aussi proposé que les défauts ponctuels intrinsèques (lacunes, interstitiels) pourraient être approchés par une partie non-métrique d'une connexion affine. Finalement, il a

---

[2] *J.F. Nye, Acta Metall.,vol. 1, p.153, 1953*

[3] *K. Kondo, RAAG Memoirs of the unifying study of the basic problems in physics and engeneering science by means of geometry, volume 1. Gakujutsu Bunken Fukyu- Kay, Tokyo, 1952*

[4] *B. A. Bilby , R. Bullough and E. Smith, «Continous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-riemannian geometry», Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 231, p. 263–273, 1955*

[5] *E. Cartan, C.R. Akad. Sci., 174, p. 593, 1922 & C.R. Akad. Sci., 174, p.734, 1922*

[6] *E. Kröner, «Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen», Arch. Rat. Mech. Anal., 4, p. 273-313, 1960*

[7] *E. Kröner, «Continuum theory of defects», in «physics of defects», ed. by R. Balian et al., Les Houches, Session 35, p. 215–315. North Holland, Amsterdam, 1980.*

envisagé aussi que l'introduction d'autres défauts topologiques tels que des désinclinaisons pourrait faire appel à des géométries d'ordres supérieurs encore plus complexes, comme les géométries de Finsler ou de Kawaguchi. En fait, l'introduction de géométries différentielles fait en général apparaître une artillerie mathématique très lourde (tenseur métrique et symboles de Christoffel) afin de décrire l'évolution spatio-temporelle dans des repères locaux infinitésimaux, comme le montre bien par exemple la théorie mathématique des dislocations de Zorawski[8] (1967).

Vu la complexité des calculs ainsi obtenus, que ce soit dans le cas du système des coordonnées de Lagrange ou dans celui des géométries différentielles, il m'était apparu souhaitable depuis longtemps d'essayer de développer une approche nettement plus simple des solides déformables, mais néanmoins tout aussi rigoureuse, qui a finalement été publiée dans un premier livre[1] publié en 2013: *la théorie eulérienne des milieux déformables*.

Quant à *la description des défauts (singularités topologiques)* qui peuvent apparaître au sein d'un solide, comme les dislocations et les désinclinaisons, c'est un domaine de la physique, initié principalement par l'idée des défauts macroscopiques de Volterra[9] (1907), qui a connu un développement fulgurant au cours de son siècle d'histoire très riche, comme l'a très bien illustré Hirth[10] (1985). C'est en 1934 qu'a réellement démarré la théorie des dislocations de réseau, suite aux papiers d'Orowan[11], de Polanyi[12] et de Taylor[13] décrivant indépendamment la dislocation coin. Puis c'est en 1939 que Burgers[14] décrit les dislocations vis et mixtes. Et c'est finalement en 1956 que sont reportées les premières observations expérimentales de dislocations, simultanément par Hirsch, Horne et Whelan[15] et par Bollmann[16], grâce au microscope électronique. Quant aux désinclinaisons, c'est en 1904 que Lehmann[17] les observe pour la première fois dans des cristaux moléculaires, et c'est en 1922 que Friedel[18] en donne une première description physique. Ensuite, à partir de la moitié du vingtième siècle, la physique des défauts dans les solides a pris une ampleur considérable.

Dans la première partie de cet essai, les dislocations et les désinclinaisons sont abordées en introduisant intuitivement le concept de *charges de dislocation*, en s'aidant des fameux «tuyaux» de Volterra[19] (1907) et d'une analogie avec les charges électriques. En coordonnées d'Euler, la notion de densité de charges apparaît alors dans une *équation de géométrocompatibilité* du solide, alors que la notion de flux de charges s'introduit dans une *équation de géomé-*

---

[8] *M. Zorawski, «Théorie mathématique des dislocations», Dunod, Paris, 1967.*

[9] *V. Volterra, «L'équilibre des corps élastiques», Ann. Ec. Norm. (3), XXIV, Paris, 1907*

[10] *J.-P. Hirth, «A Brief History of Dislocation Theory», Metallurgical Transactions A, vol. 16A, p. 2085, 1985*

[11] *E. Orowan, Z. Phys., vol. 89, p. 605,614 et 634, 1934*

[12] *M. Polanyi, Z. Phys., vol.89, p. 660, 1934*

[13] *G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London, vol. A145, p. 362, 1934*

[14] *J. M. Burgers, Proc. Kon. Ned. Akad. Weten schap., vol.42, p. 293, 378, 1939*

[15] *P. B. Hirsch, R. W. Horne, M. J. Whelan, Phil. Mag., vol. 1, p. 667, 1956*

[16] *W. Bollmann, Phys. Rev., vol. 103, p. 1588, 1956*

[17] *O. Lehmann, «Flussige Kristalle», Engelman, Leibzig, 1904*

[18] *G. Friedel, Ann. Physique, vol. 18, p. 273, 1922*

[19] *V. Volterra, «L'équilibre des corps élastiques», Ann. Ec. Norm. (3), XXIV, Paris, 1907*

trocinétique du solide. La *formulation rigoureuse du concept de charges* dans les solides fait *l'originalité essentielle* de cette approche des singularités topologiques. Le développement fouillé de ce concept fait apparaître des charges tensorielles de premier ordre, les *charges de dislocation*, associées aux *distorsions plastiques (déformations et rotations plastiques)* du solide, et des charges tensorielles de deuxième ordre, les *charges de désinclinaison*, associées aux *contorsions plastiques (flexions et torsions plastiques)* du solide. Il apparaît que ces singularités topologiques se quantifient dans un réseau solide et qu'elles ne peuvent être topologiquement localisées que dans des *cordes (tubes minces),* qui peuvent se modéliser sous forme de *lignes unidimensionnelles de dislocation ou de désinclinaiso*n, ou dans des *membranes (plaques minces),* qui peuvent se modéliser sous forme de *joints bidimensionnels de flexion, de torsion ou d'accomodation*.

Le concept de charges de dislocation et de désinclinaison permet de retrouver de manière rigoureuse les principaux résultats obtenus par la théorie classique des dislocations. Mais il permet surtout de définir un tenseur $\vec{\Lambda}_i$ de *charge linéique de dislocation*, dont on déduit un scalaire Λ de *charge linéique de rotation,* qui est associée à la partie vis de la dislocation, et un vecteur $\vec{\Lambda}$ de *charge linéique de flexion,* qui est associée à la partie coin de la dislocation. Pour une dislocation donnée, les deux charges Λ et $\vec{\Lambda}$ sont alors parfaitement définies sans avoir à faire appel à une convention pour les définir, au contraire de la définition classique d'une dislocation par son vecteur de Burgers! D'autre part, la description des dislocations *dans le système des coordonnées d'Euler* par le concept de charges de dislocation permet de traiter de manière exacte l'évolution des charges et des déformations *lors de très fortes contractions ou expansions volumiques* d'un milieu solide.

Dans la première partie, on présente donc cette approche nouvelle et originale des réseaux solides déformables *et* des défauts topologiques de structure, sous la forme d'un résumé de mon premier livre[1], et qui va servir de base pour la deuxième partie de cet essai.

Les motivations et la genèse de la deuxième partie

Dans le premier livre[1], on a montré qu'il est possible de calculer l'*énergie de repos* E_0 des dislocations, qui correspond à *l'énergie élastique stockée dans le réseau* par leur présence, et leur *énergie cinétique* E_{cin}, qui correspond à *l'énergie cinétique des particules du réseau* mobilisées par leur mouvement, ce qui permet alors de leur attribuer une *masse d'inertie virtuelle* M_0 qui satisfait des relations similaires à la fameuse équation $E_0 = M_0 c^2$ de la relativité restreinte d'Einstein, mais qui est obtenue ici de manière tout-à-fait classique, c'est à dire sans faire appel à un principe de relativité! De plus, à haute vitesse, la dynamique des dislocations satisfait aussi *les principes de la relativité restreinte* et *les transformations de Lorentz*.

On a aussi montré dans le premier livre[1] que, dans le cas des milieux solides isotropes présentant une expansion volumique homogène et constante, donc ne se déformant que par cisaillement, il apparaît *une analogie parfaite et complète avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme*, grâce au remplacement du tenseur de cisaillement par le vecteur de rotation. L'existence d'une analogie entre l'électromagnétisme et la théorie des milieux continus incompressibles a déjà été entraperçue il y a fort longtemps et développée par de nombreux auteurs,

comme l'a montré Whittaker[20] (1951). Cependant, l'analogie devenait beaucoup plus complète dans mon premier livre[1], car elle ne se borne pas seulement à une analogie avec l'un des deux couples d'équations de Maxwell dans le vide, mais elle se généralise aux deux couples d'équations de Maxwell ainsi qu'aux diverses phénoménologies de *polarisation diélectrique* et de *magnétisation de la matière*, ainsi qu'aux notions *de charges et de courants électriques!* L'analogie avec les équations de Maxwell est très étonnante de par le simple fait qu'il est initialement postulé que le réseau solide satisfait une *dynamique très simple, purement newtonienne*, dans le référentiel absolu du laboratoire de l'observateur extérieur, qui est muni de règles orthonormées et d'une horloge donnant un temps universel, alors que les singularités topologiques au sein du réseau solide, à savoir les dislocations et les désinclinaisons avec leurs charges respectives, responsables des distorsions et des contorsions plastiques du solide, sont soumises à une *dynamique relativiste* au sein du solide, justement due *au set d'équations maxwelliennes* gouvernant les cisaillements du milieu. De ce point de vue, la dynamique relativiste des singularités topologiques n'est rien d'autre qu'*une conséquence de la dynamique newtonienne parfaitement classique du réseau solide élastique* dans le référentiel de l'observateur extérieur!

Finalement, il est aussi apparu dans mon premier livre[1] qu'à grande distance d'un *amas localisé* de singularités topologiques, formé par exemple d'une ou plusieurs boucles de dislocation ou d'une ou plusieurs boucles de désinclinaison, l'aspect tensoriel des champs de distorsion générés à courte distance par cet amas peut être négligé à grande distance, de sorte que les perturbations du réseau peuvent être parfaitement décrites *à grande distance* par les deux seuls *champs vectoriels de torsion par rotation et de courbure par flexion* associés aux deux seules charges scalaires de l'amas, sa *charge scalaire de rotation* $\boldsymbol{Q}_{\lambda}$ et sa *charge scalaire de courbure* $\boldsymbol{Q}_{\theta}$. La charge de rotation devenait alors l'analogue parfait de *la charge électrique* dans les équations de Maxwell, alors que la charge de courbure présentait une analogie certaine avec *une masse gravitationnelle* dans la théorie de la gravitation.

L'existence d'analogies entre *la mécanique des milieux continus et la physique des défauts* et *les théories de l'électromagnétisme, de la relativité restreinte et de la gravitation* avait déjà fait l'objet de nombreuses publications, dont les plus célèbres sont assurément celles de Kröner[4,5]. D'excellentes revues dans ce domaine de la physique ont aussi été publiées, notamment par Whittaker[20] (1951) et par Unzicker[21] (2000). Mais aucune de ces publications n'était allée aussi loin dans la mise en évidence de ces analogies que l'approche présentée dans mon premier livre[1].

Les nombreuses analogies qui sont apparues dans le premier livre[1] entre la théorie eulérienne des milieux déformables et les théories de l'électromagnétisme, de la gravitation, de la relativité restreinte, de la relativité générale et même du modèle standard des particules élémentaires, confortées par l'absence de charges analogues aux monopôles magnétiques, par une solution possible au fameux paradoxe de l'énergie électrique d'un électron, et par l'existence d'une faible asymétrie entre charges de courbure de type lacunaire et de type interstitiel, étaient suffisamment étonnantes et remarquables pour ne pas manquer de titiller tout esprit scientifique

---

[20] *S. E. Whittaker, «A History of the Theory of Aether and Electricity», Dover reprint, vol. 1, p. 142, 1951.*

[21] *A. Unzicker, «What can Physics learn from Continuum Mechanics?», arXiv:gr-qc/0011064, 2000*

ouvert et quelque peu curieux! Mais il était clair que ces analogies n'étaient de loin pas parfaites. Il était dès lors très tentant d'analyser plus en profondeur ces analogies et d'essayer de trouver comment les perfectionner, et c'est ce qui m'a conduit à proposer le présent essai, dont la deuxième partie est entièrement dévolue à l'approfondissement, à l'amélioration et à la compréhension de ces analogies.

Le contenu de la première partie

La première partie de ce livre est composée de quatre sections, qui résument de manière autonome la théorie eulérienne de la déformation introduite dans mon premier livre[1] publié en 2013.

La première section (A) est dédiée à l'introduction de la *théorie eulérienne des réseaux défomables newtoniens.*
On y décrit comment la déformation d'un réseau peut être caractérisée par des *distorsions* et des *contorsions*. Pour cela, on fait appel à une *représentation vectorielle des tenseurs*, qui présente des avantages indéniables sur la représentation purement tensorielle, ne serait-ce que par la possibilité d'utiliser le formalisme puissant de l'analyse vectorielle, ce qui permet d'obtenir facilement les *équations de géométrocompatibilité*, qui assurent la solidité du réseau, et les *équations de géométrocinétique,* qui permettent de décrire la cinétique de la déformation. Ensuite, on introduit la physique dans ce contexte topologique, à savoir *la dynamique newtonienne* et *la thermocinétique eulérienne*. Avec tous ces ingrédients, il devient possible de décrire les comportements particuliers des réseaux solides, comme *l'élasticité, l'anélasticité, la plasticité* et *l'auto-diffusion*. Cette première section se termine par l'établissement du set complet des *équations d'évolution d'un réseau* dans le système des coordonnées d'Euler.

La deuxième section (B) est dédiée aux *applications de la théorie eulérienne,* et présente très succinctement des exemples de *phénoménologies des solides usuels*.
On y montre comment obtenir les fonctions et équations d'état d'un solide isotrope, quels sont les comportements élastiques et thermiques qui peuvent apparaître, comment se propagent les ondes et pourquoi il existe des relaxations thermoélastiques, que sont les phénomènes de transport de masse et pourquoi il peut apparaître des relaxations inertielles, quelles sont les phénoménologies usuelles d'anélasticité et de plasticité, et finalement comment il peut apparaître des transitions structurales de 2ème et de 1ère espèce dans un réseau solide.

La troisième section (C) est dédiée à l'introduction des *charges de dislocation et charges de désinclinaison dans les réseaux eulériens*.
Après avoir introduit analytiquement *les concepts de densité et de flux de charges de dislocation et de désinclinaison dans les réseaux*, on présente une revue détaillée des *singularités topologiques macroscopiques et microscopiques du réseau* qui peuvent être associées aux charges de dislocation et de désinclinaison. Puis on discute le mouvement des charges de dislocation au sein du réseau, en introduisant *les flux de charges de dislocation et les relations d'Orowan*. Finalement, on déduit *la force de Peach et Koehler* qui agit sur les dislocations et on établit un nouveau set complet des *équations d'évolution d'un réseau* dans le système des coordonnées d'Euler, qui tient compte cette fois de l'existence de singularités topologiques au sein du réseau.

La quatrième section (D) est dédiée aux *applications du concept de charges* au sein du réseau solide eulérien, et présente des *éléments de la théorie des dislocations dans les solides usuels*. On commence par montrer que, dans le cas particulier de la déformation d'un réseau isotrope par purs cisaillements, on peut remplacer le tenseur de cisaillement par le vecteur de rotation, ce qui permet de trouver un set d'équations qui correspond très exactement à toutes *les équations de Maxwell* de l'électromagnétisme! Ensuite, on montre comment calculer *les champs et les énergies des dislocations vis et coin* dans un réseau solide isotrope, ainsi que *les interactions pouvant intervenir entre dislocations*. On termine cette section d'applications par la présentation du *modèle de la corde* des dislocations, qui est le modèle fondamental permettant d'expliquer la plupart des comportements macroscopiques de l'anélasticité et de la plasticité des solides cristallins.

Le contenu de la deuxième partie

La deuxième partie de ce livre est composée de cinq sections. De manière progressive, en introduisant *plusieurs conjectures judicieuses* qui sont résumées dans l'annexe D, on s'attaque aux analogies existant entre la théorie eulérienne de la déformation décrite dans la première partie et appliquée à un réseau très particulier, le *«réseau cosmologique»*, et les grandes théories actuelles de la physique du Macrocosme et du Microcosme, comme les Equations de Maxwell, la Relativité Restreinte, la Gravitation Newtonienne, la Relativité Générale, la Cosmologie Moderne, la Physique Quantique et le Modèle Standard des particules élémentaires

La première section (A) est dédiée à l'introduction du *«réseau cosmologique»*.
Par l'introduction de propriétés élastiques assez particulières d'expansion volumique, de cisaillement et surtout *de rotation*, exprimées *par unité de volume de réseau dans l'énergie libre*, on obtient un réseau imaginaire possédant une *équation de Newton très particulière*, dans laquelle il apparaît notamment *un terme inédit de force*, qui est directement lié à l'énergie de distorsion due aux singularités contenues dans le réseau, et qui sera appelé à jouer par la suite un rôle fondamental dans les analogies avec la Gravitation et avec la Physique Quantique.
On montre alors que *la propagation d'ondes dans ce réseau cosmologique* présente des particularités intéressantes: la propagation d'ondes transversales de polarisation linéaire y est toujours associée à des ondelettes longitudinales, et la propagation d'ondes transversales pures ne peut se faire que par des *ondes de polarisation circulaire* (ce qui aura un lien direct avec les photons). D'autre part, la propagation d'ondes longitudinales peut disparaître au profit de l'apparition de *modes de vibrations longitudinales localisées* (ce qui aura un lien direct avec la physique quantique) dans le cas où l'expansion volumique du milieu est inférieure à une certaine valeur critique.
Ensuite, le calcul de la *courbure des rayons d'onde* au voisinage d'une singularité de l'expansion volumique du réseau permet de trouver des conditions auxquelles doit satisfaire le champ d'expansion d'une singularité pour qu'il apparaisse un piège qui capture les ondes transversales, autrement dit un *«trou noir»!*
Finalement, on montre qu'un tel réseau cosmologique, fini dans l'espace absolu, peut présenter *une expansion et/ou une contraction volumique dynamique* moyennant qu'il contienne une certaine quantité d'énergie cinétique d'expansion, phénomène tout à fait similaire à l'expansion

cosmologique de l'Univers! Suivant les signes et les valeurs des modules élastiques, plusieurs types de comportements cosmologiques du réseau sont possibles, dont certains présentent les phénomènes *de big-bang, d'inflation rapide et d'accélération de la vitesse d'expansion,* et qui peuvent être suivis pour certains cas d'une *re-contraction du réseau conduisant à un phénomène de big-bounce*!
On en déduit que c'est *l'énergie élastique d'expansion contenue dans le réseau* qui est responsable de ces phénomènes, et notamment de l'*accroissement de la vitesse d'expansion*, phénomène qui est observé sur l'Univers actuel par les astrophysiciens et qui est attribué par eux à une hypothétique *«énergie noire»*.

La deuxième section (B) est dédiée aux *Equations de Maxwell* et à la *Relativité Restreinte*.
On commence par montrer que l'équation de Newton du réseau cosmologique peut être séparée en une partie rotationnelle et une partie divergente, et que la partie rotationnelle fait apparaître un set d'équations pour le champ de rotation macroscopique parfaitement identique à l'ensemble des *équations de Maxwell de l'électromagnétisme*.
On montre ensuite que l'équation de Newton peut aussi être séparée de manière différente en *deux équations partielles de Newton* qui permettent d'une part de calculer les champs de distorsion élastique associés aux singularités topologiques, et d'autre part de calculer les perturbations de l'expansion volumique associées aux énergies élastiques de distorsion des singularités topologiques. En se servant de la première équation partielle de Newton, on peut alors s'attaquer aux calculs des champs et énergies de distorsion élastique des singularités topologiques au sein d'un réseau cosmologique. On montre ainsi qu'il est possible de trouver des conditions sur les modules élastiques de ce réseau telles qu'il est possible d'attribuer de manière tout à fait classique une *masse d'inertie* aux singularités topologiques, qui satisfait *toujours* la fameuse formule d'Einstein $E_0 = M_0 c^2$.
Puis on démontre que les singularités topologiques satisfont aussi une *dynamique typiquement relativiste* lorsque leur vitesse devient proche de la célérité des ondes transversales.
Sur ces bases, on finit par une discussion de l'analogie entre notre théorie et la théorie de la *Relativité Restreinte.* On constate que le réseau cosmologique se comporte en fait comme un *éther*, dans lequel les singularités topologiques satisfont exactement les mêmes propriétés que celles de la Relativité Restreinte concernant la contraction des règles, la dilatation du temps, l'expérience de Michelson-Morley et l'effet Doppler-Fizeau. L'existence du réseau cosmologique permet alors d'expliquer très simplement certains côtés un peu obscurs de la relativité restreinte, comme le fameux *paradoxe des jumeaux*!

La troisième section (C) est dédiée à la *Gravitation* et à la *Cosmologie.*
Grâce à *la deuxième équation partielle de Newton*, on commence par calculer *les champs externes de perturbations d'expansion,* c'est-à-dire *les champs externes de gravitation* associés à des singularités topologiques macroscopiques localisées, soit *d'énergie élastique de distorsion donnée*, soit *de charge de courbure donnée*, soit *de charge de rotation donnée*.
Dans la foulée, on décrit aussi des *singularités macroscopiques lacunaires ou interstitielles,* pouvant apparaître au sein du réseau sous la forme d'un trou dans le réseau ou d'un encastrement interstitiel d'un morceau de réseau, qui s'avéreront par la suite des candidates idéales pour expliquer les *trous noirs* et les *pulsars* de l'Univers.

En appliquant les calculs du champ de gravitation externe des singularités topologiques aux singularités microscopiques sous forme de boucles de désinclinaison vis, de boucles de dislocation coin ou de boucles de dislocation mixtes, on déduit l'ensemble des propriétés de ces boucles. Il apparaît alors la notion de *«masse de courbure»* des boucles de dislocation coin, qui correspond à la masse équivalente associée aux effets gravitationnels *de la charge de courbure de ces boucles*, et qui peut être positive (dans le cas de boucles de nature lacunaire) ou négative (dans le cas de boucles de nature interstitielle). En fait, la charge de courbure et la masse de courbure qui lui est associée n'apparaissent dans aucune autre théorie physique, ni dans la Relativité Générale, ni dans la Physique Quantique, ni dans le Modèle Standard des particules élémentaires. Mais dans notre théorie, c'est précisément cette masse de courbure qui sera responsable de l'apparition d'une *faible asymétrie* entre les particules (contenant hypothétiquement des boucles coin de nature interstitielle) et les anti-particules (contenant hypothétiquement des boucles coin de nature lacunaire), et qui jouera un rôle capital dans l'évolution cosmologique des singularités topologiques!

En considérant alors les interactions gravitationnelles existant entre singularités topologiques composées essentiellement de boucles de désinclinaison vis, on peut déduire les comportements *des règles et des horloges locales d'observateurs locaux* en fonction du champ d'expansion local qui règne au sein du réseau cosmologique. On montre alors que pour tout observateur local, et quelle que soit la valeur de l'expansion volumique locale du réseau, les équations de Maxwell restent toujours parfaitement invariantes, de sorte que, pour cet observateur, la vitesse des ondes transversales est une constante, alors que celle-ci dépend fortement de l'expansion volumique locale si elle est mesurée par l'observateur extérieur au réseau!

On montre ensuite que les interactions gravitationnelles ainsi obtenues présentent des analogies très fortes avec la *Gravitation de Newton* et avec la *Relativité Générale d'Einstein,* et on discute en détail les points parfaitement analogues, comme l'analogie parfaite avec la métrique de Schwarzschild à grande distance d'un objet massif et la courbure des rayons d'onde par un objet massif.

Mais on montre que notre théorie eulérienne du réseau cosmologique apporte aussi des éléments nouveaux à la théorie de la Gravitation, notamment des modifications à très courte distance de la métrique de Schwarzschild et une meilleure compréhension des rayons critiques associés aux trous noirs: les rayons de la sphère des perturbations et du point de non-retour y sont tous deux semblables et égaux au rayon de Schwarzschild $R_{Schwrzschild} = 2GM / c^2$, et le rayon limite pour lequel la dilatation du temps de l'observateur tendrait vers l'infini devient nul, de sorte que notre théorie n'est pas limitée pour la description d'un trou noir au-delà de la sphère de Schwarzschild.

On dresse ensuite un tableau complet *de toutes les interactions gravitationnelles* existant entre les diverses singularités topologiques d'un réseau.

En considérant alors des singularités topologiques formées du couplage d'une boucle de désinclinaison vis avec une boucle de dislocation coin, qui sont appelées des boucles de dispiration, il apparaît une *force d'interaction similaire à un potentiel de capture, avec une portée très faible*, qui permet des interactions entre boucles présentant *une analogie parfaite avec les interactions faibles* entre particules élémentaires du Modèle Standard!

Sur la base des comportements cosmologiques du réseau décrits dans la section (A), et les

interactions gravitationnelles entre singularités topologiques décrites dans la section (C), on peut alors imaginer *un scénario très plausible d'évolution cosmologique des singularité topologiques* conduisant à la structure actuelle de notre Univers. Ce scénario permet de donner une explication simple à plusieurs faits encore mal compris, comme *la formation des galaxies*, *la disparition de l'anti-matière*, *la formation de gigantesques trous noirs au coeur des galaxies*, et même *la fameuse «masse noire»* que les astrophysiciens ont dû inventer pour expliquer le comportement gravitationnel des galaxies. Dans notre théorie, la *«masse noire»* serait en fait une mer de neutrinos répulsifs dans laquelle auraient précipité et baigneraient les galaxies. En effet, dans le cas des boucles de dislocation coin les plus simples, analogiquement similaires aux neutrinos, la *«masse de courbure» domine la masse d'inertie*, de sorte que les neutrinos devraient être les seules particules gravitationnellement répulsives, alors que les anti-neutrinos seraient quant à eux gravitationnellement attractifs. C'est cette particularité étonnante qui permettrait la formation d'une mer de neutrinos répulsifs jouant le rôle de *«matière noire»* pour les galaxies, de par la force de compression qu'ils exercent sur la périphérie des galaxies!
Finalement, on montre comment on peut traiter la *constante de Hubble*, le *«redshift» des galaxies* et l'évolution du *fond diffus de rayonnement cosmologique* dans le cadre de notre théorie eulérienne du réseau cosmologique.

La quatrième section (D) est dédiée à la *Physique Quantique* et au *Modèle Standard* des particules élémentaires.
On commence par utiliser la deuxième équation partielle de Newton, dans le cas dynamique, pour montrer qu'il existe aussi des *fluctuations gravitationnelles longitudinales dynamiques* associées aux singularités topologiques mobiles au sein du réseau. En conjecturant *des opérateurs* similaires à ceux de la physique quantique, on montre alors que la deuxième équation partielle de Newton permet de déduire les fluctuations gravitationnelles associées à une singularité topologique se déplaçant quasi-librement à des vitesses relativistes au sein du réseau.
Dans le cas de singularités topologiques non relativistes liées par un potentiel, on montre que la deuxième équation partielle de Newton appliquée aux fluctuations gravitationnelles longitudinales associées à ces singularités conduit très exactement à *l'équation de Schrödinger de la physique quantique*, ce qui permet de donner *pour la première fois* une interprétation physique simple et réaliste de l'équation de Schrödinger et de la fonction d'onde quantique: *la fonction d'onde quantique déduite de l'équation de Schrödinger représente l'amplitude et la phase des vibrations gravitationnelles longitudinales associées à une singularité topologique du réseau cosmologique!*
Toutes les conséquences de l'équation de Schrödinger apparaissent alors avec une explication physique simple, telles que *l'équation d'onde stationnaire* d'une singularité topologique placé dans un potentiel statique, *le principe d'incertitude d'Heisenberg* et *l'interprétation probabiliste du carré de la fonction d'onde!*
Dans le cas où les fluctuations gravitationnelles d'expansion de deux singularités topologiques sont couplées, il apparaît aussi assez simplement les concepts de *bosons* et de *fermions,* ainsi que *le principe d'exclusion de Pauli!*
Au coeur même d'une boucle de singularité topologique, on montre qu'il ne peut pas exister de solutions statiques à la deuxième équation partielle de Newton pour les fluctuations gravitationnelles longitudinales. Il devient par conséquent *nécessaire de trouver une solution dynamique* à

cette équation, et la solution dynamique la plus simple qu'il est possible d'envisager est que la boucle tourne sur elle-même. En résolvant ce mouvement de rotation avec la deuxième équation partielle de Newton, qui n'est en ce cas dynamique rien d'autre que l'équation de Schrödinger, on obtient la solution quantifiée des fluctuations gravitationnelles internes à la boucle, qui n'est rien d'autre que *le spin de la boucle*, qui peut prendre plusieurs valeurs différentes (1/2, 1, 3/2, etc.) et qui est parfaitement similaire au spin des particules du Modèle Standard! Si la boucle est composée d'une boucle de désinclinaison vis, il apparaît aussi un *moment magnétique de la boucle*, proportionnel au célèbre *magnéton de Bohr!* Le fameux argument des pionniers de la physique quantique selon lequel le spin ne peut en aucun cas être une rotation réelle de la particule sur elle-même à cause d'une vitesse équatoriale de rotation supérieure à la célérité de la lumière est balayé dans notre théorie par le fait que l'expansion statique au voisinage du coeur de la boucle est très élevée, ce qui conduit à des célérités de la lumière au voisinage du coeur de la boucle beaucoup plus élevées que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle!

Dans cette argumentation sur la nécessité absolue d'un *spin* des boucles de singularité pour satisfaire la deuxième équation partielle de Newton, seule la valeur exacte du spin d'une boucle, à savoir les valeurs 1/2 ou 1, ne trouve pas pour l'instant d'explication simple!

On finit par montrer comment construire un paquet d'ondes transversales pures de polarisation circulaire et pourquoi il apparaît *une quantification de l'énergie de ces fluctuations. C*es paquets d'onde forment des *quasi-particules* qui ont des propriétés parfaitement similaires aux *propriétés quantiques des photons*: *polarisation circulaire, masse nulle, quantité de mouvement non nulle, non-localité, dualité ondes-corpuscules, intrication et phénomène de décohérence.*

Dans la dernière partie de cette section (D), on recherche les ingrédients qu'il faudrait ajouter au réseau cosmologique pour retrouver une analogie avec les diverses particules du Modèle Standard. On montre qu'en introduisant dans un réseau cubique des familles de *plans (qu'on a imaginairement «colorés» en rouge, vert et bleu) qui satisfont à certaines règles simples concernant leur arrangement et leur rotation*, on retrouve des boucles topologiques parfaitement *analogues à toutes les particules, leptons et quarks, de la première famille de particules élémentaires du Modèle Standard*, ainsi que des boucles topologiques *analogues aux bosons intermédiaires du Modèle Standard*. Il apparaît aussi spontanément *une force forte*, au sens d'une force qui présente *un comportement asymptotique*, entre les boucles analogues aux quarks, qui sont alors *obligées* de se regrouper en *triplets* pour former des assemblages de boucles *analogues aux baryons*, ou en *doublets* pour former des assemblages de boucle-anti-boucle *analogues aux mésons*. De plus, on retrouve aussi des boucles topologiques «bi-couleur» qui correspondent parfaitement aux *gluons* associés à la force forte dans le Modèle Standard!

Pour expliquer alors l'existence de *trois familles de quarks et leptons* dans le Modèle Standard, on montre que l'introduction d'une structure topologique plus complexe des boucles coin, basées sur *l'assemblage d'une paire de boucles de désinclinaison coin,* permet d'expliquer de manière satisfaisante l'existence de trois familles de particules d'énergies très différentes.

Finalement, on discute de l'intérêt de cette analogie forte entre les singularités topologiques d'un modèle de réseau cosmologique cubique «coloré» et les particules élémentaires du Modèle Standard, puis on discute des questions encore en suspens concernant cette analogie.

La cinquième section (E) est dédiée à quelques conséquences très hypothétiques du réseau cosmologique parfait associées aux *fluctuations gravitationnelles pures.*
On peut imaginer l'existence de fluctuations longitudinales pures au sein du réseau cosmologique qui peuvent être traitées, soit comme des fluctuations gravitationnelles aléatoires qui pourraient avoir une analogie avec *les fluctuations quantiques du vide*, soit comme des fluctuations gravitationnelles stables, qui pourraient conduire à l'échelle macroscopique à une *théorie cosmologique de Multi-Univers*, et à l'échelle microscopique à l'existence d'une forme de *quasi-particules stables* qu'on pourrait appeler des *gravitons*, par analogie avec les photons, mais qui n'ont en fait rien de commun avec les gravitons usuellement postulés dans le cadre de la Relativité Générale.

On termine ce livre par une *conclusion* dans laquelle on relève les rôles centraux joués par l'équation de Newton et par la structure microscopique du réseau cosmologique. On y met en évidence les nombreux points positifs, mais aussi les points encore obscurs, qui sont apparus tout au long de cet essai dans l'analogie développée entre le réseau cosmologique newtonien et les grandes théories actuelles de la physique.

PARTIE I

A

Théorie eulérienne des réseaux déformables newtoniens

Distorsions et contorsions

Géométrocompatibilité et géométrocinétique

Dynamique newtonienne et thermocinétique eulérienne

Elasticité, anélasticité, plasticité et auto-diffusion

Equations d'évolution d'un réseau

Chapitre 1

Distorsions d'un réseau

On introduit dans ce chapitre une description des réseaux solides déformables dans le système des coordonnées d'Euler. A partir de la définition du champ de vitesse moyenne $\vec{\phi}$ des sites d'un réseau dans le référentiel absolu d'un observateur ***GO***, on déduit un *scalaire d'expansion volumique* τ et un *vecteur de rotation* $\vec{\omega}$, qui satisfont des *équations géométrocinétiques* d'évolution spatio-temporelle.
On montre alors que ces deux entités ne sont rien d'autre que la trace et la partie anti-symétrique d'un tenseur plus général appelé *tenseur des distorsions*, qui sera représenté en notation vectorielle par $\vec{\beta}_i$ et qui satisfait lui aussi une équation géométrocinétique en coordonnées d'Euler. De ce tenseur, on déduira encore un *tenseur de déformation* $\vec{\varepsilon}_i$ et un *tenseur de cisaillement* $\vec{\alpha}_i$ du réseau solide.
Ensuite, par quelques exemples simples de champs de vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ propres à divers mouvements connus du milieu, on vérifie que les tenseurs topologiques $\vec{\beta}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\omega}$ et τ décrivent parfaitement les distorsions, les déformations, les cisaillements, les rotations et les expansions volumiques pouvant apparaître au sein d'un réseau solide.

1.1 - Evolution spatio-temporelle d'un milieu solide déformable

Si un observateur, que nous appellerons *Grand Observateur* ***GO***, désire décrire dans son laboratoire l'évolution spatio-temporelle d'un certain *milieu continu* qui se déplace dans l'espace par translation et rotation, et qui, de plus, peut se déformer au cours du temps (figure 1.1), il faut en premier lieu qu'il définisse le type de cinétique à utiliser. En prenant pour *axiome de base* que l'évolution spatio-temporelle du milieu est décrite par *une cinétique galiléenne*, c'est-à-dire une cinétique satisfaisant la transformation de Galilée, et par conséquent le principe d'additivité des vitesses, l'observateur ***GO*** peut décrire cette évolution sur la base du référentiel absolu de son laboratoire. Ce référentiel est composé d'un *repère euclidien orthonormé* $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$, c'est-à-dire de trois règles de longueur unité, perpendiculaires entre elles $(\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,\vec{\mathbf{e}}_3)$, et d'une horloge universelle assurant que le temps t est mesuré de manière identique en tout lieu de son laboratoire (figure 1.1).
Pour décrire simplement et complètement l'évolution spatio-temporelle du milieu continu, l'observateur peut se servir d'un système de *coordonnées de Lagrange*. En premier lieu, il procède à un marquage du milieu matériel à l'instant initial $t=0$ à l'aide d'un quadrillage de points $\boldsymbol{P}_0$. Ensuite, il peut définir un repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ immobile, situé au point repéré par $\vec{\xi}_{\boldsymbol{O}}$ dans le référentiel de son laboratoire. En munissant ce repère fixe $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ de règles de longueur unité $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, et en l'orientant judicieusement par rapport à la position initiale du milieu à l'instant $t=0$, il peut mesurer *la position* de tous les points $\boldsymbol{P}_0$ du milieu à l'instant initial $t=0$ à l'aide

de vecteurs $\vec{r}$. A un instant $t > 0$, un point $\boldsymbol{P}_0$ du milieu se sera déplacé en $\boldsymbol{P}$, et l'observateur peut alors relier le point $\boldsymbol{P}_0$ au point $\boldsymbol{P}$ à l'aide d'un vecteur $\vec{u}$, qui est appelé le *vecteur de déplacement* du point $\boldsymbol{P}_0$. Comme ce vecteur dépend de la position initiale $\vec{r}$ du point $\boldsymbol{P}_0$ et du temps t , l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(\vec{r},t)$ repérant tous les points du milieu est appelé le *champ de déplacement* du milieu en coordonnées de Lagrange.

Le concept de milieu continu à l'échelle macroscopique

En utilisant l'expression de *milieu continu*, il a été fait appel à un concept intuitif, à savoir que le milieu ne présente, à l'*échelle macroscopique* où il est observé, ni structure discontinue à l'état statique, ni apparition de discontinuités, telles que des déchirures, des ruptures locales ou des formations de cavités au cours de son évolution spatio-temporelle.

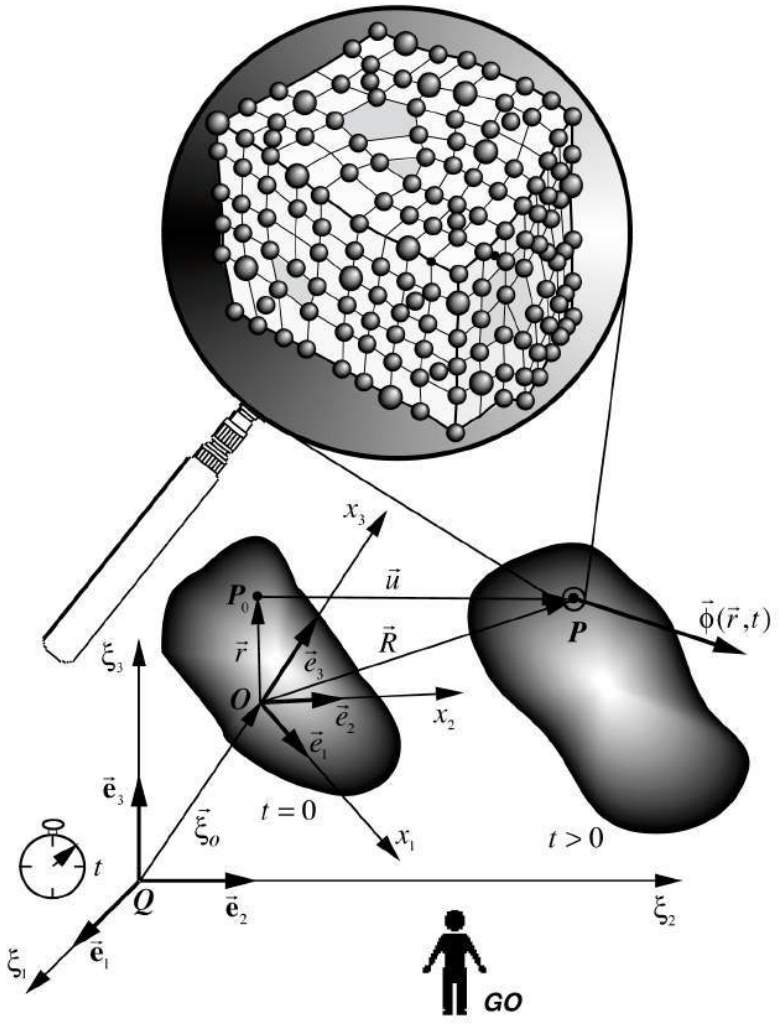


Figure 1.1 *- évolution spatio-temporelle d'un milieu matériel dans le référentiel absolu*

De l'observation macroscopique du comportement du milieu, et notamment de la *continuité du champ de déplacement* $\vec{u}$, il est possible d'attribuer des qualificatifs au milieu observé. Si le

milieu présente un champ de déplacement $\vec{u}$ parfaitement continu au cours de son évolution spatio-temporelle, il est qualifié de *milieu solide*. Il a alors la propriété macroscopique de posséder une forme qui lui est propre et qu'il est difficile de modifier. Si, par contre, le milieu présente un champ de déplacement $\vec{u}$ discontinu, formant au cours du temps un enchevêtrement inextricable, il est qualifié de *milieu fluide*. Celui-ci présente la propriété macroscopique de s'écouler et doit par conséquent être maintenu dans un récipient dont il épouse la forme. En ce cas, le champ de déplacement $\vec{u}$ perd toute signification physique, et seule la vitesse $\vec{\phi}(\vec{\xi},t)$ du fluide situé à l'instant t à la coordonnée d'espace $\vec{\xi}$ du référentiel absolu conserve un sens physique. Dans ce traité, nous nous intéresserons essentiellement au cas du milieu solide.

Le concept de réseau solide à l'échelle microscopique

Le concept de milieu continu solide défini ci-dessus ne s'applique que lorsque ce milieu est observé à *une échelle macroscopique*. En effet, un agrandissement du même milieu à *une échelle suffisamment microscopique* fera apparaître une collection discontinue d'objets (fig. 1.1), auxquels on attribuera dans la suite le nom générique de *particules* (par exemple des corpuscules, des atomes, des molécules, etc.). On en conclue logiquement que les propriétés phénoménologiques globales observées à l'échelle macroscopique où le milieu paraît continu sont en fait des effets statistiques résultant du grand nombre de particules interagissant entre elles à l'échelle microscopique.
L'agrandissement du milieu permet aussi de définir certaines caractéristiques microscopiques importantes du milieu, telles que sa *structure*, c'est-à-dire la façon dont sont assemblées entre elles les particules qui le composent, et sa *composition chimique*, c'est-à-dire la nature des particules qui le composent.
Un milieu continu sera dit *solide* lorsque, à l'échelle microscopique, il correspond à une collection de particules telle que *l'identité des plus proches voisines d'une particule donnée ne change pas au cours du temps*. Autrement dit, chaque particule est reliée à ses plus proches voisines par des liaisons rigides qui l'empêchent de se mouvoir à grande distance de celles-ci. Par conséquent, seuls des mouvements relatifs à courte distance de ses plus proches voisines lui sont autorisés, par l'élasticité des liaisons. Sous l'effet de ces liaisons, on dit que les particules forment alors un *réseau solide*.

Les différentes classes de réseau solide

Il est possible de définir différentes classes de réseaux solides, suivant l'arrangement des particules les unes par rapport aux autres. Si l'arrangement des particules présente un ordre bien établi, qui se répète à grande distance par translation d'une cellule élémentaire, on parle d'un *réseau de structure cristalline*. Par exemple, le réseau bidimensionnel dessiné à la figure 1.2(a), et obtenu par la translation d'une cellule unité hexagonale, présente un ordre parfait aussi bien à longue distance qu'à courte distance.
Certains réseaux solides peuvent présenter des arrangements de particules n'ayant pas d'ordre à grande distance, mais seulement un certain ordre à courte distance. On parle dans ce cas d'un *réseau de structure amorphe*. L'exemple bidimensionnel reporté à la figure 1.2(b) représente un réseau amorphe de particules, obtenu par pavage de la surface avec des pentagones,

des hexagones et des heptagones irréguliers, dont les côtés ont une longueur fixe. L'ordre à courte distance du réseau amorphe transparaît dans le fait que chacune des particules a exactement trois plus proches voisines.
Il peut aussi exister des réseaux solides dont l'arrangement des particules ne présente pas d'ordre par translation à longue distance, mais un certain ordre par rotation. On parle en ce cas d'un *réseau de structure quasi-cristalline*, dont l'exemple de la figure 1.2(c) montre clairement l'absence d'ordre par translation à grande distance.

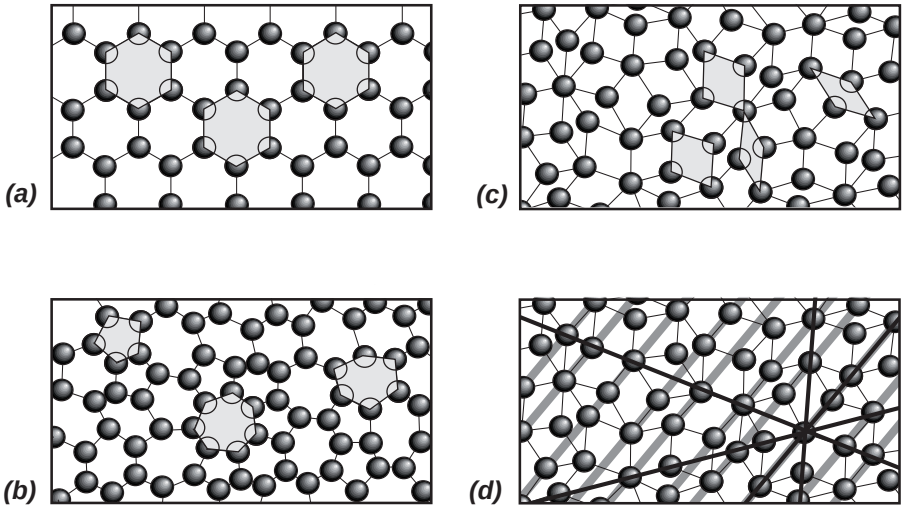


Figure 1.2 *- réseaux bidimensionnels cristallin (a), amorphe (b) et quasi-cristallin (c) et (d)*

Ce réseau est obtenu par un pavage bidimensionnel à l'aide de deux types de losanges d'angles au sommet différents (pavage de Penrose). A première vue, ce réseau semble amorphe. Mais l'analyse plus détaillée de la figure 1.2(d) montre que les particules s'alignent sur des droites parallèles entre elles. Les distances entre particules alignées sur une droite, ainsi que les distances entre les droites parallèles, ne sont pas régulières. Il existe en fait cinq directions privilégiées pour l'orientation de ces alignements de particules. Cette structure quasi-cristalline bidimensionnelle présente donc une forme de symétrie par rotation d'ordre cinq, qui est interdite dans le cas d'une structure cristalline obtenue par translation d'un motif de base.
Les exemples donnés à la figure 1.3 sont des représentations bidimensionnelles. Il faut donc encore généraliser ces notions à l'espace tridimensionnel. A trois dimensions, les réseaux cristallins sont constitués par la translation d'une cellule élémentaire tridimensionnelle qui est appelée la *maille du réseau* (figure 1.3). Les réseaux cristallins peuvent être classés suivant les opérations de symétrie de rotation, de réflexion et d'inversion par rapport à un point qu'il est possible d'appliquer à la maille élémentaire du réseau. Ces opérations de symétrie conduisent à l'existence de quatorze *réseaux de Bravais*, qui sont représentés dans la figure 1.3.
Les quatorze réseaux de Bravais peuvent encore être décomposés en sept *systèmes cristallins* en considérant la façon dont l'espace est pavé par la maille élémentaire. Pour certains de ces sept systèmes cristallins, il peut exister différents types de réseaux (*P, C, I* ou *F*), qui correspondent aux différents motifs de remplissage de la maille élémentaire par les particules.

Il est intéressant de noter que le motif de remplissage d'une maille par les particules peut conduire à différentes valeurs du nombre de sites substitutionnels propres à chaque maille et pouvant contenir une particule liée. Par exemple, dans le cas des structures cubiques représentées à la figure 1.3, le nombre de sites propre à une maille est de 1 pour le système cubique simple, de 2 pour le système cubique centré et de 4 pour le système cubique à faces centrées.

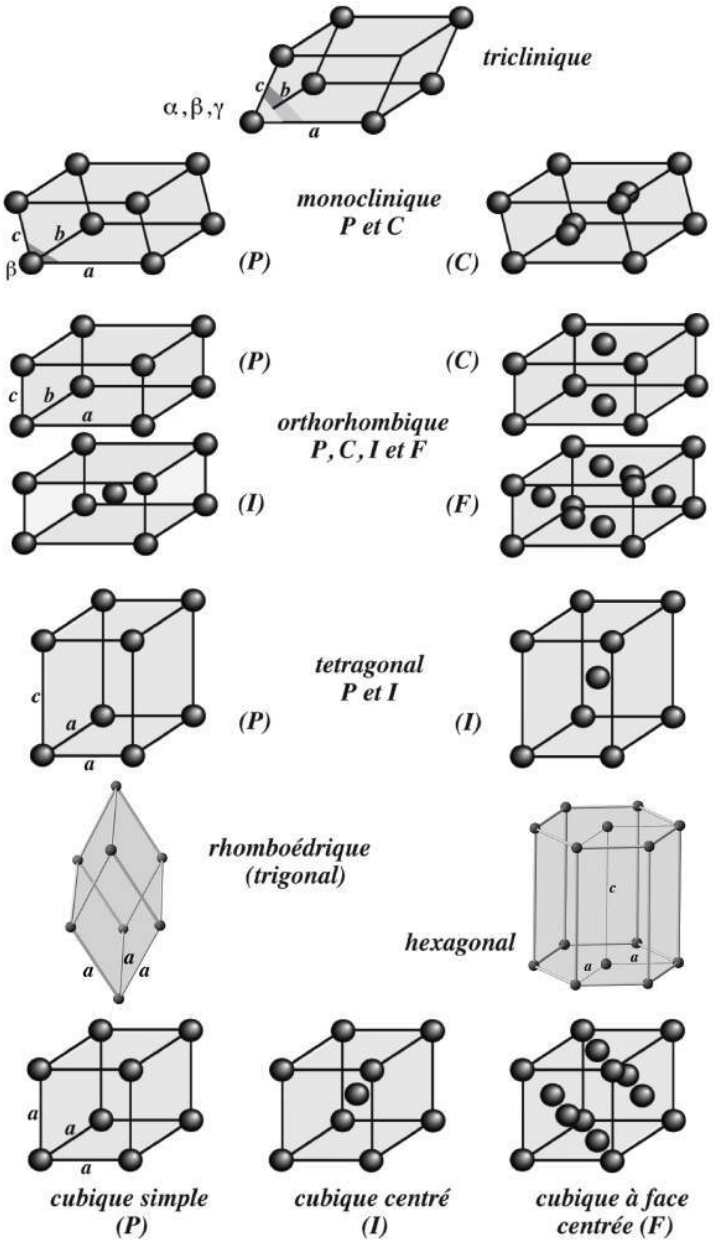


Figure 1.3 *- les sept systèmes cristallins et les quatorze réseaux de Bravais*

Dans le cas de milieux solides non ordonnés, comme les milieux amorphes, les milieux quasi-cristallins ou les milieux polycristallins à grains très fins, la notion de maille de réseau n'a plus de signification. Par contre, le concept de site de réseau conserve une signification physique précise, même s'il n'existe pas une maille élémentaire unique.

Le concept de singularités topologiques d'un réseau solide

Dans le cas d'un réseau solide ordonné, il apparaît encore des *défauts de structure* dans l'assemblage régulier des particules en réseau. Ces *défauts de structure* ont des origines diverses, telles que *des irrégularités dans l'espèce chimique* des objets composant le réseau, ou des *singularités topologiques*, c'est -à-dire des irrégularités dans la structure topologique du réseau, et ils peuvent être classés en défauts *ponctuels, linéaires ou plans* suivant leur topologie dans le réseau.
C'est aussi par des observations de la *dynamique* à l'échelle microscopique, au cours de l'évolution spatio-temporelle macroscopique du réseau, qu'il sera possible de comprendre les raisons objectives de certains comportements macroscopiques. Par exemple, on verra qu'il existe des liens étroits entre les *propriétés macroscopiques de déformation* des réseaux ordonnés et les *distorsions de la maille du réseau* induites par la présence de singularités topologiques mobiles au sein du réseau, comme des dislocations ou des désinclinaisons.
En conclusion, une description complète de l'évolution spatio-temporelle d'un réseau pouvant être considéré comme continu à l'échelle macroscopique ne peut absolument pas se passer de la description des phénomènes intervenant à l'échelle microscopique. La recherche d'une théorie décrivant l'évolution spatio-temporelle macroscopique d'un réseau continu déformable doit donc se baser sur la définition de champs macroscopiques moyens (de nature scalaire, vectorielle et tensorielle) déduits à partir d'une description statistique de la dynamique à l'échelle microscopique d'une multitude d'objets interagissant entre eux.

Les systèmes de coordonnées de Lagrange et d'Euler

Pour décrire l'évolution spatio-temporelle d'un milieu continu déformable, il existe deux systèmes de coordonnées bien connus : le système des *coordonnées de Lagrange,* utilisé en général pour décrire la déformation des solides, et le système des *coordonnées d'Euler,* utilisé en général pour décrire l'hydrodynamique des fluides.
Le système des coordonnées de Lagrange est basé sur la description de l'évolution temporelle du champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r},t)$ défini précédemment, connaissant les coordonnées initiales $\vec{r}$ de tous les points du solide dans un repère fixe $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du laboratoire de l'observateur, comme illustré à la figure 1.1.
Quant au système des coordonnées d'Euler, il est basé sur la description de l'évolution temporelle du champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{\xi},t)$ des points du milieu situés aux coordonnées d'espace $\vec{\xi}$ et au temps t dans le repère absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ du laboratoire de l'observateur.
Le système des coordonnées de Lagrange se prête assez bien à la description de l'évolution des réseaux solides qui se déforment très faiblement, mais devient parfaitement inutilisable pour décrire les fortes déformations d'un réseau, ou un réseau contenant des singularités topologiques, alors que le système de coordonnées d'Euler est beaucoup plus général, car il se prête non seulement à la description des fluides, mais aussi à celle des réseaux solides présentant de très fortes déformations ou contenant des singularités topologiques. C'est pourquoi nous développons dans cet essai une *description eulérienne de l'évolution spatio-temporelle des réseaux solides déformables*.

1.2 - Définition de grandeurs locales en coordonnées d'Euler

La vitesse locale moyenne $\vec{\phi}(\vec{r},t)$

Dans le cas d'une collection de particules dans l'espace à l'état solide, chaque particule i possède une vitesse propre $\vec{v}_i$. Pour déterminer une vitesse locale moyenne des particules, il faut se fixer un petit élément de volume $\boldsymbol{V_f}$ centré sur la coordonnée d'espace $\vec{r}$ (figure 1.4), puis mesurer les vitesses $\vec{v}_i$ de toutes les particules contenues dans le volume fixé $\boldsymbol{V_f}$. Si le nombre instantané de particules dans ce volume $\boldsymbol{V_f}$ est égal à $\boldsymbol{N}$, et que $\boldsymbol{N}$ est suffisamment grand, la vitesse moyenne $\vec{\phi}$ à l'endroit $\vec{r}$ et à l'instant t peut être définie par l'expression suivante

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}(\vec{r},t) = \frac{1}{\boldsymbol{N}} \sum_{i \in \boldsymbol{V_f}} \vec{v}_i(t) \qquad (1.1)$$

Si une vitesse moyenne $\vec{\phi}$ différente de zéro est mesurée, cela signifie aussi que, pour chaque particule i, il est possible de trouver une fluctuation $\Delta\vec{v}_i$ à la vitesse moyenne $\vec{\phi}$ par la relation

$$\vec{v}_i = \vec{\phi} + \Delta\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{N}} \sum_{i \in \boldsymbol{V_f}} \Delta\vec{v}_i(t) = 0 \qquad (1.2)$$

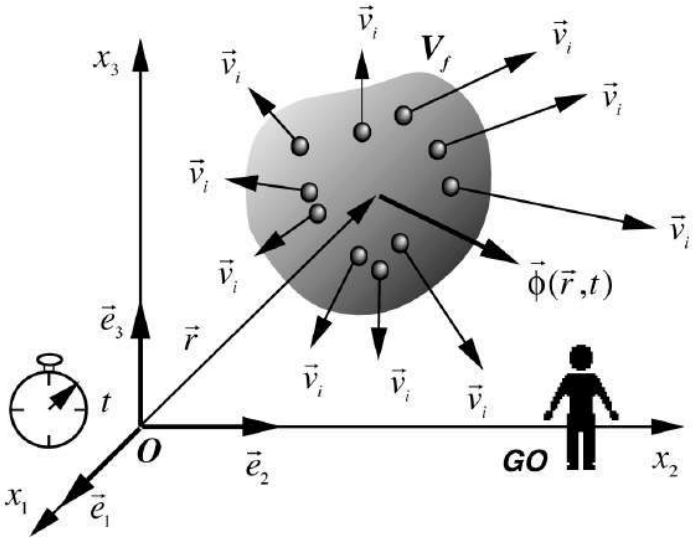


Figure 1.4 *- recherche de la vitesse locale moyenne d'un réseau sur le volume* $\boldsymbol{V_f}$

Dans un réseau solide, l'existence d'une vitesse moyenne $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ différente de zéro implique que le réseau solide de particules est soumis à un mouvement collectif. La vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ représente donc la vitesse locale moyenne de déplacement des particules liées aux sites du réseau, donc *la vitesse moyenne des sites du réseau* (figure 1.5), alors que les $\Delta\vec{v}_i$ sont des fluctuations de vitesse des particules liées au réseau autour de chacun de ces sites. Par exemple, dans un solide réelle, de telles fluctuations sont dues aux mouvements désordonnés de l'agitation thermique des particules qui sont en relation directe avec la température du milieu.

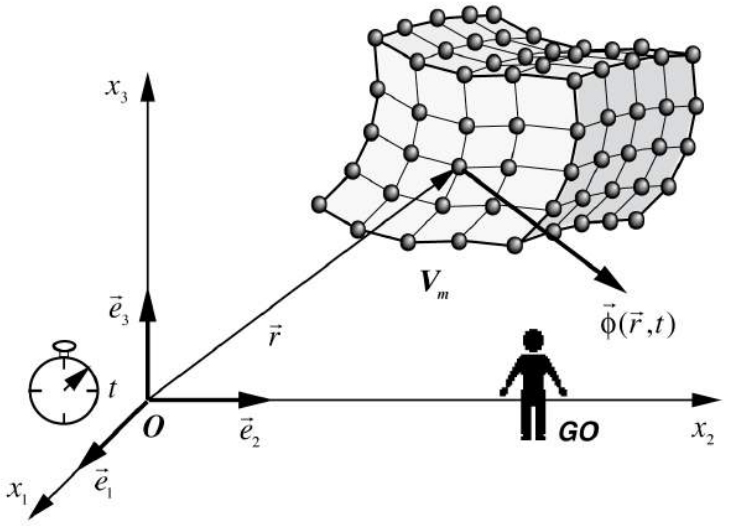


Figure 1.5 - *vitesse moyenne du mouvement collectif des sites d'un réseau solide*

La densité locale $n(\vec{r},t)$

Hormis la vitesse moyenne locale $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ des sites d'un réseau macroscopiquement continu, il est une autre grandeur qui sera appelée à jouer un rôle fondamental en coordonnées d'Euler: c'est *la densité volumique de sites substitutionnels élémentaires du réseau*, qui sera écrite avec le symbole n. Ce choix impliquera alors de définir toutes les grandeurs physiques caractérisant le réseau solide comme des *valeurs moyennes prises sur chaque site du réseau*. Il est clair aussi que, dans le cas de réseaux non ordonnés, la grandeur n peut aussi être reliée à la *densité volumique de sites élémentaires du réseau non ordonné.*

Cette densité est une grandeur locale moyenne, qui s'exprime en fonction de $\vec{r}$ et de t

$$n = n(\vec{r},t) \qquad (1.3)$$

La grandeur n doit satisfaire une *équation de continuité*. Pour exprimer cette équation, il faut considérer un volume $\boldsymbol{V_m}$ mobile à vitesse $\vec{\phi}$ avec le réseau. Le nombre total $\boldsymbol{N}$ de sites ou de noeuds de réseau contenus dans le volume $\boldsymbol{V_m}$ est donné par

$$\boldsymbol{N} = \iiint_{V_m} n\, dV \qquad (1.4)$$

Au cours du temps, ce nombre total $\boldsymbol{N}$ ne peut varier que s'il existe, au sein du volume $\boldsymbol{V_m}$, des sources de sites de réseau, puisque le volume $\boldsymbol{V_m}$ suit le milieu à vitesse $\vec{\phi}$. L'équation de continuité s'écrit donc en égalant la variation temporelle de $\boldsymbol{N}$ avec un terme de source S_n

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{V_m} n\, dV = \iiint_{V_m} S_n\, dV \qquad (1.5)$$

Dans cette relation, S_n est le terme de *source volumique de sites de réseau*, c'est-à-dire le nombre de sites de réseau créés ou annihilés par unité de volume et par unité de temps au sein du réseau considéré.

Avec les propriétés de dérivation *(A.58)* sur un volume mobile, l'expression *(1.5)* se transforme en une équation intégrale

$$\iiint_{V_m}\left[\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}\left(n\vec{\phi}\right)\right]dV=\iiint_{V_m}S_n\,dV \qquad (1.6)$$

qui doit être vraie quel que soit le volume mobile V_m choisi, de sorte que l'équation de continuité locale pour n s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t}=S_n-\operatorname{div}\left(n\vec{\phi}\right) \qquad (1.7)$$

Cette équation démontre l'existence d'un lien très étroit entre la densité $n(\vec{r},t)$ de sites du réseau et la vitesse moyenne $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ des sites de réseau. Quant à la possibilité d'existence d'une source S_n de sites de réseau, il en sera discuté ultérieurement.

La dérivé particulaire en coordonnées d'Euler

La relation *(1.7)* peut être transformée en développant l'argument de la divergence

$$\frac{\partial n}{\partial t}=S_n-n\operatorname{div}\vec{\phi}-\vec{\phi}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,n \qquad (1.8)$$

puis en utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$, défini à la section A.3

$$\frac{\partial n}{\partial t}+(\vec{\phi}\vec{\nabla})n=S_n-n\operatorname{div}\vec{\phi} \qquad (1.9)$$

Il est ici possible d'introduire un *opérateur* extrêmement important en coordonnées d'Euler, appelé la *dérivée particulaire* et représenté par l'expression en dérivés droites d/dt définie comme

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{\phi}\vec{\nabla}) \qquad (1.10)$$

Cet opérateur correspond à la dérivée temporelle de la grandeur concernée le long de la trajectoire des sites de réseau du milieu. Il consiste en fait à effectuer la dérivation totale par rapport au temps de $n(\vec{r},t)$, comme le montrent les égalités suivantes

$$\frac{dn}{dt}=\frac{\partial n}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial n}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial n}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial n}{\partial x_i}\,\phi_i=\frac{\partial n}{\partial t}+(\vec{\phi}\vec{\nabla})n \qquad (1.11)$$

Avec cet opérateur, l'équation de continuité pour n peut se présenter sous la forme d'une dérivée le long de la trajectoire

$$\frac{dn}{dt}=S_n-n\operatorname{div}\vec{\phi} \qquad (1.12)$$

L'équation de continuité pour la densité n de sites de réseau est fondamentale, car c'est sur elle que va reposer toute la description des réseaux solides en coordonnées d'Euler.

La non-commutativité des opérateurs de temps et d'espace en coordonnées d'Euler

En coordonnées d'Euler, le principal opérateur de temps, à savoir la dérivée particulaire d/dt le long de la trajectoire du milieu, ne commute en général pas avec les opérateurs d'espace, à savoir $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ et div. Cette importante propriété des opérateurs peut être vérifiée. En effet, pour un vecteur $\vec{A}$ défini au sein du milieu, il vient

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\phi}\vec{\nabla})\vec{A}\right] = \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + (\vec{\phi}\vec{\nabla})\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{\phi}\vec{\nabla}) \wedge \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\phi}\vec{\nabla})\vec{A}\right] = \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right) + \sum_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_k \wedge \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x_k} \end{cases} \qquad (1.13)$$

On en déduit la relation de commutation entre le rotationnel et la dérivé particulaire, qui peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right) = \sum_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_k \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_k} \qquad (1.14)$$

Des expressions similaires peuvent être trouvées en ce qui concerne le gradient d'un scalaire B ou la divergence d'un vecteur $\vec{A}$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{dB}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,B\right) = \sum_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_k \frac{\partial B}{\partial x_k} \qquad (1.15)$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right) = \sum_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_k \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_k} \qquad (1.16)$$

1.3 - Equations géométrocinétiques eulériennes

Une définition de l'expansion volumique d'un réseau

La densité volumique n de sites substitutionnels du réseau solide présente un lien direct avec la notion d'expansion volumique du milieu, puisque $n \to 0$ pour les expansions intenses et $n \to \infty$ pour les contractions intenses. Cette notion d'expansion du volume du réseau peut être encore mieux exprimée en introduisant une grandeur v définie comme l'inverse de n

$$v = 1/n \qquad (1.17)$$

En effet, cette grandeur v a pour dimension un volume. Elle représente le volume moyen occupé par un site du réseau solide. Ce volume v traduit bien la notion d'expansion volumique du milieu, puisque $v \to \infty$ pour les expansions intenses et $v \to 0$ pour les contractions intenses. Mais la relation *(1.12)* se transforme encore de la façon suivante

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln n + cste\right) = \frac{S_n}{n} - \mathrm{div}\,\vec{\phi} \qquad (1.18)$$

Dans cette expression, si la constante est choisie égale à $-\ln n_0$, il apparaît un scalaire τ sans dimension grâce à la relation

$$\tau = -\ln\frac{n}{n_0} = \ln\frac{v}{v_0} \qquad (1.19)$$

scalaire qui sera appelé *scalaire d'expansion volumique*, satisfaisant *l'équation géométrocinétique* suivante

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{S_n}{n} + \mathrm{div}\,\vec{\phi} \qquad (1.20)$$

et mesurant cette fois de manière parfaite la notion d'expansion volumique du réseau, puisque $\tau \to \infty$ pour les expansions intenses (lorsque $v \to \infty$), $\tau \to -\infty$ pour les contractions in-

tenses (lorsque $v \to 0$) et $\tau \to 0$ lorsque $v \to v_0$. De par la construction du scalaire τ, les constantes v_0 et n_0 introduites ici peuvent être ajustées arbitrairement pour fixer l'état d'expansion volumique nulle du réseau ($\tau = 0$).

Une définition de la rotation globale et des contorsions d'un réseau

En présence d'un champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ non homogène dans l'espace, le réseau peut présenter, en plus des expansions volumiques, des mouvements correspondant à une *rotation globale* et des *rotations locales*, impliquant des con*torsions (flexions et torsions)* dans l'espace. Pour expliciter ces comportements de rotation, il faut chercher à déterminer la vitesse angulaire locale moyenne du réseau. Pour cela, il suffit d'imaginer au sein du réseau un cercle de diamètre R centré sur le point $\boldsymbol{O'}$ de coordonnées $\vec{r}_{O'}$ et orienté perpendiculairement à l'axe $\boldsymbol{O}x_k$ comme le montre la figure 1.6. La *vitesse tangentielle moyenne* $\langle\phi\rangle$ le long de ce cercle s'écrit

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\boldsymbol{C}} \vec{\phi}\, d\vec{r} \qquad (1.21)$$

Si le milieu effectue au point $\boldsymbol{O'}$ une rotation locale (ou globale) autour de l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, la vitesse tangentielle moyenne $\langle\phi\rangle$ ainsi calculée sera différente de zéro. La *vitesse angulaire moyenne* $\langle\dot{\theta}_k\rangle$ du réseau au point $\boldsymbol{O'}$, autour de l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, s'obtient très simplement en divisant la vitesse tangentielle moyenne $\langle\phi\rangle$ sur le cercle par le rayon R de ce cercle

$$\langle\dot{\theta}_k\rangle = \frac{\langle\phi\rangle}{R} = \frac{1}{2\pi R^2}\oint_{\boldsymbol{C}} \vec{\phi}\, d\vec{r} \qquad (1.22)$$

Dans cette expression de $\langle\dot{\theta}_k\rangle$, le théorème du rotationnel *(A.38)* permet de transformer l'intégrale sur le contour circulaire $\boldsymbol{C}$ en une intégrale sur la surface $\boldsymbol{S}$ du cercle

$$\langle\dot{\theta}_k\rangle = \frac{1}{2\pi R^2}\iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\, d\vec{S}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi R^2}\iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\, dS_k\right)\vec{e}_k \qquad (1.23)$$

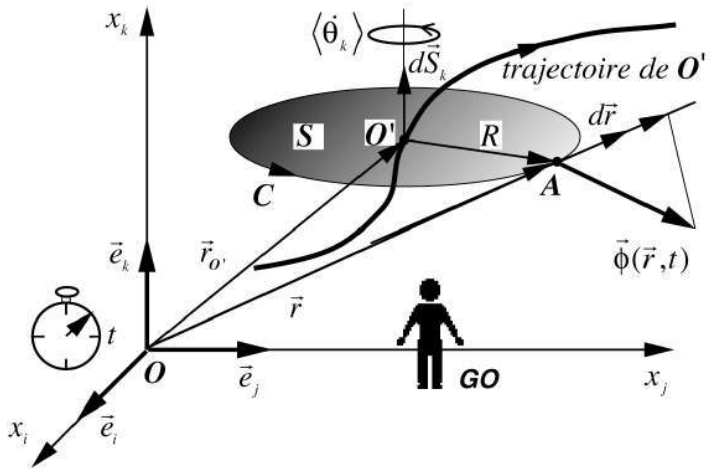


Figure 1.6 *- mesure de la vitesse angulaire de rotation locale du réseau*

L'expression entre parenthèse n'est rien d'autre que la valeur moyenne de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}$ sur le disque de rayon R, de sorte que, en passant à la limite $R \to 0$, il apparaît la *vitesse angulaire locale*

$\dot{\theta}_k$ du réseau autour de l'axe $\boldsymbol{O}x_k$ à la coordonnée $\vec{r}$ de l'espace

$$\dot{\theta}_k = \frac{1}{2}\vec{e}_k \lim_{R\to 0}\left(\frac{1}{\pi R^2}\iint_s \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\, dS_k \right) = \frac{1}{2}\vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (1.24)$$

Le *vecteur de vitesse angulaire locale* $\dot{\vec{\theta}}$ du milieu s'en déduit simplement

$$\dot{\vec{\theta}} = \sum_k \dot{\theta}_k \vec{e}_k = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (1.25)$$

Ce vecteur $\dot{\vec{\theta}}$ permet d'introduire la notion de *vecteur de rotation* $\vec{\omega}$. Le long de la trajectoire du réseau, la variation locale $d\vec{\omega}$ de l'angle de rotation est donnée par $d\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}dt$, de sorte qu'il est possible d'écrire une *équation géométrocinétique* similaire à l'expression *(1.20)* du scalaire d'expansion volumique, faisant intervenir la dérivée particulaire du vecteur de rotation $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\theta}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (1.26)$$

Il est intéressant de constater ici que la variation du scalaire d'expansion volumique τ est associée à l'existence d'une partie divergente du champ de vitesse $\vec{\phi}$ *(1.20)*, alors que la variation du vecteur de rotation $\vec{\omega}$ est une conséquence de l'existence d'une partie rotationnelle de ce même champ *(1.26)*.

1.4 - Tenseurs eulériens de distorsion

En présence d'un champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ non homogène dans l'espace, un réseau peut présenter, en plus d'une *translation globale* et d'une *rotation globale*, des mouvements correspondant à des *rotations locales (torsions)* et à divers types de *déformations*, comme l'*expansion volumique* et le *cisaillement*.

Pour expliciter en détail ces comportements de rotation et de déformation, que seront appelés de façon générique des *distorsions* du réseau, il faut décrire précisément les variations spatiales de chacune des composantes du champ de vitesse, et les relier à la variation temporelle d'une grandeur topologique devant traduire les distorsions du réseau. Une façon élégante de procéder est de constater que le scalaire d'expansion volumique τ et le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ définis précédemment satisfont des équations géométrocinétiques qui correspondent en fait à *la trace* et à *la partie antisymétrique* d'une équation géométrocinétique plus générale basée sur un *tenseur d'ordre deux* β_{ij} *, gradient du champ vectoriel de vitesse* $\vec{\phi}$.

La notation vectorielle et les propriétés de décomposition des tenseurs d'ordre deux

Par commodité, les tenseurs d'ordre deux, comme le tenseur gradient β_{ij}, peuvent être représentés sous la forme de *champs de trois vecteurs*. Pour cela, il suffit d'écrire que

$$\begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vec{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \qquad (1.27)$$

Nous verrons que cette *représentation vectorielle des champs tensoriels* est extrêmement puissante et simplifie considérablement l'interprétation physique des champs tensoriels.

A partir du tenseur eulérien général $\vec{\beta}_i$ des distorsions, on peut espérer décrire vectoriellement les déformations et les rotations du réseau et surtout en extraire l'information concernant les différents types de déformation auxquels on a à faire. La seule solution pour cela est d'utiliser les propriétés mathématiques du tenseur $\vec{\beta}_i$, telles que la possibilité de le symétriser et d'en calculer sa trace. C'est ce que nous allons faire en détail dans cette section, et de manière tout à fait générale, en oubliant que le tenseur $\vec{\beta}_i$ est déduit du champ de vitesse par une équation géométrocinétique.

L'opération de *transposition d'un tenseur* correspond à échanger les termes situés symétriquement de part et d'autre de la diagonale. Dans la notation vectorielle des tenseurs, cette opération se transcrit de manière très simple

$$\vec{\beta}_i = \sum_k \beta_{ik}\,\vec{e}_k \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} = \sum_k \beta_{ki}\,\vec{e}_k = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{\beta}_k\vec{e}_i\right) \tag{1.28}$$

Grâce aux propriétés *(A.24)*, l'opération de transposition peut aussi s'écrire

$$\left[\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{e}_i\vec{\beta}_k\right) = \vec{\beta}_i + \vec{e}_i \wedge \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k\right) \tag{1.29}$$

Cette formulation de la transposition correspond en fait à retrancher du tenseur à transposer le double de sa partie antisymétrique. Ainsi, dans la notation vectorielle, *la partie antisymétrique du tenseur* β_{ij} peut être construite sous la forme d'un vecteur $\vec{\omega}$ en écrivant

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k \tag{1.30}$$

On peut vérifier que ce vecteur $\vec{\omega}$ représente bien la partie antisymétrique du tenseur β_{ij} exprimée sous la forme d'un vecteur car, en composantes, $\vec{\omega}$ s'écrit de la manière suivante en utilisant la permutation circulaire sur les indices ijk

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = \sum_k \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} - \beta_{ji}\right)\vec{e}_k \tag{1.31}$$

Pour fabriquer *la partie symétrique du tenseur* $\vec{\beta}_i$, il suffit d'écrire

$$\left[\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left\{\vec{\beta}_i + \left[\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}}\right\} = \vec{\beta}_i + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k\right) \tag{1.32}$$

En appelant $\vec{\varepsilon}_i$ la partie symétrique de $\vec{\beta}_i$, et en utilisant la relation *(1.31)*, il vient

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} \tag{1.33}$$

La permutation cyclique sur les indices ijk pour exprimer cette relation en composantes montre que le tenseur $\vec{\varepsilon}_i$ représente bien la partie symétrique de β_{ij}

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} = \beta_{ii}\vec{e}_i + \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} + \beta_{ji}\right)\vec{e}_j + \frac{1}{2}\left(\beta_{ik} + \beta_{ki}\right)\vec{e}_k \tag{1.34}$$

La trace τ *des tenseurs* $\vec{\beta}_i$ *et* $\vec{\varepsilon}_i$ est définie comme la somme de leurs éléments diagonaux

$$\tau = \sum_k \vec{e}_k\vec{\beta}_k = \sum_k \beta_{kk} = \sum_k \varepsilon_{kk} = \sum_k \vec{e}_k\vec{\varepsilon}_k \tag{1.35}$$

Le tenseur $\vec{\alpha}_i$ obtenu en soustrayant la trace de la partie symétrique $\vec{\varepsilon}_i$ est appelé *la partie symétrique transverse du tenseur* β_{ij}

$$\vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i \tag{1.36}$$

Il possède par définition une trace identiquement nulle

$$\mathrm{trace}\left(\vec{\alpha}_i\right) = \sum_k \vec{e}_k \vec{\alpha}_k = \sum_k \alpha_{kk} \equiv 0 \qquad (1.37)$$

De par la définition de l'opération de transposition, il est clair que la transposition d'un tenseur symétrique ne change pas ce tenseur. Dans le cas du tenseur symétrique $\vec{\varepsilon}_i$, cela signifie que

$$\vec{\varepsilon}_i = \left[\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon}_i = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{e}_i \vec{\varepsilon}_k\right) = \vec{\varepsilon}_i + \vec{e}_i \wedge \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\varepsilon}_k\right) \qquad (1.38)$$

On en déduit que la symétrie des tenseurs $\vec{\varepsilon}_i$ et $\vec{\alpha}_i$ implique les propriétés suivantes

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{e}_i \vec{\varepsilon}_k\right) \quad et \quad \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\varepsilon}_k \equiv 0 \qquad (1.39)$$

$$\vec{\alpha}_i = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{e}_i \vec{\alpha}_k\right) \quad et \quad \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\alpha}_k \equiv 0 \qquad (1.40)$$

Les tenseurs eulériens de distorsion, de déformation et de cisaillement

En utilisant la notation vectorielle des tenseurs d'ordre deux, un *tenseur de distorsion* $\vec{\beta}_i$ peut donc être introduit en écrivant l'équation géométrocinétique suivante

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i \qquad (1.41)$$

Sa trace donne alors l'équation géométrocinétique pour l'*expansion volumique* τ (fig. 1.7)

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{S_n}{n} + \mathrm{div}\,\vec{\phi} \qquad (1.42)$$

et sa partie antisymétrique représente l'équation géométrocinétique pour le *vecteur de rotation* $\vec{\omega}$ (fig. 1.7)

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (1.43)$$

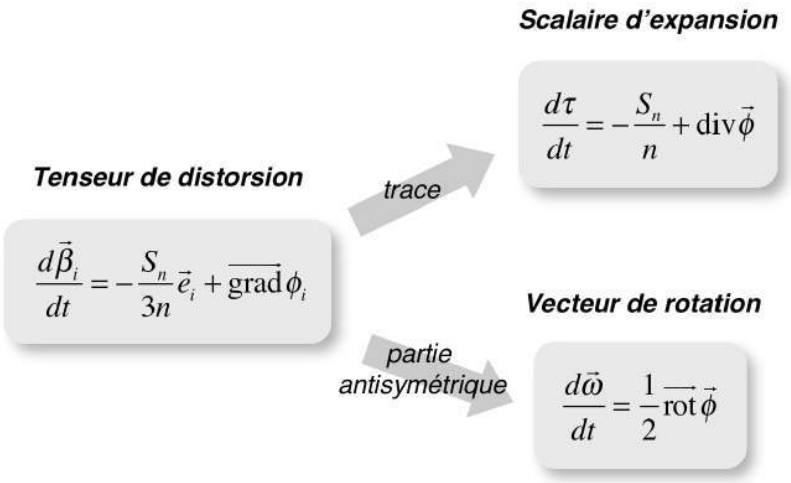


Figure 1.7 *- trace et antisymétrie de l'équation géométrocinétique*

Sur la base des décompositions d'un tenseur d'ordre deux décrites à la section précédente, il est possible maintenant de définir de manière générale un tenseur $\vec{\varepsilon}_i$ représentant la partie

symétrique du tenseur $\vec{\beta}_i$. Il est appelé le *tenseur de déformation* $\vec{\varepsilon}_i$, puisque ce tenseur est égal au tenseur de distorsion auquel la partie correspondant aux rotations globales et locales est retirée. Il satisfait l'équation géométrocinétique suivante

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} \qquad (1.44)$$

Finalement, il est possible aussi de définir un tenseur $\vec{\alpha}_i$ correspondant à *la partie symétrique transverse* du tenseur $\vec{\beta}_i$. Comme ce tenseur est obtenu à partir du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ auquel sa trace τ représentant les expansions volumiques est soustraite, il sera appelé le *tenseur de cisaillement* $\vec{\alpha}_i$. Il satisfait l'équation géométrocinétique

$$\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} - \frac{1}{3}\vec{e}_i\,\text{div}\vec{\phi} \qquad (1.45)$$

La décomposition complète du tenseur de distorsion suit le schéma représenté à la figure 1.8, faisant apparaître les parties symétrique et antisymétrique, la trace et la partie symétrique transverse du tenseur.

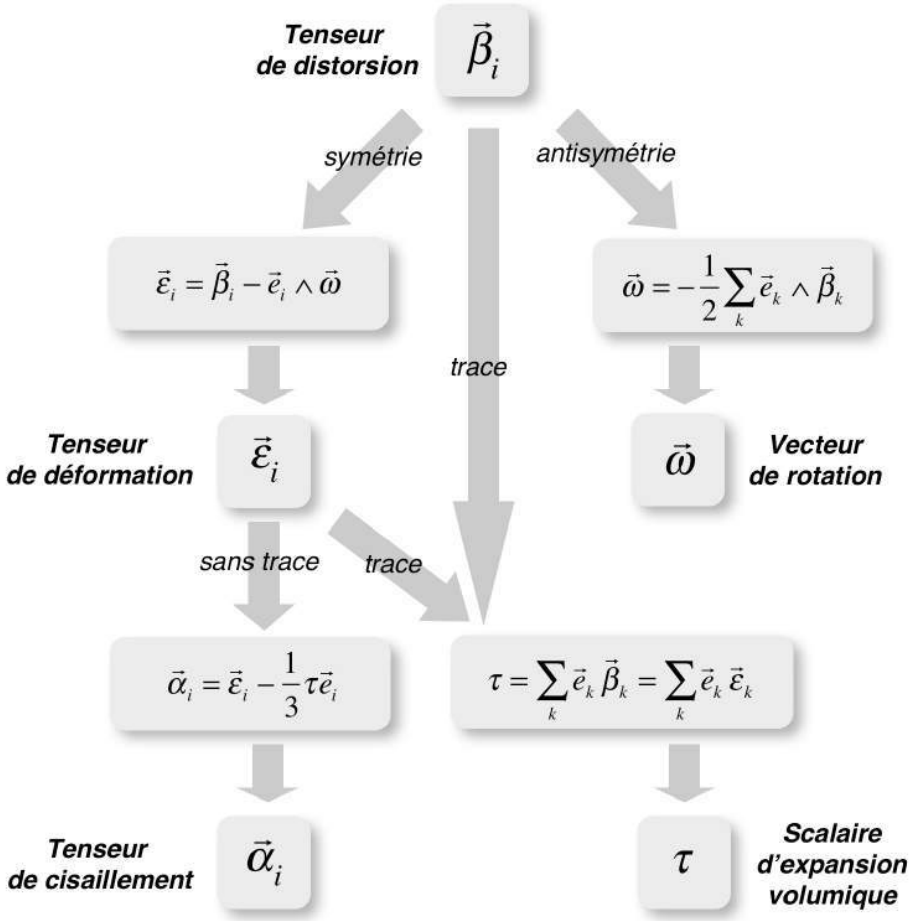


Figure 1.8 *- décomposition du tenseur eulérien de distorsion*

L'ensemble des équations importantes obtenues dans ce chapitre est reporté dans le tableau 1.1. Par des exemples traités dans la suite de ce chapitre, il sera montré l'adéquation de ce sys-

tème d'équations galiléennes fondamentales pour décrire la géométrocinétique des distorsions topologiques de n'importe quel réseau solide en coordonnées d'Euler.

Tableau 1.1 - Géométrocinétique des distorsions d'un réseau en coordonnées d'Euler

Définition de l'expansion volumique

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S_n - \mathrm{div}\left(n\vec{\phi}\right) \quad (1) \qquad \Rightarrow \qquad \tau = -\ln\frac{n}{n_0} = \ln\frac{v}{v_0} \quad (2) \qquad \Rightarrow$$

Géométrocinétique des distorsions

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} = -\dfrac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i & (3) \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} & (4) \\ \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{S_n}{n} + \mathrm{div}\vec{\phi} & (5) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k & (6) \\ \tau = \sum_k \vec{e}_k\,\vec{\beta}_k = \sum_k \vec{e}_k\,\vec{\varepsilon}_k & (7) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} & (8) \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau\vec{e}_i & (9) \end{cases}$$

1.5 - Exemples de champs de vitesse et de distorsion

Par quelques exemples simples de champs de vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ propres à divers mouvements connus du réseau, ce paragraphe va permettre de montrer que les tenseurs topologiques β_{ij}, ε_{ij}, α_{ij}, $\vec{\omega}$ et τ décrivent parfaitement les distorsions, les déformations, les cisaillements, les rotations et les expansions volumiques pouvant apparaître au sein d'un réseau, y compris dans le cas de distorsions très importantes de par le fait que tous ces tenseurs tendent vers des valeurs infinies lorsque les distorsions deviennent très importantes !

La translation globale

Soit un champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ conduisant à une translation globale du milieu dans la direction $\vec{a}$, où $\vec{a}$ est un vecteur constant

$$\vec{\phi}(\vec{r},t) = \vec{a}\,g(t) \qquad (1.46)$$

A l'aide des équations géométrocinétiques, un tel champ de vitesse conduit aux dérivées particulaires suivantes

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = 0 \qquad (1.47)$$

qui montrent que tous les tenseurs topologiques restent constants le long de la trajectoire du milieu lors d'une translation globale du milieu dans l'espace.

La figure 1.9(a) représente un champ de vitesse de translation globale du milieu, dans le cas où la direction $\vec{a}$ de translation est contenue dans le plan des vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. La figure 1.9(b) montre l'évolution temporelle entre deux instants différents ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet de ce champ de vitesse.

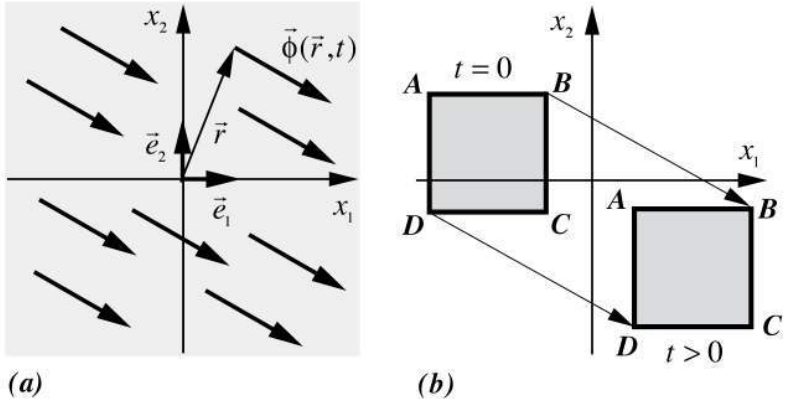


Figure 1.9 *- translation globale*

La rotation globale

Soit le champ de vitesse suivant

$$\vec{\phi}(\vec{r},t) = \dot{\vec{\theta}}(t) \wedge \vec{r} \quad \text{avec} \quad \dot{\vec{\theta}}(t) = \vec{a}\, g(t) \tag{1.48}$$

où $\vec{a}$ est un vecteur constant. Ce champ s'exprime en composantes comme

$$\vec{\phi}(\vec{r},t) = \left[\left(a_2 x_3 - a_3 x_2\right)\vec{e}_1 + \left(a_3 x_1 - a_1 x_3\right)\vec{e}_2 + \left(a_1 x_2 - a_2 x_1\right)\vec{e}_3 \right] g(t) \tag{1.49}$$

Un tel champ de vitesse correspond à une rotation globale du milieu autour de l'axe du vecteur $\vec{a}$. Les équations géométrocinétiques permettent de déduire que

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = 0 \tag{1.50}$$

et que, par conséquent, le tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$, le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ et le scalaire d'expansion volumique τ n'évoluent pas le long de la trajectoire du milieu en cas de rotation globale de celui-ci autour d'un axe. L'évolution temporelle de $\vec{\omega}$ se calcule

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\dot{\vec{\theta}}(t) \wedge \vec{r}\right) = \dot{\vec{\theta}}(t) \tag{1.51}$$

et sa variation temporelle le long de la trajectoire est bien égale à la vitesse angulaire $\dot{\vec{\theta}}(t)$, comme déduit à la section 1.3.

Il est dès lors possible de déduire l'évolution du tenseur β_{ij} le long de la trajectoire du milieu, et il apparaît évidemment qu'en ce cas de rotation globale le tenseur β_{ij} est purement antisymétrique

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{e}_i \wedge \dot{\vec{\theta}}(t) \tag{1.52}$$

La figure 1.10(a) présente le champ de vitesse associé à une rotation globale du milieu, dans le cas où la direction $\vec{a}$ de l'axe de rotation est parallèle au vecteur de base $\vec{e}_3$. La figure 1.10(b)

montre l'évolution spatio-temporelle entre deux instants différents ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet d'un tel champ de vitesse.

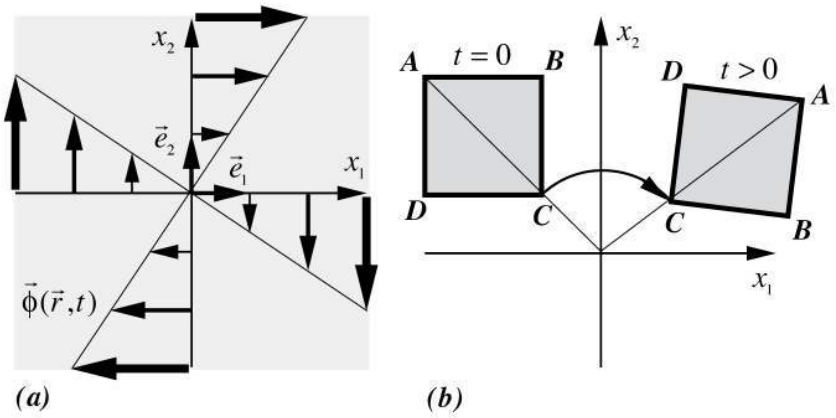


Figure 1.10 *- rotation globale*

Les allongements et l'expansion volumique

Soit le champ de vitesse associé à des dilatations ou des rétractations homogènes selon les directions des trois axes de coordonnées

$$\vec{\phi}(\vec{r},t) = \left[a_1 x_1 \vec{e}_1 + a_2 x_2 \vec{e}_2 + a_3 x_3 \vec{e}_3\right] g(t) \qquad (1.53)$$

où les a_i sont des constantes.

Avec un tel champ de vitesse, le milieu s'allonge ou se rétrécit selon les trois axes de coordonnées, suivant le signe des constantes a_i. Les équations géométrocinétiques permettent de déduire β_{ij} et ε_{ij} le long de la trajectoire

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = a_i g(t) \vec{e}_i \qquad (1.54)$$

Les tenseurs $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\varepsilon}_i$ sont symétriques et ne possèdent que les composantes de la trace. Il est donc aisé de calculer l'évolution de τ, traduisant l'expansion ou la contraction volumique du milieu le long de la trajectoire des points du milieu

$$\frac{d\tau}{dt} = (a_1 + a_2 + a_3) g(t) \qquad (1.55)$$

D'autre part, il est clair qu'à ce type de déformation par dilatation selon les axes n'est associée aucune rotation locale au sein du milieu, et cela apparaît logiquement au niveau du vecteur $\vec{\omega}$ qui conserve sa valeur initiale tout au long de la trajectoire, puisque

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \qquad (1.56)$$

Quant au tenseur $\vec{\alpha}_i$, il ne possède que des éléments diagonaux, qui prennent aussi une valeur non nulle dans ce cas, puisqu'il vient, le long de la trajectoire des particules du milieu

$$\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = \left[a_i - \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\right] g(t) \vec{e}_i \qquad (1.57)$$

A partir de $\tau(t)$, les grandeurs $n(t)$ et $v(t)$ sont déduites par les relations

$$n(t) = n_0\, e^{-\tau(t)} \quad \text{et} \quad v(t) = v_0\, e^{\tau(t)} \tag{1.58}$$

Le scalaire τ peut aussi s'exprimer en fonction des trajectoires $X_i(t)$ de trois points situés initialement en $X_i^{\,0}$ (figure 1.11) sur les trois axes de coordonnées. Pour cela, il faut écrire

$$\tau = -\ln\frac{n(t)}{n_0} = \ln\frac{v(t)}{v_0} = \ln\left(1+\frac{\Delta v(t)}{v_0}\right) \tag{1.59}$$

d'où, comme les volumes $v(t)$ et v_0 sont directement proportionnels à $\prod X_i(t)$ et $\prod X_i^{\,0}$

$$\tau = \ln\left(\prod_i \frac{X_i(t)}{X_i^{\,0}}\right) = \sum_i \ln\frac{X_i(t)}{X_i^{\,0}} = \sum_i \ln\left(1+\frac{\Delta X_i(t)}{X_i^{\,0}}\right) \tag{1.60}$$

En utilisant $\tau = \Sigma\beta_{ii} = \Sigma\varepsilon_{ii}$, il est possible d'exprimer aussi directement β_{ii} et ε_{ii}

$$\beta_{ii} = \varepsilon_{ii} = \ln\frac{X_i(t)}{X_i^{\,0}} = \ln\left(1+\frac{\Delta X_i(t)}{X_i^{\,0}}\right) \tag{1.61}$$

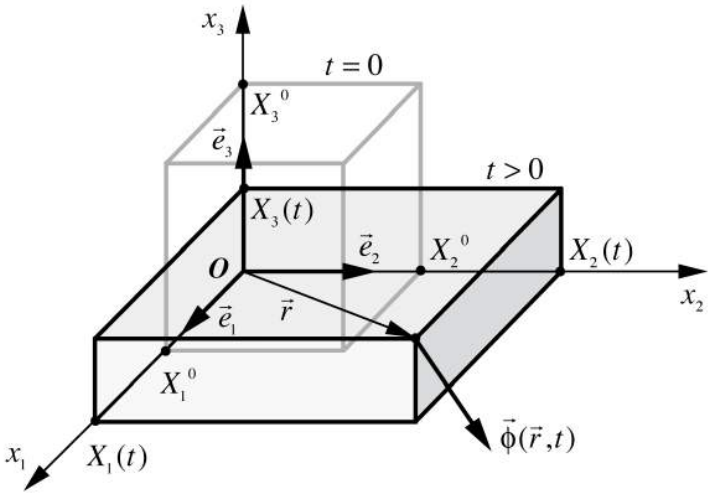


Figure 1.11 *- allongements selon les axes de coordonnées*

Les éléments diagonaux β_{ii} et ε_{ii} mesurent par conséquent les allongements ou les rétrécissements dans les trois directions de l'espace, par dilatation ou contraction des longueurs selon les trois axes de coordonnées, alors que la trace τ mesure la variation de volume du milieu par expansion ou contraction volumique.

A noter que si les déformations par dilatation ou par contraction sont faibles, le scalaire d'expansion volumique τ peut s'approximer en développant le logarithme

$$\tau \cong \frac{\Delta v(t)}{v_0} \quad \text{si} \quad |\Delta v(t)| << v_0 \tag{1.62}$$

de même que les éléments diagonaux des tenseurs de distorsion et de déformation par les expressions

$$\beta_{ii} = \varepsilon_{ii} \cong \frac{\Delta X_i(t)}{X_i^{\,0}} \quad \text{si} \quad |\Delta X_i(t)| << X_i^{\,0} \tag{1.63}$$

Une autre remarque importante peut être faite concernant les comportements asymptotiques des tenseurs topologiques, à savoir que les grandeurs τ, β_{ii} et ε_{ii} tendent toutes vers $\pm\infty$ lorsque les contractions ou les expansions deviennent très intenses

$$\tau, \beta_{ii}, \varepsilon_{ii} \to +\infty \quad \text{si} \quad \Delta X_i \to +\infty \tag{1.64}$$

$$\tau, \beta_{ii}, \varepsilon_{ii} \to -\infty \quad \text{si} \quad \Delta X_i \to -X_i^{\,0} \tag{1.65}$$

Deux cas extrêmes d'évolution spatio-temporelle des allongements selon les axes de coordonnées peuvent maintenant être considérés:

- *le cas de l'expansion ou de la contraction volumique homogène isotrope du milieu dans l'espace*, c'est-à-dire le cas où les trois constantes a_i sont égales ($a_1 = a_2 = a_3$). Il vient

$$\frac{d\tau}{dt} = 3a_i g(t) \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \tag{1.66}$$

La figure 1.12(a) présente la coupe d'un tel champ de vitesse dans le plan des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. La figure 1.12(b) montre l'évolution entre deux instants ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet de ce champ. L'effet d'expansion volumique du milieu peut y être observé, sans qu'il n'apparaisse de cisaillements du milieu.

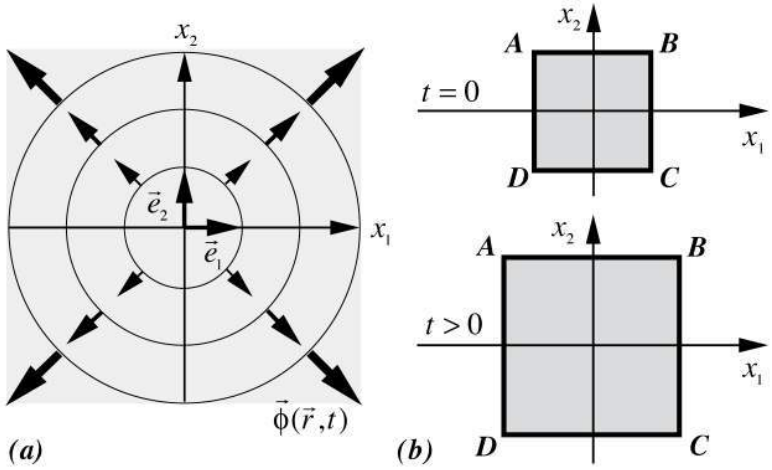


Figure 1.12 *- allongements à expansion volumique non nulle*

- *le cas des allongements et rétrécissements dans les trois directions de l'espace, tels que l'expansion volumique τ du milieu soit nulle*, c'est-à-dire lorsque la somme des constantes a_i est nulle ($a_1 + a_2 + a_3 = 0$). Il vient alors

$$\frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = a_i g(t)\vec{e}_i \tag{1.67}$$

La figure 1.13(a) présente dans le plan des vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ la coupe d'un champ de vitesse de ce type, avec $a_1 = -a_2 = a$ et $a_3 = 0$.

La figure 1.13(b) montre alors l'évolution spatio-temporelle entre deux instants différents ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet de ce champ. L'absence d'expansion volumique du milieu y apparaît clairement, mais surtout la présence de forts cisaillements du milieu, puisque

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_1}{dt} = ag(t)\vec{e}_1 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_2}{dt} = -ag(t)\vec{e}_2 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_3}{dt} = 0 \tag{1.68}$$

En fait, la différence essentielle entre ce dernier cas, où les dilatations et les rétractations sont différentes suivant les trois directions de l'espace, et le cas précédent de l'expansion volumique isotrope du milieu, est précisément liée à l'existence de cisaillements du milieu, alors qu'aucun

cisaillement ne peut apparaître dans le cas de l'expansion volumique isotrope. Il faut donc en conclure que les composantes diagonales du tenseur $\vec{\alpha}_i$ mesurent les cisaillements associés à une expansion volumique homogène non isotrope du milieu.

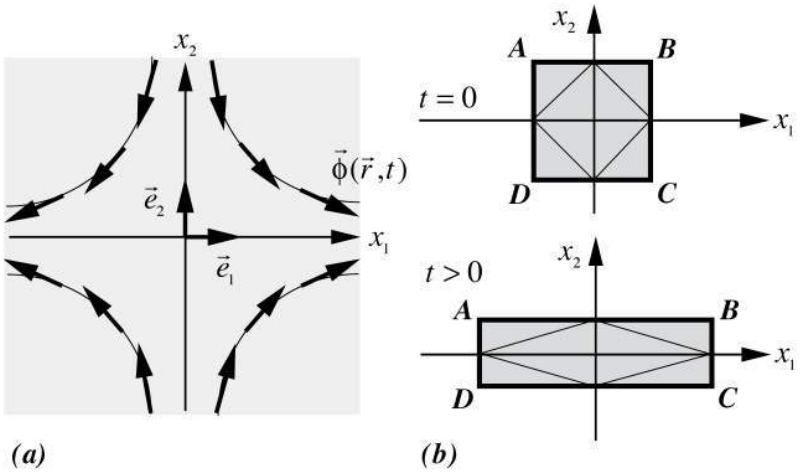


Figure 1.13 *- allongements à expansion volumique nulle*

En fait, la différence essentielle entre ce dernier cas, où les dilatations et les rétractations sont différentes suivant les trois directions de l'espace, et le cas précédent de l'expansion volumique isotrope du milieu, est précisément liée à l'existence de cisaillements du milieu, alors qu'aucun cisaillement ne peut apparaître dans le cas de l'expansion volumique isotrope. Il faut donc en conclure que les composantes diagonales du tenseur $\vec{\alpha}_i$ mesurent les cisaillements associés à une expansion volumique homogène non isotrope du milieu.

Les cisaillements et les rotations locales, ou torsions

Soit le champ de vitesse suivant au sein du milieu

$$\vec{\phi}(\vec{r},t)=\left[\left(ax_2+bx_3\right)\vec{e}_1+\left(cx_1+dx_3\right)\vec{e}_2+\left(ex_1+fx_2\right)\vec{e}_3\right]g(t) \qquad (1.69)$$

où a,b,c,d,e,f sont des constantes.
Avec un tel champ de vitesse, l'équation géométrocinétique pour le tenseur β_{ij} permet de déduire l'évolution des composantes β_{ij} le long de la trajectoire du milieu

$$\left(\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}\right)=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ c & 0 & d\\ e & f & 0\end{pmatrix}g(t) \qquad (1.70)$$

Il apparaît clairement que la trace du tenseur de distorsion ne peut pas changer, de sorte que l'expansion volumique τ reste toujours constante

$$\frac{d\tau}{dt}=0 \qquad (1.71)$$

Quant aux équations géométrocinétiques que satisfont le vecteur de rotation et les tenseurs de déformation et de cisaillement, elles s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{1}{2}\left[(f-d)\vec{e}_1 + (b-e)\vec{e}_2 + (c-a)\vec{e}_3\right] g(t) \\ \left(\dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right) = \left(\dfrac{d\alpha_{ij}}{dt}\right) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a+c & b+e \\ a+c & 0 & d+f \\ b+e & d+f & 0 \end{pmatrix} g(t) \end{cases} \qquad (1.72)$$

La figure 1.14(a) présente un tel champ de vitesse, dans le cas où seule la constante a est différente de zéro ($a \neq 0$ et $b = c = d = e = f = 0$).

L'évolution spatio-temporelle entre deux instants ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet de ce champ est représentée à la figure 1.14(b). La présence d'un cisaillement du milieu y est observée, et il apparaît aussi une *rotation locale,* qu'on appellera *torsion,* du milieu puisqu'en ce cas

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{a}{2} g(t)\vec{e}_3 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_1}{dt} = \frac{a}{2} g(t)\vec{e}_2 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_2}{dt} = \frac{a}{2} g(t)\vec{e}_1 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_3}{dt} = 0 \qquad (1.73)$$

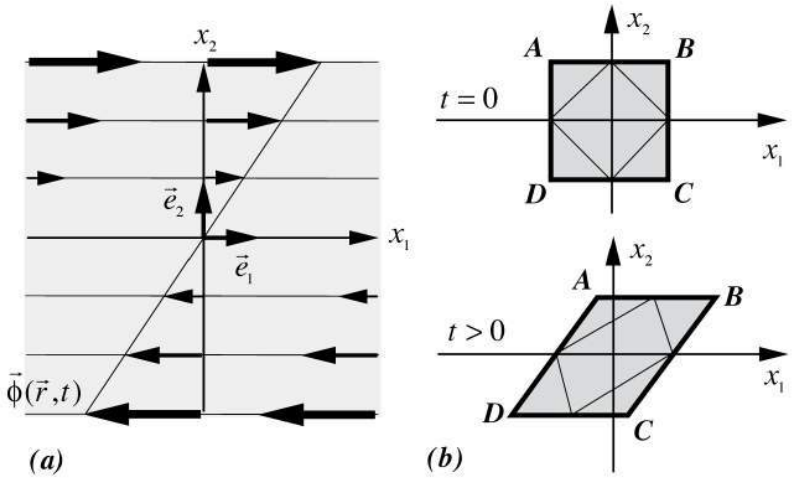


Figure 1.14 *- cisaillements*

De la même manière que dans le cas des allongements, il est possible de donner une interprétation topologique aux composantes du tenseur de cisaillement en utilisant l'exemple de distorsion reporté à la figure 1.14.

En ce cas, le champ de vitesse est parallèle à $\vec{e}_1$ et vaut

$$\vec{\phi}(\vec{r},t) = a x_2 g(t)\vec{e}_1 \qquad (1.74)$$

Le déplacement $X_1(x_2,t)$ le long de l'axe de $\vec{e}_1$ d'un point A situé à la coordonnée $x_2 \neq 0$ (figure 1.15) peut se calculer. Il vient pour $X_1(x_2,t)$

$$X_1(x_2,t) = a x_2 \int_0^t g(t)dt \qquad (1.75)$$

On en déduit l'évolution temporelle de la tangente de l'angle de cisaillement $\psi(t)$ reporté à la figure 1.15

$$\mathrm{tg}\,\psi(t) = \frac{X_1(x_2,t)}{x_2} = a\int_0^t g(t)dt \qquad (1.76)$$

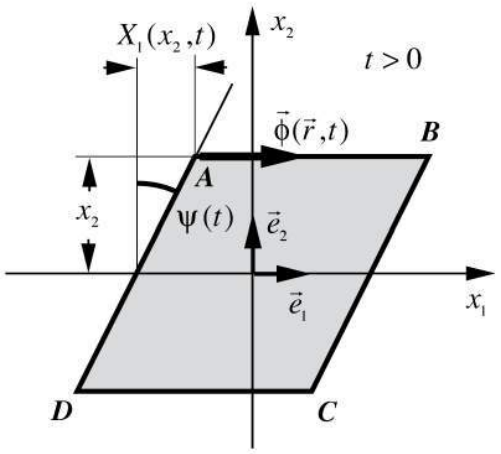


Figure 1.15 *- relation avec la tangente de l'angle de cisaillement*

L'évolution du vecteur de rotation et l'évolution du tenseur de cisaillement le long de la trajectoire peuvent alors se relier à la valeur de $\mathrm{tg}\,\psi(t)$

$$\vec{\omega} = -\frac{a}{2}\vec{e}_3 \int_0^t g(t)\,dt = -\frac{1}{2}\vec{e}_3\,\mathrm{tg}\,\psi(t) \qquad (1.77)$$

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{a}{2}\vec{e}_2 \int_0^t g(t)\,dt = \frac{1}{2}\vec{e}_2\,\mathrm{tg}\,\psi(t) \qquad (1.78)$$

$$\vec{\alpha}_2 = \frac{a}{2}\vec{e}_1 \int_0^t g(t)\,dt = \frac{1}{2}\vec{e}_1\,\mathrm{tg}\,\psi(t) \qquad (1.79)$$

Le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ et le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ mesurent donc directement en ce cas la moitié de la tangente de l'angle de cisaillement $\psi(t)$.

Il est possible de considérer maintenant deux cas extrêmes d'évolution spatio-temporelle dans le cas de cisaillements et rotations:

- *le cas où le tenseur β_{ij} est parfaitement antisymétrique*, c'est-à-dire lorsque $c=-a$, $e=-b$ et $f=-d$

$$\left(\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{pmatrix} g(t) \qquad (1.80)$$

En ce cas, le tenseur β_{ij} est entièrement représentable par un vecteur de rotation $\vec{\omega}$ et la rotation globale du milieu correspond à celle déjà décrite précédemment, avec

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\theta}}(t) = \left(-d\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - a\vec{e}_3\right) g(t) \qquad (1.81)$$

- *le cas où le tenseur β_{ij} est parfaitement symétrique*, c'est-à-dire lorsque $c=a$, $e=b$ et $f=d$. En ce cas, les trois tenseurs β_{ij}, ε_{ij} et α_{ij} sont égaux et la variation de leurs composantes le long de la trajectoire s'écrit

$$\left(\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right)=\left(\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right)=\left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt}\right)=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & d\\ b & d & 0\end{pmatrix}g(t) \qquad (1.82)$$

Comme le scalaire d'expansion volumique τ et le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ n'évoluent pas le long de la trajectoire

$$\frac{d\tau}{dt}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt}=0 \qquad (1.83)$$

le milieu ne présente ni expansion volumique, ni rotation globale ou locale. Par conséquent, seuls des cisaillements purs du milieu peuvent apparaître.

C'est ce qui est montré par l'exemple particulier de la figure 1.16(a), dans laquelle est représentée, dans le plan des vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, la coupe d'un champ de vitesse de ce type, avec $a \neq b$ et $b = c = 0$.

La figure 1.16(b) montre l'évolution spatio-temporelle entre deux instants différents ($t = 0$ et $t > 0$) d'une portion du milieu initialement carrée sous l'effet de ce champ de vitesse. La présence d'un cisaillement pur du milieu, sans rotation, y est bien observée

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=0 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_1}{dt}=ag(t)\vec{e}_2 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_2}{dt}=ag(t)\vec{e}_1 \quad ; \quad \frac{d\vec{\alpha}_3}{dt}=0 \qquad (1.84)$$

Ce cisaillement est absolument identique à celui reporté à la figure 1.14(b), si une rotation de 45° du système de coordonnées est effectuée, ce qui conduit évidemment à des expressions très similaires des tenseurs de cisaillement dans ces deux cas:

$$\left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt}\right)=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}g(t) \ \textit{(fig. 1.14)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt}\right)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}g(t) \ \textit{(fig. 1.16)} \qquad (1.85)$$

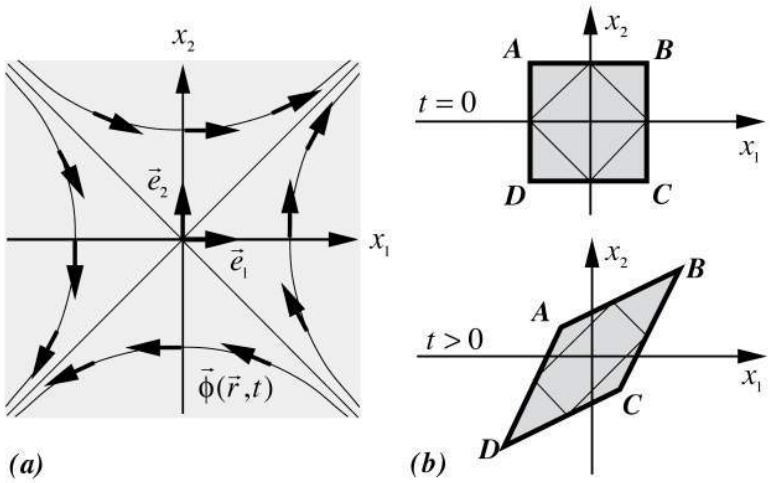


Figure 1.16 *- cisaillements*

Des exemples de distorsions non-uniformes

A titre d'exemple, il est possible de calculer les tenseurs de distorsion en présence de champs

de vitesse conduisant à des distorsions non-uniformes du milieu. Soit tout d'abord le champ de vitesse de la figure 1.17(a), *de symétrie cylindrique,*

$$\vec{\phi}(\vec{r},t)=\left[r\vec{e}_3\wedge\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2\right)\right]g(t)=r\left(x_1\vec{e}_2-x_2\vec{e}_1\right)g(t)\quad\text{avec}\quad r=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2} \tag{1.86}$$

Ce champ de vitesse implique clairement une rotation du milieu autour du centre du système de coordonnées. Le tenseur β_{ij} est déduit de l'équation géométrocinétique suivante

$$\left(\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right)=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-x_1x_2 & -\left(r^2+x_2{}^2\right) & 0\\ +\left(r^2+x_1{}^2\right) & x_1x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}g(t) \tag{1.87}$$

Il s'agit là d'une rotation non-uniforme, donc locale, puisque $\vec{\omega}$ dépend du rayon r, et d'une évolution sans expansion volumique τ le long de la trajectoire

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{3r}{2}g(t)\vec{e}_3\quad\text{et}\quad\frac{d\tau}{dt}=0 \tag{1.88}$$

L'évolution des tenseurs de déformation ε_{ij} et de cisaillement α_{ij} est identique et montre aussi l'existence de cisaillements non-uniformes

$$\left(\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right)=\left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt}\right)=\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}-2x_1x_2 & x_1{}^2-x_2{}^2 & 0\\ x_1{}^2-x_2{}^2 & 2x_1x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}g(t) \tag{1.89}$$

Le deuxième champ de vitesse, représenté à la figure 1.17(b), est de symétrie sphérique

$$\vec{\phi}(\vec{r},t)=r\left[x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\right]g(t)\quad\text{avec}\quad r=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2} \tag{1.90}$$

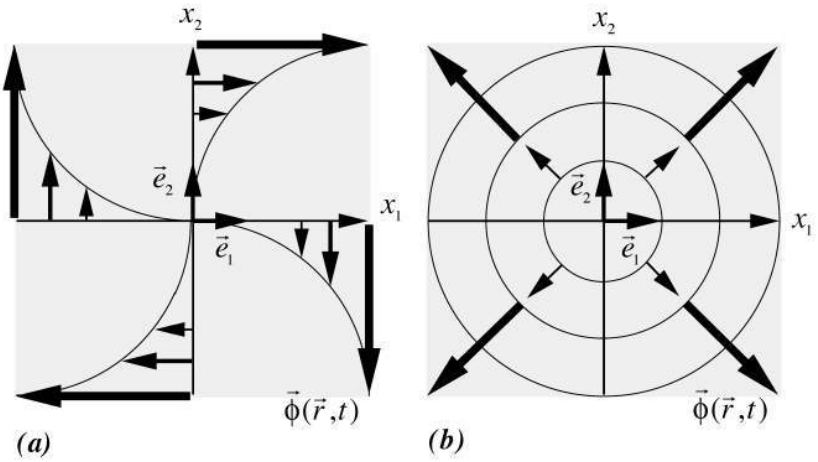


Figure 1.17 *- exemples de distorsions non-uniformes*

Ce champ de vitesse implique clairement une expansion volumique du milieu autour du centre du système de coordonnées. L'évolution des tenseurs β_{ij} et ε_{ij} est la même

$$\left(\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right)=\left(\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right)=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r^2+x_1{}^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & r^2+x_2{}^2 & x_2x_3\\ x_1x_3 & x_2x_3 & r^2+x_3{}^2\end{pmatrix}g(t) \tag{1.91}$$

ce qui implique qu'il s'agit là d'une évolution sans rotation le long de la trajectoire, mais avec une expansion volumique τ non-uniforme, qui dépend du rayon r

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{dt} = 4r\,g(t) \tag{1.92}$$

Finalement, l'évolution du tenseur de cisaillement α_{ij} montre aussi en ce cas l'existence de cisaillements non-uniformes en fonction du rayon r

$$\left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt}\right) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x_1^{\,2} - r^2/3 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^{\,2} - r^2/3 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^{\,2} - r^2/3 \end{pmatrix} g(t) \tag{1.93}$$

Chapitre 2

Repères locaux et géométrocompatibilité d'un réseau

Dans ce chapitre, on montre que les coordonnées d'Euler sont parfaitement adaptées à la description des réseaux solides, et qu'elles permettent même de décrire des réseaux à très fortes déformations, ce qui est extrêmement difficile à faire en coordonnées de Lagrange. Cependant, on montre que la description d'un réseau solide en coordonnées d'Euler nécessite d'introduire des repères locaux. Pour satisfaire cette nécessité, on définit alors le concept de *référentiel local macroscopique*, qui permet d'éviter la complexité inhérente des référentiels locaux microscopiques définis habituellement en géométrie différentielle.
Pour terminer, on recherche aussi les conditions de compatibilité qui assurent en coordonnées d'Euler qu'il est possible de définir un champ de déplacement continu pour un réseau, et que celui-ci est par conséquent bien un réseau *solide*.

2.1 - Définition de repères locaux dans les réseaux solides

La description eulérienne de l'évolution spatio-temporelle d'un réseau solide de particules pourrait parfaitement consister à définir, dans le repère $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ fixe dans le référentiel absolu de l'observateur ***GO***, le *champ de vitesse* $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ décrivant le mouvement moyen des sites élémentaires du réseau. Sur la base de ce champ de vitesse, on peut déduire la *vitesse angulaire locale* $d\vec{\omega}/dt$ de rotation du solide et le *scalaire d'expansion volumique locale* τ du solide, et par conséquent décrire l'évolution temporelle des distorsions de ce réseau solide grâce à l'ensemble des équations géométrocinétiques eulériennes introduites au premier chapitre (tableau 1.1), basées sur les trois équations principales suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} = -\dfrac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \\ \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{S_n}{n} + \mathrm{div}\,\vec{\phi} \end{cases} \qquad (2.1)$$

Cette méthode est évidemment tout-à-fait valide dans le cas d'un réseau parfaitement isotrope. Cependant, dans la majorité des cas, il n'est pas judicieux de l'appliquer pour décrire les distorsions d'un réseau en coordonnées d'Euler, pour les deux raisons suivantes:
- un solide rigide peut présenter une *élasticité anisotrope*, qui dépend de la direction considérée *par rapport aux directions cristallines locales du réseau*. Or, bien que les tenseurs de distorsion *(2.1)* mesurent correctement les distorsions d'un solide, que celui-ci soit isotrope ou anisotrope, ils les mesurent *par rapport au repère* $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ fixe dans le référentiel absolu, et non *par rap-*

port aux directions cristallines locales du réseau. Ce fait rend extrêmement difficile l'expression de l'énergie libre élastique d'un réseau solide anisotrope à partir des tenseurs de distorsion *(2.1)*, surtout si celui-ci présente une rotation locale importante, car l'énergie libre élastique d'un solide anisotrope n'est pas construite sur la base des invariants des tenseurs de distorsion,

- dans le cas d'un *réseau solide parfait à élasticité isotrope* (sans singularités de structure), l'énergie libre élastique peut effectivement être exprimée directement à partir des tenseurs de distorsion *(2.1)*, car celle-ci ne dépend alors que d'invariants des tenseurs de distorsion vis-à-vis du système de coordonnées utilisé. Par contre, dans le cas d'un *réseau solide imparfait à élasticité isotrope*, donc d'un réseau isotrope qui contient des singularités de structure anisotropes, telles que des *dislocations*, des *désinclinaisons (ou disclinations en anglais)* ou des *joints*, ces défauts, à cause de leur anisotropie, ne peuvent être décrits que *par rapport aux directions cristallines locales du réseau*.

Il est par conséquent impératif d'exprimer les distorsions d'un réseau à élasticité anisotrope, ou d'un réseau isotrope mais imparfait dans un *repère local*, subissant les mêmes translations et rotations moyennes que le réseau, de sorte à ce que les directions du système local de coordonnées correspondent en moyenne aux mêmes directions que celles du réseau cristallin.

La définition d'un référentiel local orthonormé macroscopique

Dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ de l'observateur ***GO***, il est toujours possible de considérer *un point* $\boldsymbol{O}$ *du solide* et de suivre ce point au cours du temps connaissant sa vitesse instantanée $\vec{\phi}_o(t)$ exprimée dans le référentiel $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$. A ce point $\boldsymbol{O}$ est aussi associé un vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}_o(t)$. On peut alors associer à ce point $\boldsymbol{O}$ du solide un *repère local macroscopique orthonormé* $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, qui suit le solide avec la *vitesse d'entraînement* $\vec{\phi}_o(t)$ et qui tourne dans l'espace avec la *vitesse angulaire de rotation d'entraînement* $\dot{\vec{\omega}}_o(t)$ (figure 2.1). Le point central $\boldsymbol{O}$ de ce nouveau référentiel peut être repéré par un *vecteur-lieu* $\vec{\xi}_o(t)$ dont l'équation d'évolution, exprimée dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$, s'écrit simplement

$$\frac{d\vec{\xi}_o(t)}{dt} = \vec{\phi}_o(t) \qquad (2.2)$$

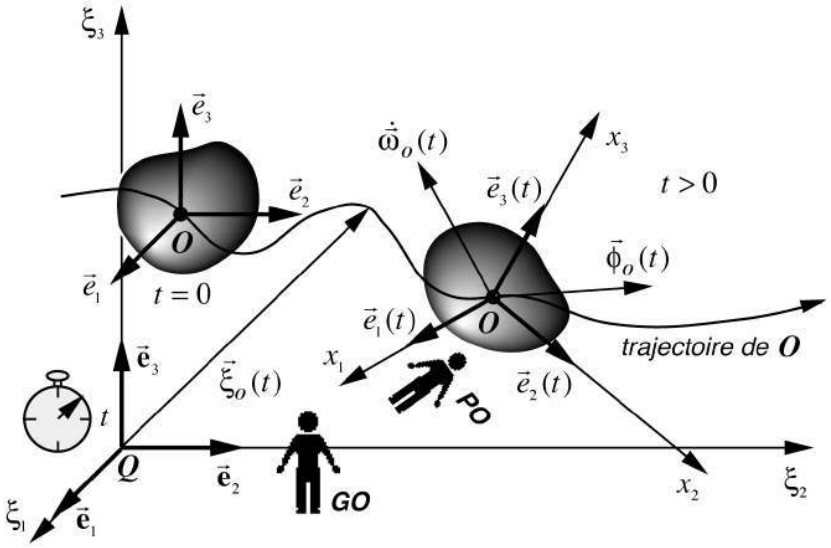


Figure 2.1 *- le référentiel local macroscopique orthonormé*

A ce référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, on peut associer un *repère local orthonormé* composé de trois vecteurs de base $\vec{e}_i(t)$ unitaires et orthogonaux, qui tournent dans l'espace avec la vitesse angulaire d'entraînement $\dot{\vec{\omega}}_{\boldsymbol{O}}(t)$. On peut aussi imaginer l'existence d'un *Petit Observateur* ***(PO)*** qui lui serait lié et qui utiliserait, pour faire ses mesures spatio-temporelles, *des règles* $\vec{e}_i$ *de même longueur* que celles du ***GO***, ainsi qu'*une horloge parfaitement synchronisée* à l'horloge de l'observateur ***GO*** du référentiel absolu.

La matrice de rotation du changement de repère

Dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ de l'observateur ***GO***, les vecteurs $\vec{e}_i(t)$ composant le repère local satisfont les équations d'évolution suivantes, qui expriment simplement que les vecteurs $\vec{e}_i(t)$ tournent à la vitesse angulaire $\dot{\vec{\omega}}_{\boldsymbol{O}}(t)$ le long de la trajectoire du point $\boldsymbol{O}$

$$\frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{\boldsymbol{O}}(t) \wedge \vec{e}_i(t) \qquad (2.3)$$

Les vecteurs de base $\vec{e}_i(t)$ peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base $\vec{\mathbf{e}}_j$ à l'aide d'une *matrice de rotation* $g_{ij}(t)$ définie par la relation

$$\vec{e}_i(t) = \sum_j g_{ij}(t)\vec{\mathbf{e}}_j \qquad (2.4)$$

Cette relation peut aisément être inversée sous la forme

$$\vec{\mathbf{e}}_j = \sum_i \left[\vec{e}_i(t)\vec{\mathbf{e}}_j\right]\vec{e}_i(t) = \sum_i g_{ij}(t)\vec{e}_i(t) \qquad (2.5)$$

La matrice $g_{ij}(t)$ est en fait la *matrice de changement de base*, permettant le passage entre le système de coordonnées du référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et celui du référentiel local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, et elle est *orthogonale*, car sa transposée est égale à son inverse

$$\left(g_{ij}\right)^{-1} = \left(g_{ij}\right)^{\mathrm{T}} \;\Rightarrow\; \left(g_{ij}\right)\left(g_{ij}\right)^{\mathrm{T}} = \left(g_{ij}\right)\left(g_{ij}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

ce qui implique aussi que son déterminant est égal à 1

$$\left|\left(g_{ij}\right)\left(g_{ij}\right)^{\mathrm{T}}\right| = \left|\left(g_{ij}\right)\left(g_{ij}\right)^{-1}\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|\left(g_{ij}\right)\right| = 1 \qquad (2.7)$$

Une telle matrice satisfait aussi les relations suivantes, assurant que les vecteurs $\vec{e}_i$ et $\vec{\mathbf{e}}_j$ sont bien unitaires

$$\begin{cases} \left|\vec{e}_i\right| = 1 \;\Rightarrow\; \sum_j \left[g_{ij}(t)\right]^2 = 1 \\ \left|\vec{\mathbf{e}}_j\right| = 1 \;\Rightarrow\; \sum_i \left[g_{ij}(t)\right]^2 = 1 \end{cases} \qquad (2.8)$$

A l'aide de la relation *(2.3)*, on déduit les équations différentielles d'évolution de la matrice $g_{ij}(t)$ de changement de base

$$\sum_j \frac{dg_{ij}(t)}{dt}\vec{\mathbf{e}}_j = \sum_j g_{ij}(t)\left(\dot{\vec{\omega}}_{\boldsymbol{O}}(t) \wedge \vec{\mathbf{e}}_j\right) \qquad (2.9)$$

Dans le cas de la mécanique du solide indéformable, où le solide se déplace dans l'espace par translation et par rotation globale uniquement, donc sans se déformer, les directions représen-

tées par les vecteurs de base unités $\vec{e}_i$ correspondent toujours exactement *aux directions du réseau cristallin du solide*. Dans le cas où la portion de solide considérée se déplace et se déforme simultanément, comme les vecteurs $\vec{e}_i(t)$ se déplacent à vitesse $\vec{\phi}_O(t)$ et tournent à la vitesse angulaire $\dot{\vec{\omega}}_O(t)$, les directions représentées par les vecteurs unités $\vec{e}_i$ correspondent encore, au point O, *aux directions moyennes du réseau cristallin du solide*.

D'ailleurs, dans un voisinage plus ou moins étendu autour du point O, les directions du réseau cristallin correspondent encore plus ou moins aux directions des vecteurs unités $\vec{e}_i$. La taille de ce voisinage dépendra évidemment de l'état de déformation du solide autour du point O. Ce voisinage pourrait être défini empiriquement comme un volume V_m entourant le point O et satisfaisant le critère approximatif suivant: *le mobile V_m de réseau autour de O tel que les composantes du vecteur de rotation $\vec{\omega}$ ainsi que le scalaire d'expansion volumique τ ne varient pas trop sur ce volume V_m (par exemple quelques pour cent au maximum).*

Dans la figure 2.2, on a essayé de représenter le réseau cristallin du solide au voisinage du point O en présence d'une déformation de ce réseau.

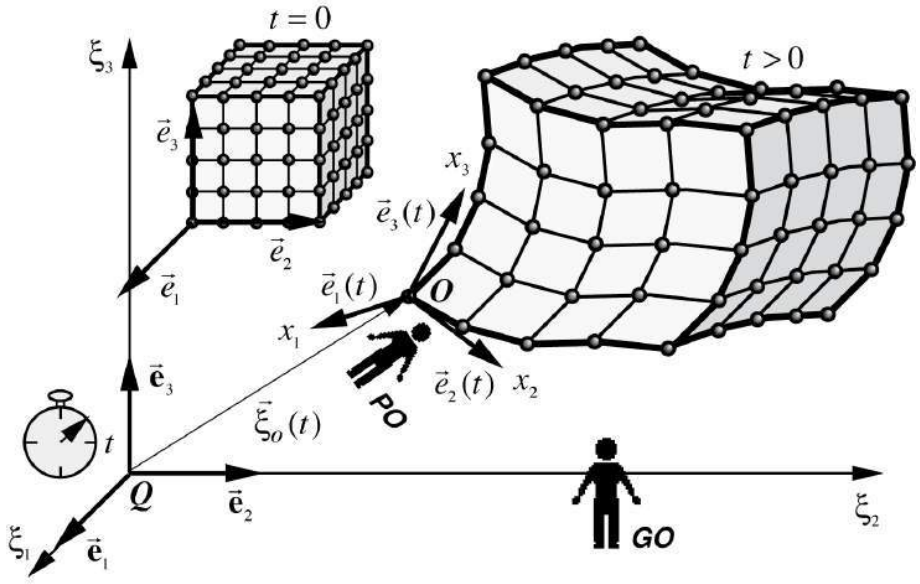


Figure 2.2 *- le réseau solide au voisinage du point O du repère local $Ox_1x_2x_3$*

La projection des champs dans le référentiel local

Tout champ scalaire ou vectoriel défini dans l'espace absolu peut être projeté globalement dans le référentiel absolu $Q\xi_1\xi_2\xi_3$ ou localement, au voisinage du point O, dans le référentiel local mobile $Ox_1x_2x_3$ (figure 2.5).

Par exemple, le champ de vitesse $\vec{\phi}$ du réseau solide dans le référentiel absolu est défini au point $\vec{\xi}$ et à l'instant t dans le référentiel absolu d'inertie par ses projections ϕ_i sur les trois axes $Q\xi_1$, $Q\xi_2$ et $Q\xi_3$

$$\vec{\phi}(\vec{\xi},t)=\sum_{i=1}^{3}\phi_i(\xi_k,t)\vec{\mathbf{e}}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{\xi}=\sum_{k=1}^{3}\xi_k\vec{\mathbf{e}}_k \tag{2.10}$$

Dans le voisinage immédiat du point $\boldsymbol{O}$ *du référentiel local*, il peut aussi être projeté sur les trois axes $\boldsymbol{O}x_1$, $\boldsymbol{O}x_2$ et $\boldsymbol{O}x_3$ (figure 2.3). Au point $\boldsymbol{B}$ du référentiel local, repéré par $\vec{r}$, et à l'instant t, le champ $\vec{\phi}$ s'écrit, projeté dans le repère local

$$\vec{\phi}(\vec{r},t)=\sum_{i=1}^{3}\phi_i(x_k,t)\vec{e}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{r}=\sum_{k=1}^{3}x_k\vec{e}_k \tag{2.11}$$

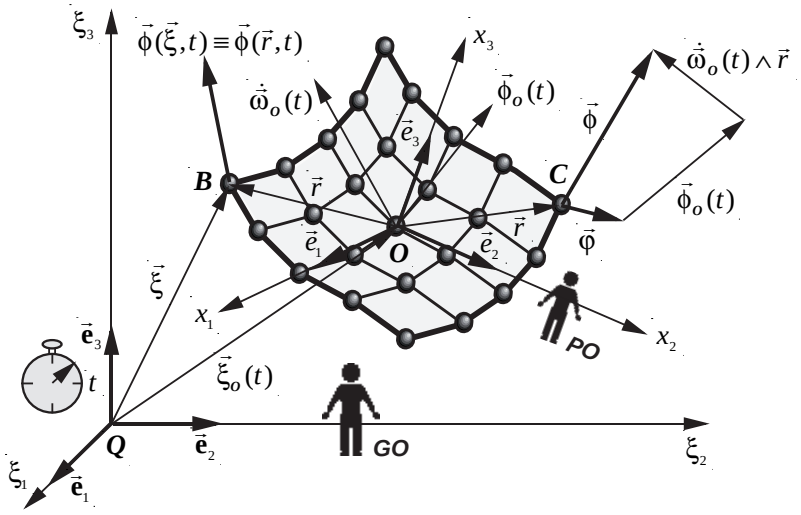


Figure 2.3 *- projection du champ* $\vec{\phi}$ *dans le référentiel local macroscopique*

Les expressions *(2.4)* et *(2.5)* des $\vec{e}_i$ en fonction des $\vec{\mathbf{e}}_i$ et vice-versa permettent de trouver directement les relations de passage entre les composantes ϕ_i du champ $\vec{\phi}$ projeté dans le référentiel absolu et dans le référentiel local respectivement

$$\vec{\phi}=\sum_i\phi_i(\xi_k,t)\vec{\mathbf{e}}_i=\sum_{ij}\phi_i(\xi_k,t)g_{ji}\,\vec{e}_j=\sum_j\phi_j(x_k,t)\vec{e}_j=\sum_{ij}\phi_j(x_k,t)g_{ji}\,\vec{\mathbf{e}}_i \quad\Rightarrow$$

$$\phi_i(x_k,t)=\sum_j g_{ij}\,\phi_j(\xi_k,t) \qquad \text{et} \qquad \phi_j(\xi_k,t)=\sum_i g_{ij}\,\phi_i(x_k,t) \tag{2.12}$$

De plus, comme les vecteurs-lieu $\vec{r}$ et $\vec{\xi}$ repérant respectivement les noeuds du réseau dans le référentiel local et dans le référentiel absolu sont liés entre eux par la relation simple

$$\vec{r}=\vec{\xi}-\vec{\xi}_o(t) \tag{2.13}$$

les relations de passage entre les composantes ξ_k et x_k des vecteurs-lieu du référentiel absolu et du référentiel local pointant un même point de l'espace sont données par

$$\vec{r}=\sum_i x_i\,\vec{e}_i=\sum_{ij}x_i\,g_{ij}\,\vec{\mathbf{e}}_i=\sum_j\xi_j\,\vec{\mathbf{e}}_j-\vec{\xi}_o(t)=\sum_{ij}\xi_j\,g_{ij}\,\vec{e}_i-\vec{\xi}_o(t) \quad\Rightarrow$$

$$x_i=\sum_j g_{ij}\xi_j-\vec{\xi}_o(t)\vec{e}_i \qquad \text{et} \qquad \xi_j=\sum_i g_{ij}x_i+\vec{\xi}_o(t)\vec{\mathbf{e}}_j \tag{2.14}$$

Finalement, les relations existant entre les dérivées partielles prises dans le référentiel absolu et dans le référentiel local se déduisent aisément

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j(y_k)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j}=\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(x_k)}{\partial \xi_j} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_j g_{ij}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j}=\sum_i g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.15)$$

Tableau 2.1 - Référentiel local macroscopique $Ox_1x_2x_3$ dans un réseau solide

Matrice de rotation du changement de référentiel

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_i(t)}{dt}=\dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{e}_i(t) & (1) \\ \displaystyle\sum_j \frac{dg_{ij}(t)}{dt}\vec{\mathbf{e}}_j=\sum_j g_{ij}(t)\left(\dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{\mathbf{e}}_j\right) & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\left(g_{ij}\right)\right|=1 & (3) \\ \displaystyle\sum_j\left[g_{ij}(t)\right]^2=1 & (4) \\ \displaystyle\sum_i\left[g_{ij}(t)\right]^2=1 & (5) \end{cases}$$

Relations de changement de référentiel

$$\begin{cases} \vec{e}_i(t)=\displaystyle\sum_j g_{ij}(t)\vec{\mathbf{e}}_j & (6) \\ \phi_i(x_k,t)=\displaystyle\sum_j g_{ij}\,\phi_j(\xi_k,t) & (7) \\ x_i=\displaystyle\sum_j g_{ij}\xi_j-\vec{\xi}_o(t)\vec{e}_i & (8) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}=\displaystyle\sum_j g_{ij}\frac{\partial}{\partial \xi_j} & (9) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_j=\displaystyle\sum_i g_{ij}(t)\vec{e}_i(t) & (10) \\ \phi_j(\xi_k,t)=\displaystyle\sum_i g_{ij}\,\phi_i(x_k,t) & (11) \\ \xi_j=\displaystyle\sum_i g_{ij}x_i+\vec{\xi}_o(t)\vec{\mathbf{e}}_j & (12) \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}=\displaystyle\sum_i g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} & (13) \end{cases}$$

Champ local de vitesse relative

$$\begin{cases} \vec{\varphi}(\vec{r},t)=\vec{\phi}(\vec{r},t)-\vec{\phi}_o(t)-\dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{r} & (1) \\ \vec{\varphi}(\vec{\xi},t)=\vec{\phi}(\vec{\xi},t)-\vec{\phi}_o(t)-\dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\left(\vec{\xi}-\vec{\xi}_o(t)\right) & (2) \end{cases}$$

Le champ local de vitesse relative

Il est possible de définir le *champ local de vitesse relative* $\vec{\varphi}$ des points du solide au voisinage du point O, par rapport au référentiel local mobile $Ox_1x_2x_3$. Ce champ de vitesse est en fait celui que mesurerait, au point C par exemple (figure 2.3), le *Petit Observateur* ***(PO)*** lié au référentiel local $Ox_1x_2x_3$, qui utiliserait les règles $\vec{e}_i$ ainsi qu'une horloge synchronisée à l'horloge du référentiel absolu pour mesurer les vitesses $\vec{\varphi}$ des noeuds du réseau, alors que le *Grand*

Observateur ***(GO)*** lié au référentiel absolu mesure quant à lui les vitesses absolues $\vec{\phi}$ des noeuds du réseau.

Le champ local de vitesse relative $\vec{\varphi}$ est obtenu en soustrayant du champ de vitesse absolue $\vec{\phi}$ le champ de vitesse d'entraînement du référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, à savoir le champ de vitesse uniforme $\vec{\phi}_o(t)$ associé à la translation du repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, ainsi que le champ de vitesse purement rotationnel $\dot{\vec{\omega}}_o(t) \wedge \vec{r}$ associé à la rotation du repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ autour du point $\boldsymbol{O}$ à la vitesse angulaire d'entraînement $\dot{\vec{\omega}}_o(t)$. Il vient donc les équations

$$\vec{\varphi}(\vec{r},t) = \vec{\phi}(\vec{r},t) - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t) \wedge \vec{r} \qquad (2.16)$$

$$\vec{\varphi}(\vec{\xi},t) = \vec{\phi}(\vec{\xi},t) - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t) \wedge \left(\vec{\xi} - \vec{\xi}_o(t)\right) \qquad (2.17)$$

La projection des opérateurs invariants d'espace et de temps dans le repère local

Les opérateurs d'espace $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et div appliqués à un champ scalaire ou vectoriel sont des *invariants*, c'est-à-dire qu'ils fournissent un résultat scalaire ou vectoriel ne dépendant pas du système de coordonnées dans lequel ils sont calculés (section A.2.). Il en va de même de l'opérateur de temps *dérivée particulaire* d/dt puisque celui-ci mesure la variation temporelle, prise le long de la trajectoire du milieu, de la grandeur à laquelle il s'applique. Ceci implique que toute relation mathématique faisant appel à $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et div, ainsi qu'à d/dt, est calculable aussi bien dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ que dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Dans le cas de l'opérateur temporel d/dt, la vitesse à introduire dans l'expression de la dérivée particulaire est évidemment la vitesse absolue $\vec{\phi}$ lorsque d/dt est calculée dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et la vitesse relative $\vec{\varphi}$ lorsque d/dt est calculée dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Quant à l'opérateur formel $\vec{\nabla}$, on montre, en utilisant les relations *(2.4)* et *(2.5)*, qu'il existe le lien suivant entre ses formulations dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{ij} \vec{e}_i\, g_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \sum_j \left(\sum_i \vec{e}_i\, g_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \sum_j \vec{\mathbf{e}}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \qquad (2.18)$$

Grâce à l'opérateur $\vec{\nabla}$, les expressions explicites des divers opérateurs d'espace et de temps dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ peuvent être trouvées. En effet, les relations suivantes permettent de déduire les expressions de $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et div, expressions qui sont reportées dans le tableau 2.2

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \quad \text{et} \quad \text{div}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \vec{u} \qquad (2.19)$$

Quant à la dérivée d'une grandeur scalaire ou vectorielle dans une direction $\vec{\boldsymbol{n}}$ donnée de l'espace, elle s'écrit $(\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\nabla})$ et s'explicite aisément aussi grâce à l'opérateur $\vec{\nabla}$.

Une remarque importante peut être faite ici. Dans le cas d'un réseau solide *parfaitement indéformable*, le champ de vitesse relative $\vec{\varphi}$ défini par les relations *(2.16)* et *(2.17)* est nul partout dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Dans le cas d'un réseau solide *déformable*, le champ de vitesse relative $\vec{\varphi}$ ne contient que les vitesses associées aux déformations du réseau dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, ainsi que les rotations locales associées à ces déformations, puisque les mouvements moyens d'entraînement du réseau par translation et par rotation globale ont été soustraits. Notamment, sur le point $\boldsymbol{O}$ lui-même, la vitesse relative $\vec{\varphi}$ est nulle par définition.

Tableau 2.2 - Expressions des opérateurs invariants dans $\boldsymbol{Q\xi_1\xi_2\xi_3}$ et $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$

	Dans référentiel absolu $\boldsymbol{Q\xi_1\xi_2\xi_3}$ $f = f(\xi_k,t)$ ou $\vec{u} = \sum u_i(\xi_k,t)\vec{\mathbf{e}}_i$	Dans référentiel local $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$ $f = f(x_k,t)$ ou $\vec{u} = \sum u_i(x_k,t)\,\vec{e}_i$
$\vec{\nabla}$	$\sum_i \vec{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ (1)	$\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (2)
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	$\sum_i \vec{\mathbf{e}}_i \frac{\partial f(\xi_k,t)}{\partial \xi_i}$ (3)	$\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial f(x_k,t)}{\partial x_i}$ (4)
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}$	$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \partial/\partial\xi_1 & \partial/\partial\xi_2 & \partial/\partial\xi_3 \\ u_1(\xi_k,t) & u_2(\xi_k,t) & u_3(\xi_k,t) \end{vmatrix}$ (5)	$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1(x_k,t) & u_2(x_k,t) & u_3(x_k,t) \end{vmatrix}$ (6)
$\text{div}\,\vec{u}$	$\sum_i \frac{\partial u_i(\xi_k,t)}{\partial \xi_i}$ (7)	$\sum_i \frac{\partial u_i(x_k,t)}{\partial x_i}$ (8)
$(\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\nabla})$	$\sum_i (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\mathbf{e}}_i)\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ (9)	$\sum_i (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{e}_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (10)
$\frac{d}{dt}$	$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\phi}\vec{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \phi_i(\vec{\xi},t)\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ (11)	$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\varphi}\vec{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \varphi_i(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (12)

On en déduit que, dans le cas d'un solide *faiblement déformable*, c'est-à-dire lorsque les déplacements des noeuds du réseau par rapport au référentiel local $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$ restent toujours assez petits au voisinage du point $\boldsymbol{O}$, il est possible de remplacer au voisinage du point $\boldsymbol{O}$ la dérivée particulaire d/dt, correspondant normalement à la variation temporelle prise le long de la trajectoire des noeuds du réseau dans le référentiel local $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$, par la dérivée temporelle en un point fixe du référentiel local $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$, à savoir la dérivée partielle par rapport au temps.
De même en est-il pour un solide *se déformant très lentement*, puisqu'en ce cas le champ de vitesse relative $\vec{\varphi}$ devient très petit. On en déduit une remarque qui sera *très importante* pour la suite de ce traité:
- au voisinage du centre $\boldsymbol{O}$ du référentiel local $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$, si les déformations sont faibles et/ou suffisamment lentes, on peut tout-à-fait légitimement utiliser l'approximation suivante de la dérivé temporelle:

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\varphi}\vec{\nabla}) \cong \frac{\partial}{\partial t}} \quad \textbf{au voisinage du point } \boldsymbol{O} \qquad (2.20)$$

2.2 - Projection des équations géométrocinétiques dans le référentiel local

Il est possible maintenant de redéfinir les tenseurs de distorsion d'un solide en utilisant un formalisme similaire à celui introduit au premier chapitre, mais en appliquant ce formalisme dans le référentiel local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du petit observateur ***PO*** (figure 2.3).

Les équations géométrocinétiques de distorsion dans le référentiel local

Dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, la vitesse angulaire $d\vec{\omega}/dt$ de rotation et la dérivé particulaire du scalaire τ d'expansion volumique du solide se déduisent par une argumentation parfaitement similaire à celle utilisée au deuxième chapitre, de sorte que les équations géométrocinétiques introduites au deuxième chapitre restent parfaitement valables dans ce référentiel mobile

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\tau}{dt}=-\frac{S_n}{n}+\mathrm{div}\,\vec{\phi} \tag{2.21}$$

Il est dès lors possible de définir dans ce référentiel un nouveau *tenseur de distorsion globale* $\vec{\beta}_i$ sur la base d'une équation géométrocinétique telle que sa trace soit égale à $d\tau/dt$ et que la moitié de sa partie anti-symétrique, changée de signe, fournisse $d\vec{\omega}/dt$. L'équation géométrocinétique définie au deuxième chapitre de la manière suivante

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}=-\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i=-\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{\phi}\vec{e}_i\right)=-\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i+\left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\phi}+\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \tag{2.22}$$

satisfait parfaitement ces conditions. En effet, il vient, pour la trace de $d\vec{\beta}_i/dt$ et pour la moitié de sa partie anti-symétrique changée de signe, les expressions de $d\tau/dt$ et de $d\vec{\omega}/dt$

$$\sum_k\vec{e}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt}=-\frac{S_n}{n}+\vec{\nabla}\vec{\phi}+\sum_k\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\underbrace{\left(\vec{e}_k\wedge\vec{e}_k\right)}_{=0}=-\frac{S_n}{n}+\mathrm{div}\vec{\phi}=\frac{d\tau}{dt} \tag{2.23}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_k\vec{e}_k\wedge\frac{d\vec{\beta}_k}{dt}=-\frac{1}{2}\left[\sum_k\vec{e}_k\wedge\left(\vec{e}_k\vec{\nabla}\right)\vec{\phi}+\sum_k\vec{e}_k\wedge\left(\vec{e}_k\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\right)\right]=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}=\frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2.24}$$

Le nouveau *tenseur de déformation* $\vec{\varepsilon}_i$ se déduit par symétrisation de l'équation géométrocinétique $d\vec{\beta}_i/dt$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt}=\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}_{\,i}-\vec{e}_i\wedge\frac{d\vec{\omega}}{dt}\;\Rightarrow\;\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt}=-\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i-\frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \tag{2.25}$$

Quant au nouveau *tenseur de cisaillement* $\vec{\alpha}_i$, il est déduit à partir de la partie symétrique transverse de $d\vec{\beta}_i/dt$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt}=\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt}-\frac{1}{3}\vec{e}_i\frac{d\tau}{dt}\;\Rightarrow\;\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i-\frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}-\frac{1}{3}\vec{e}_i\,\mathrm{div}\vec{\phi} \tag{2.26}$$

Les tenseurs de distorsion globale $\vec{\beta}_i,\vec{\varepsilon}_i,\vec{\alpha}_i$ ainsi définis dépendent du choix du référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, via leur définition utilisant les vecteurs de base $\vec{e}_i$ du référentiel local. Ils sont déduits à partir des composantes du champ de vitesse absolue $\vec{\phi}$ du solide projetées dans le référentiel local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, de la même manière que les tenseurs de distorsions $\vec{\beta}_i,\vec{\varepsilon}_i,\vec{\alpha}_i$ avaient été déduits au deuxième chapitre, mais à partir des projections du champ $\vec{\phi}$ dans un repère immobile fixé au référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$.

Pour l'observateur ***PO*** dans le référentiel local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, les vecteurs de base $\vec{e}_i$ apparaissent comme des constantes indépendantes du temps, de sorte que, dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = \sum_k \vec{e}_k \dfrac{d\vec{\beta}_k}{dt} \;\Rightarrow\; \tau = \sum_k \vec{e}_k \vec{\beta}_k \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \dfrac{d\vec{\beta}_k}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k \\ \dfrac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} - \vec{e}_i \wedge \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = \dfrac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} - \dfrac{1}{3}\vec{e}_i \dfrac{d\tau}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau\vec{e}_i \end{cases} \qquad (2.27)$$

Par conséquent, les schémas de décomposition du tenseur de distorsion reportés aux figures 1.7 et 1.8 restent toujours valables, à condition de remplacer les tenseurs $\vec{\beta}_i, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\alpha}_i$ définis dans un repère fixe du référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_3\xi_2\xi_3$ par les mêmes tenseurs $\vec{\beta}_i, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\alpha}_i$, mais définis dans le repère local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Tableau 2.3 - Equations géométrocinétiques des distorsions d'un réseau solide exprimées dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} = -\dfrac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i & (1) \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} & (2) \\ \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{S_n}{n} + \mathrm{div}\vec{\phi} & (3) \end{cases}$$

$$avec \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\varphi}\vec{\nabla}\right) \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k & (5) \\ \tau = \sum_k \vec{e}_k \vec{\beta}_k = \sum_k \vec{e}_k \vec{\varepsilon}_k & (6) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} & (7) \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau\vec{e}_i & (8) \end{cases}$$

Il faut noter ici que seuls le champ vectoriel $\vec{\omega}$ et le champ scalaire τ (représentant respectivement la partie anti-symétrique et la trace du tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$) sont des grandeurs véritablement *invariantes*, au sens où il s'agit d'un vecteur et d'un scalaire qui ne dépendent pas du choix du référentiel utilisé pour les mesurer. Les équations géométrocinétiques exprimées par rapport au référentiel local sont résumées dans le tableau 2.2. Elles sont à comparer aux équations géométrocinétiques du tableau 1.1, exprimées par rapport à un repère fixe dans le référentiel absolu: on constate que ce sont en fait exactement les mêmes expressions, mais dans ces expressions, *c'est essentiellement la dérivé particulaire qui est différente* puisqu'elle dépend de $\vec{\phi}$ dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_3\xi_2\xi_3$ alors qu'elle dépend de $\vec{\varphi}$ dans le repère mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Les distorsions locales $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ et les rotations locales $\vec{\omega}^{(\delta)}$ par pure déformation

A partir du rotationnel du champ local de vitesse relative $\vec{\varphi}$ calculé dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi} - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{r}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} - \dot{\vec{\omega}}_o\,\mathrm{div}\,\vec{r} + \left(\dot{\vec{\omega}}_o\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} - 2\dot{\vec{\omega}}_o \qquad (2.28)$$

il est possible de définir un *vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ par pure déformation* qui mesure les rotations associées uniquement aux déformations du solide autour du point $\boldsymbol{O}$, puisque sa dérivée particulaire est égale à la vitesse angulaire globale $d\vec{\omega}/dt$ de laquelle est soustraite la vitesse angulaire d'entraînement $\dot{\vec{\omega}}_o$ du référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\frac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} - \dot{\vec{\omega}}_o = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \dot{\vec{\omega}}_o \qquad (2.29)$$

Il est aussi possible de construire un *tenseur de distorsion locale $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ par pure déformation* tel que sa trace soit égale au scalaire d'expansion volumique τ et que la moitié de sa partie anti-symétrique changée de signe fournisse le vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$. L'équation géométrocinétique suivante satisfait parfaitement ces conditions

$$\frac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_i = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{\varphi}\vec{e}_i\right) \qquad (2.30)$$

En effet, en écrivant l'expression de $d\vec{\beta}_i^{(\delta)}/dt$ sous la forme

$$\frac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi} + \vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} \qquad (2.31)$$

on peut vérifier les deux expressions suivantes

$$\sum_k \vec{e}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{(\delta)}}{dt} = -\frac{S_n}{n} + \mathrm{div}\,\vec{\varphi} = \frac{d\tau}{dt} \qquad (2.32)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\wedge\frac{d\vec{\beta}_k^{(\delta)}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = \frac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} \qquad (2.33)$$

Le tenseur de distorsion locale $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ ainsi défini peut être relié directement au champ $\vec{\phi}$ des vitesses absolues. En effet, le calcul suivant

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{\phi}\vec{e}_i\right) &= \vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\phi} = \vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} + \vec{e}_i\wedge 2\dot{\vec{\omega}}_o \\ &+\left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi} + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\left(\dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{r}\right) = \vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi} - \dot{\vec{\omega}}_o\wedge\vec{e}_i\end{aligned} \qquad (2.34)$$

montre que

$$\frac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{\phi}\vec{e}_i\right) - \vec{e}_i\wedge\dot{\vec{\omega}}_o = \frac{d\vec{\beta}_i}{dt} - \vec{e}_i\wedge\dot{\vec{\omega}}_o \qquad (2.35)$$

Il est aisé de montrer que les expressions des champs de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ et de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ en fonction du champ $\vec{\varphi}$ des vitesses relatives ou du champ $\vec{\phi}$ des vitesses absolues sont les mêmes, ce qui est très logique puisque $\vec{\varepsilon}_i$ et $\vec{\alpha}_i$ ne sont associés qu'aux pures déformations

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi} + \frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} \qquad (2.36)$$

$$\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} - \frac{1}{3}\vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\varphi} = \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi} + \frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} - \frac{1}{3}\vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\varphi} \qquad (2.37)$$

Comme les vecteurs de base $\vec{e}_i$ sont des constantes indépendantes du temps pour l'observateur ***PO*** dans le référentiel local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, les relations suivantes de décomposition des tenseurs de distorsion locale sont satisfaites dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = \sum_k \vec{e}_k \dfrac{d\vec{\beta}_k^{(\delta)}}{dt} \;\Rightarrow\; \tau = \sum_k \vec{e}_k \vec{\beta}_k^{(\delta)} \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \dfrac{d\vec{\beta}_k^{(\delta)}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\omega}^{(\delta)} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k^{(\delta)} \\ \dfrac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} = \dfrac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} - \vec{e}_i \wedge \dfrac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_i}{dt} = \dfrac{d\vec{\varepsilon}_i}{dt} - \dfrac{1}{3}\vec{e}_i \dfrac{d\tau}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau\vec{e}_i \end{cases} \qquad (2.38)$$

Tableau 2.4 - Géométrocinétique des distorsions et des rotations locales d'un réseau solide dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} = -\dfrac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_i \\ \qquad\quad = \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} - \vec{e}_i \wedge \dot{\vec{\omega}}_o(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varphi} \\ \qquad\quad = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} - \dot{\vec{\omega}}_o(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{S_n}{n} + \text{div}\,\vec{\varphi} \quad (3)$$

$$\vec{\beta}_i^{(\delta)} = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \quad (4)$$

$$\vec{\omega}^{(\delta)} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k^{(\delta)} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_o(t) \quad (5)$$

$$\tau = \sum_k \vec{e}_k \vec{\beta}_k^{(\delta)} = \sum_k \vec{e}_k \vec{\beta}_k = \sum_k \vec{e}_k \vec{\varepsilon}_k \quad (6)$$

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} \quad (7)$$

$$\vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i \quad (8)$$

Pour la même raison que ci-dessus, les tenseurs de distorsion locale par déformation peuvent être directement liés aux tenseurs de distorsion globale dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ par les relations suivantes, dans lesquelles le vecteur de rotation d'entraînement $\vec{\omega}_o$ ne dépend que du temps

$$\frac{d\vec{\beta}_i^{(\delta)}}{dt} = \frac{d\vec{\beta}_i}{dt} - \vec{e}_i \wedge \dot{\vec{\omega}}_o \;\Rightarrow\; \vec{\beta}_i^{(\delta)} = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \qquad (2.39)$$

$$\frac{d\vec{\omega}^{(\delta)}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \dot{\vec{\omega}}_o \;\Rightarrow\; \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_o(t) \qquad (2.40)$$

Seuls les tenseurs locaux $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ et $\vec{\omega}^{(\delta)}$, associés aux déformations locales du réseau au voisinage du point $\boldsymbol{O}$, diffèrent des tenseurs globaux $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\omega}$ obtenus au paragraphe précédent,

de par l'existence d'une rotation d'entraînement $\vec{\omega}_O(t)$ du repère local $Ox_1x_2x_3$. Quant aux grandeurs τ, $\vec{\varepsilon}_i$ et $\vec{\alpha}_i$, elles peuvent être obtenues indifféremment à partir des champs de vitesse absolue $\vec{\phi}$ ou de vitesse relative $\vec{\varphi}$. Les équations géométrocinétiques pour les tenseurs de distorsion locale par déformation, déduits à partir du champ $\vec{\varphi}$ dans le référentiel local mobile $Ox_1x_2x_3$, sont reportées dans le tableau 2.4.

2.3 - Géométrocompatibilité en coordonnées d'Euler

Nous avons montré dans la section 1.1 que la description des solides compatibles en coordonnées de Lagrange est caractérisée par un champ de déplacement. En effet, en coordonnées de Lagrange (figure 2.4), le solide est décrit par un rayon-vecteur $\vec{r}$ repérant la position initiale de tous ses points dans un repère $Ox_1x_2x_3$ fixé dans le référentiel absolu $Q\xi_1\xi_2\xi_3$ de l'observateur ***GO***. Le champ de vecteur de déplacement de Lagrange $\vec{u}_L(\vec{r},t)$ permet alors de repérer dans l'espace à l'instant t la position de tous les points du solide situés initialement à la coordonnée $\vec{r}$ du repère $Ox_1x_2x_3$.

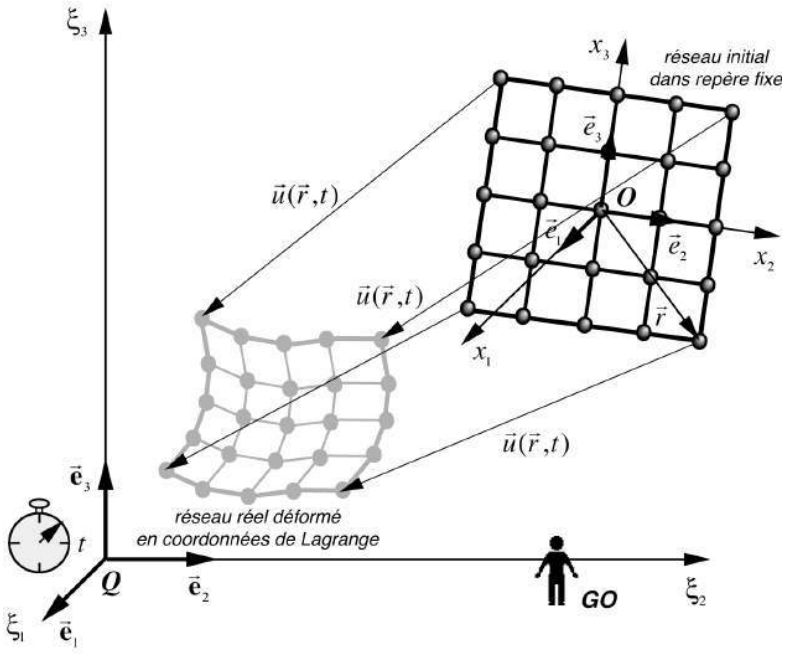


Figure 2.4 *- champ de déplacement $\vec{u}_L(\vec{r},t)$ en coordonnées de Lagrange*

Il est intuitivement clair que la description des distorsions d'un solide en coordonnées d'Euler devrait aussi permettre de retrouver un tel champ de déplacement. En effet, en coordonnées d'Euler (figure 2.5), le solide déformé est décrit à l'instant t dans le référentiel absolu de l'observateur ***GO***. Pour un point A du solide situé à la coordonnée $\vec{\xi}$ de ce repère il doit être possible de définir un vecteur de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ qui relie ce point A à l'endroit A' où se situait le même point A du solide à l'instant initial $t=0$. Le même type de raisonnement peut aussi s'appliquer dans le repère mobile $Ox_1x_2x_3$ de l'observateur ***PO*** : à un instant t donné, pour chaque point B du solide situé à la coordonnée $\vec{r}$ dans ce repère, il doit être possible de

définir un vecteur de déplacement $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ qui relie ce point $\boldsymbol{B}$ à l'endroit $\boldsymbol{B''}$ du repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ où se trouvait le point $\boldsymbol{B}$ du solide à l'instant initial $t=0$.

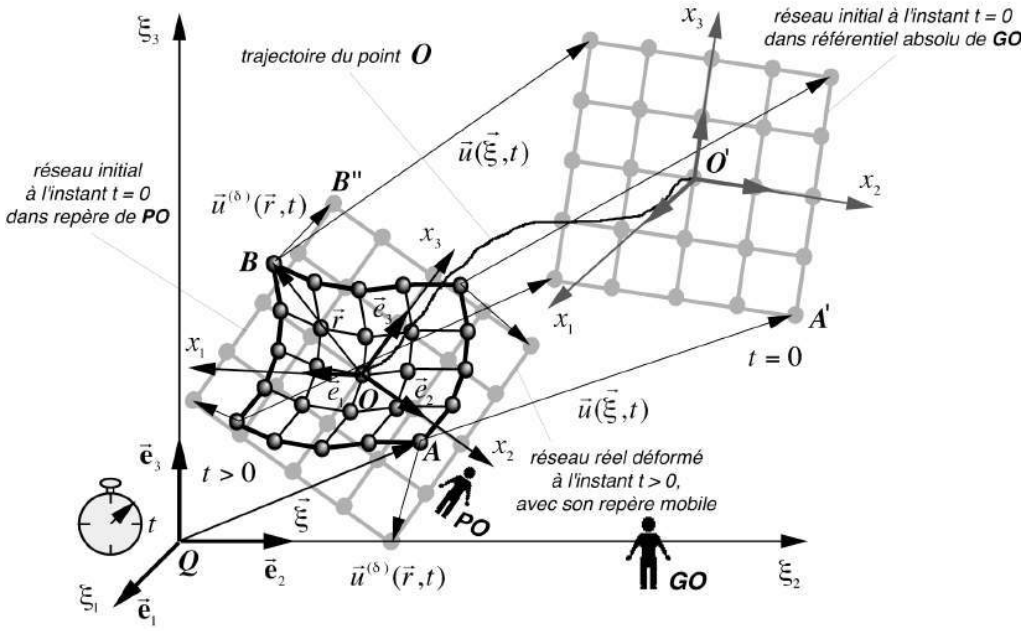


Figure 2.5 *- champs de déplacement* $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ *et* $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ *en coordonnées d'Euler*

Les champs de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ ainsi définis devraient donc permettre de reconstruire le solide tel qu'il l'était à l'instant initial $t=0$, avant les diverses translations, rotations et déformations subies, dans le référentiel absolu de l'observateur ***GO*** et dans le repère mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ de l'observateur ***PO*** respectivement.

Condition de géométrocompatibilité en coordonnées d'Euler

D'après la forme de l'équation géométrocinétique pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = -\frac{S_n}{3n}\vec{e}_i + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i \qquad (2.41)$$

il est clair qu'il y a un lien étroit entre la dérivé temporelle du tenseur $\vec{\beta}_i$ et le gradient du champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{\xi},t)$. Mais comme le champ de vitesse $\vec{\phi}(\vec{\xi},t)$ doit lui-même être en lien étroit avec la dérivé temporelle du champ de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$, on déduit qu'il doit forcément exister un lien étroit entre le tenseur $\vec{\beta}_i$ et le gradient du champ de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$, et que le tenseur de distorsion est très probablement le tenseur gradient du champ de déplacement. Comme le tenseur de distorsion globale $\vec{\beta}_i$ peut se scinder en un tenseur de distorsion locale $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ associé qu'aux déformations du solide dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et une deuxième composante associée à la rotation d'entraînement $\vec{\omega}_o(t)$ du référentiel local, on a que

$$\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} \qquad (2.42)$$

En supposant alors que le tenseur de distorsion est effectivement le tenseur gradient du champ de déplacement, on peut postuler *à priori* une *condition de compatibilité en coordonnées d'Euler,* sous la forme

Condition de géométrocompatibilité: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = 0$ *(2.43)*

En fait, dans la section 3.4, on montrera que la signification physique de cette relation est d'un point de vue topologique que *le champ de déplacement* $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ *est continu*, en d'autres mots qu'il n'existe pas de discontinuités du champ de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$, signifiant aussi qu'il n'existe pas de dislocations au sein du milieu.
En reprenant alors les relations de dérivés spatiales des tenseurs topologiques introduites à la section 1.4, et en effectuant les mêmes manipulations qu'à la section 1.4, ce postulat permet d'obtenir un ensemble complet de relations de compatibilité en coordonnées d'Euler

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega} = \mathrm{div}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = 0 \end{cases} \qquad (2.44)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{e}_i\tau\right) = 0 \end{cases} \qquad (2.45)$$

On va montrer que le postulat de géométrocompatibilité en coordonnées d'Euler, introduit par la relation *(2.44)*, se justifie parfaitement *à posteriori,* en examinant ses diverses conséquences:

Conséquence 1: existence de champs potentiels de déplacement

La postulat de géométrocompatibilité *(2.44)* implique que $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ doivent dériver de gradients de champs scalaires $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ définis dans les référentiels $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ respectivement, ce qui permet d'écrire en toute généralité

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{\beta}_i = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u_{Ei}(\vec{\xi},t) = -\sum_k \dfrac{\partial u_{Ei}}{\partial \xi_k}\,\vec{\mathbf{e}}_k \\ \vec{\beta}_i^{(\delta)} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u_{Ei}^{(\delta)}(\vec{r},t) = -\sum_k \dfrac{\partial u_{Ei}^{(\delta)}}{\partial x_k}\,\vec{e}_k \end{cases} \qquad (2.46)$$

Avec les champs scalaires $u_{Ei}(\vec{\xi},t)$ et $u_{Ei}{}^{(\delta)}(\vec{r},t)$ nécessaires pour décrire les tenseurs $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$, deux champs vectoriels $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ peuvent être introduits, tels que

$$\vec{u}_E(\vec{\xi},t) = \sum_k u_{Ei}\,(\vec{\xi},t)\,\vec{\mathbf{e}}_k \quad \text{et} \quad \vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t) = \sum_k u_{Ei}^{(\delta)}(\vec{r},t)\,\vec{e}_k \qquad (2.47)$$

Par conséquent, les tenseurs de distorsion $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ dans un *réseau solide géométrocompatible*, c'est-à-dire satisfaisant la relation de géométrocompatibilité *(2.44)*, sont effectivement les *tenseurs gradients* des champs vectoriels continus $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$. Par analyse dimensionnelle, il est aisé de conclure que les vecteurs $\vec{u}_E$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}$ ont bien les dimensions d'un déplacement. Par conséquent, $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ sera appelé le *champ potentiel de déplacement global du solide* et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ le *champ potentiel de déplacement local du solide*. Ces champs potentiels de déplacement correspondent évidemment, mais à un champ vectoriel uniforme $\vec{u}_0(t)$ près, aux champs de déplacement que nous avons discutés précédemment dans le cas du système des coordonnées d'Euler (figure 2.5).
Il est clair que le champ de déplacement global $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ peut aussi s'exprimer dans le référen-

tiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ en fonction de $\vec{r}$ et t, simplement en appliquant la relation $\vec{\beta}_i(\vec{r},t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}(\vec{r},t)$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. En utilisant les décompositions de $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ décrites dans les tableaux 2.3 et 2.4, tous les tenseurs de distorsion peuvent être reliés directement aux champs vectoriels de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei} \quad \textit{and} \quad \vec{\beta}_i^{(\delta)} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}^{(\delta)} \\ \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E \quad \textit{and} \quad \vec{\omega}^{(\delta)} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E^{(\delta)} \\ \tau = -\text{div}\,\vec{u}_E = -\text{div}\,\vec{u}_E^{(\delta)} \\ \vec{\varepsilon}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei} + \dfrac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}^{(\delta)} + \dfrac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E^{(\delta)} \\ \vec{\alpha}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei} + \dfrac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E + \dfrac{1}{3}\vec{e}_i\,\text{div}\,\vec{u}_E = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}^{(\delta)} + \dfrac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_E^{(\delta)} + \dfrac{1}{3}\vec{e}_i\,\text{div}\,\vec{u}_E^{(\delta)} \end{cases} \qquad (2.48)$$

Ces relations montrent que les champs de déplacement $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ peuvent eux-mêmes être décomposés, par exemple en une partie purement divergente qui sera associée à l'expansion volumique du milieu et en une partie purement rotationnelle qui sera associée aux rotations globales $\vec{\omega}$ ou locales $\vec{\omega}^{(\delta)}$ par déformation, qui contiennent notamment les cisaillements du solide. Il faut aussi remarquer qu'on a utilisé le signe négatif dans les relations $\vec{\beta}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}$ et $\vec{\beta}_i^{(\delta)} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, u_{Ei}^{(\delta)}$. Ceci s'explique très simplement en comparant les figures 2.4 et 2.5. En effet, on y constate que le champ des déplacements $\vec{u}_L$ en coordonnées de Lagrange est identique, mais de signe opposé au champ $\vec{u}_E$ en coordonnées d'Euler, de sorte qu'il est nécessaire de définir les relations *(2.46)* dans le système des coordonnées d'Euler. Par exemple, si le champ $\vec{u}_L$ en coordonnées de Lagrange est divergent, on obtiendra que $\tau = \text{div}\,\vec{u}_L > 0$. Mais dans le système des coordonnées d'Euler, ce même champ $\vec{u}_E$ devient convergent, de sorte que τ ne pourra être positif que si $\tau = -\text{div}\,\vec{u}_E > 0$.

Conséquence 2: interprétation des tenseurs de distorsion locale

A partir du champ de déplacement virtuel $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r},t)$, il est aisé de donner une interprétation à chacun des différents tenseurs de distorsion locale. En effet, considérons trois points $\boldsymbol{A}_0^{(i)}$ du réseau initial non déformé, repérés par trois vecteurs initiaux infinitésimaux $\vec{a}_0^{(i)} = d\vec{r}^{(i)}$, respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées du référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ (figure 2.6). Dans ce référentiel local, on peut aussi reporter les trois vecteurs $\vec{a}^{(i)}$ correspondants aux points $\boldsymbol{A}^{(i)}$ du réseau réel déformé. Sur la base de cette figure, on constate que pour chacun des vecteurs $\vec{a}^{(i)}$ du solide déformé, il est possible de projeter sur les trois axes de coordonnées les variations $d\vec{u}^{(\delta)(i)}$ du champ de déplacement par déformation, qui satisfont les relations $\vec{a}_0^{(i)} = \vec{a}^{(i)} + d\vec{u}^{(\delta)(i)} = d\vec{r}^{(i)} + d\vec{u}^{(\delta)(i)}$, et de relier ces trois projections à un allongement $\Delta a_i^{(i)}$ dans la direction du vecteur initial $\vec{a}_0^{(i)}$ et à deux angles de rotation ψ_{ji} et ψ_{ki} autour des axes de coordonnées perpendiculaires à $\vec{a}_0^{(i)}$ (afin d'alléger la figure 2.6, la notation $\vec{u}^{(\delta)(i)}$ y est remplacée par la notation $\vec{u}^{d(i)}$).

Les trois allongements relatifs et les six angles générés par les décompositions des trois $d\vec{u}^{(\delta)(i)}$ sont liés aux composantes du tenseur de distorsion locale $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$ par déformation

$$\beta_{ii}^{(\delta)} = -\frac{\partial u_i^{(\delta)}}{\partial x_i} = \frac{-du_i^{(\delta)(i)}}{dx_i^{(i)}} = \frac{\Delta a_i^{(i)}}{a_i^{(i)}} = \Delta\left(\ln a_i^{(i)}\right) = \ln a_i^{(i)} - \ln a_{0i}^{(i)} = \ln\left(\frac{a_i^{(i)}}{a_{0i}^{(i)}}\right) \qquad (2.49)$$

$$\beta_{ji}^{(\delta)} = -\frac{\partial u_j^{(\delta)}}{\partial x_i} = \frac{-du_j^{(\delta)(i)}}{dx_i^{(i)}} = \tan\psi_{ji} \qquad (2.50)$$

On en déduit que les composantes diagonales $\beta_{ii}^{(\delta)}$ mesurent les allongements relatifs dans les trois directions du système de coordonnées, alors que les composantes non diagonales $\beta_{ji}^{(\delta)}$ mesurent les tangentes des angles de rotation locale. Les mêmes interprétations de $\beta_{ii}^{(\delta)}$ et $\beta_{ji}^{(\delta)}$ que celles qui avaient été déduites à la section 1.5 s'imposent donc ici.

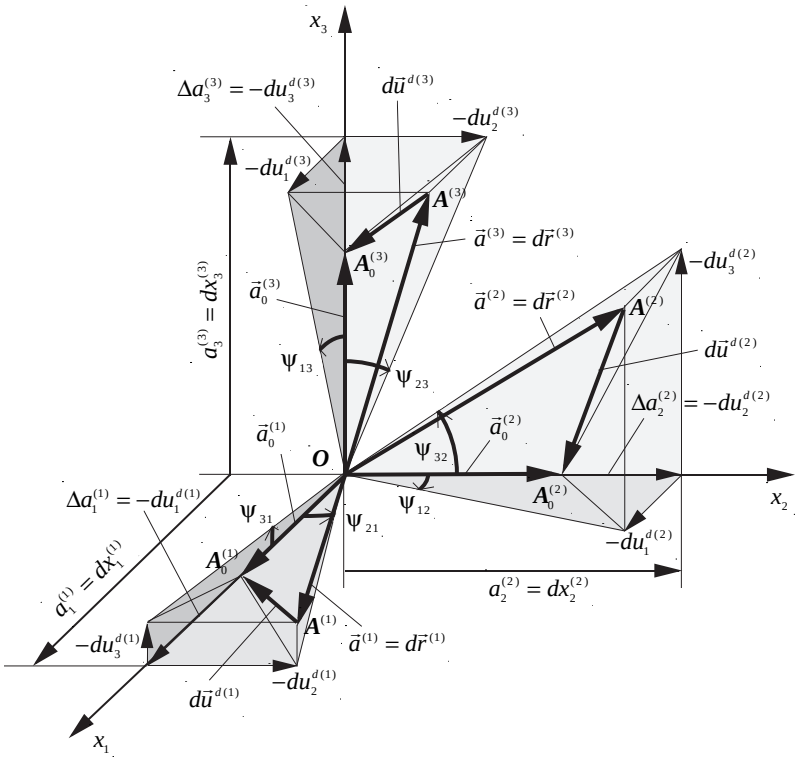


Figure 2.6 *- interprétation des différents tenseurs de distorsion locale*

Ceci se vérifie bien si on explicite les composantes du vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ et les composantes non diagonales des tenseurs de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ et de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ en fonction des angles de rotation ψ_{jk} et ψ_{kj}, ainsi que le scalaire d'expansion τ en fonction des allongements relatifs $a_i^{(i)} / a_{0i}^{(i)}$

$$\begin{cases} \omega_i^{(\delta)} = \dfrac{1}{2}\left(\tan\psi_{jk} - \tan\psi_{kj}\right) \\ \varepsilon_{jk} = \alpha_{jk} = \dfrac{1}{2}\left(\tan\psi_{jk} + \tan\psi_{kj}\right) \\ \tau = \sum_i \ln\left(\dfrac{a_i^{(i)}}{a_{0i}^{(i)}}\right) = \ln\left(\dfrac{\prod a_i^{(i)}}{\prod a_{0i}^{(i)}}\right) \end{cases} \qquad (2.51)$$

Conséquence 3: relation entre les champs de déplacement et de vitesse

Dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$, le champ potentiel de déplacement global $\vec{u}_E(\vec{\xi},t)$ doit être directement lié au champ de vitesse absolue $\vec{\phi}$. Ce lien peut se déduire assez facilement grâce à la figure 2.7.

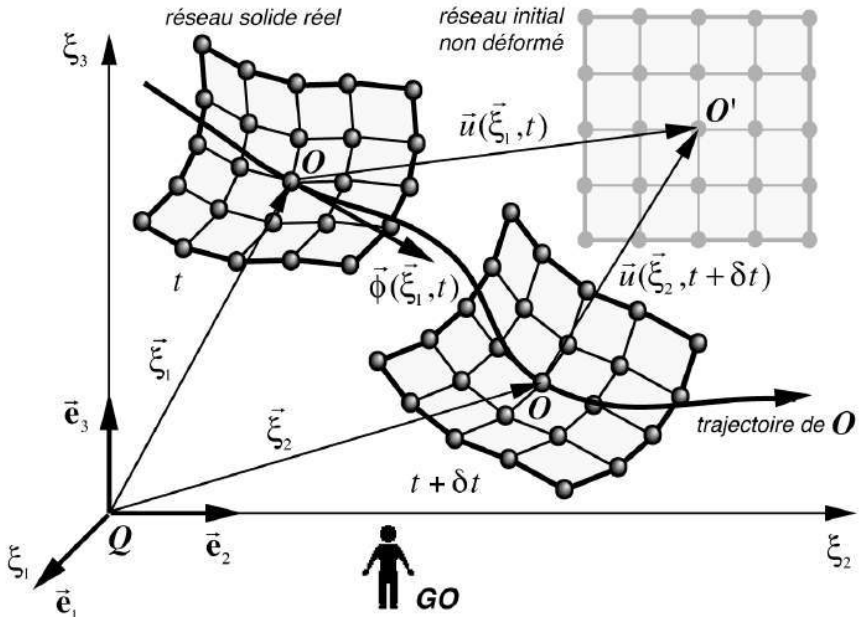


Figure 2.7 *- relation entre champ de vitesse absolu $\vec{\phi}$ et champ de déplacement global $\vec{u}$*

Pour cela, il faut considérer le mouvement dans le référentiel absolu d'un point $\boldsymbol{O}$ d'un réseau solide. Le long de la trajectoire de ce point, on repère les deux points $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_2$ pris à un instant t et à un instant $t+\delta t$ plus tard.

Les vecteurs de déplacement global $\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t)$ et $\vec{u}_E(\vec{\xi}_2,t)$ associés aux deux points choisis de la trajectoire convergent vers le même point du réseau initial non déformé, de sorte que, si δt est suffisamment petit, il vient

$$\vec{\phi}(\vec{\xi}_1,t)\delta t+\vec{u}_E(\vec{\xi}_2,t+\delta t)=\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t) \qquad (2.52)$$

Comme $\vec{\xi}_2=\vec{\xi}_1+\vec{\phi}(\vec{\xi}_1,t)\delta t$, la relation précédente peut se transformer sous la forme suivante

$$\vec{\phi}(\vec{r}_1,t)=\frac{\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t)-\vec{u}_E(\vec{\xi}_2,t+\delta t)}{\delta t}=\frac{\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t)-\vec{u}_E(\vec{\xi}_1+\vec{\phi}\delta t,t+\delta t)}{\delta t}$$

$$=\frac{\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t)-\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t+\delta t)-\dfrac{\partial\vec{u}_E}{\partial\xi_i}\phi_i\delta t}{\delta t}=\frac{\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t)-\vec{u}_E(\vec{\xi}_1,t+\delta t)}{\delta t}-\left(\vec{\phi}\vec{\nabla}\right)\vec{u}_E \qquad (2.53)$$

En passant à la limite $\delta t\to 0$, le champ de vitesse absolu $\vec{\phi}$ devient égal à la dérivée particulaire du champ de déplacement global $\vec{u}$, mais avec un changement de signe

$$\vec{\phi}(\vec{\xi},t)=-\left[\frac{\partial\vec{u}_E}{\partial t}+\left(\vec{\phi}\vec{\nabla}\right)\vec{u}_E\right]=-\frac{d\vec{u}_E}{dt} \qquad (2.54)$$

Dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, le champ de déplacement local $\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)$ doit être directement lié au champ local de vitesse relative $\vec{\varphi}$. Ce lien peut se déduire sur la base de la figure 2.8. Considérons le mouvement dans le référentiel local d'un point $\boldsymbol{B}$ d'un réseau solide. Le long de la trajectoire de ce point, on repère les deux points $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ pris à un instant t et à un instant $t+\delta t$ plus tard.

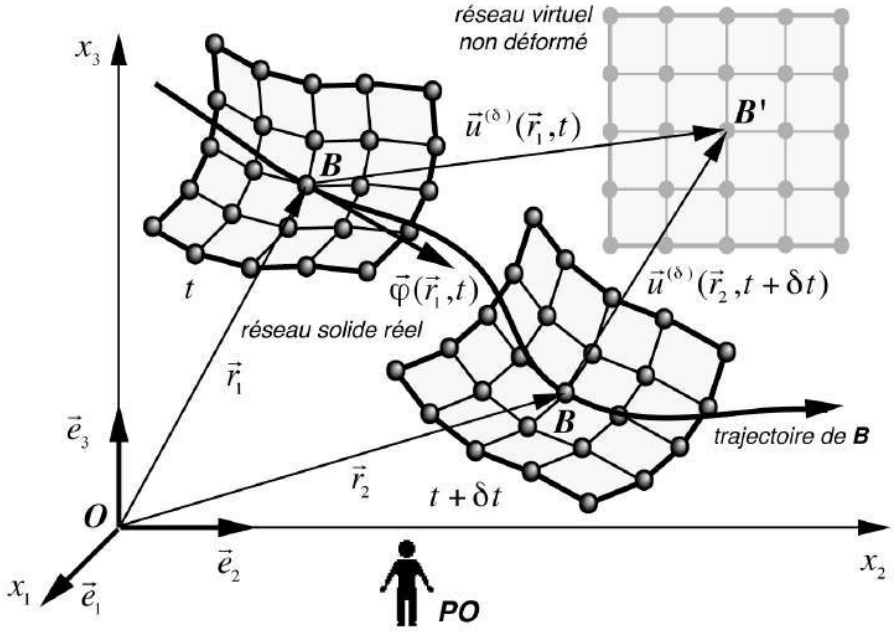


Figure 2.8 *- relation entre champ de vitesse local $\vec{\varphi}$ et champ de déplacement local $\vec{u}^{(\delta)}$*

Lorsque δt est très petit, il vient

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_1,t)\delta t+\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_2,t+\delta t)=\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t) \tag{2.55}$$

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_1,t)=\frac{\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t)-\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_2,t+\delta t)}{\delta t}=\frac{\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t)-\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1+\vec{\varphi}\delta t,t+\delta t)}{\delta t}$$

$$=\frac{\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t)-\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t+\delta t)-\dfrac{\partial\vec{u}_E^{(\delta)}}{\partial x_i}\varphi_i\delta t}{\delta t}=\frac{\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t)-\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r}_1,t+\delta t)}{\delta t}-\left(\vec{\varphi}\vec{\nabla}\right)\vec{u}_E^{(\delta)} \tag{2.56}$$

En passant à la limite $\delta t\to 0$, le champ de vitesse locale $\vec{\varphi}$ devient égal à la dérivée particulaire du champ de déplacement local $\vec{u}^{(\delta)}$, mais avec un changement de signe

$$\vec{\varphi}(\vec{r},t)=-\left[\frac{\partial\vec{u}_E^{(\delta)}}{\partial t}+\left(\vec{\varphi}\vec{\nabla}\right)\vec{u}_E^{(\delta)}\right]=-\frac{d\vec{u}_E^{(\delta)}}{dt} \tag{2.57}$$

Dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, la dérivée partielle de $\vec{u}_E^{(\delta)}$ par rapport au temps a aussi une interprétation physique intéressante qui peut se discuter grâce à la figure 2.9. On observe cette fois les particules du réseau réel qui passent en un point fixe $\boldsymbol{A}$ du référentiel local, repéré par le vecteur-lieu $\vec{r}_{\boldsymbol{A}}$. A l'instant t, c'est la particule $\boldsymbol{C}$ du réseau qui coïncide avec le point $\boldsymbol{A}$, et à l'instant $t+\delta t$ c'est la particule $\boldsymbol{B}$. Les vecteurs de déplacement local associés au point $\boldsymbol{A}$

aux deux instants t et $t+\delta t$ sont notés $\vec{u}_C^{(\delta)}(\vec{r}_A,t)$ et $\vec{u}_B^{(\delta)}(\vec{r}_A,t+\delta t)$ et désignent respectivement les points C' et B' du réseau initial non déformé. L'extrémité de ces vecteurs décrit donc une trajectoire dans l'espace virtuel du réseau initial avec une vitesse $\vec{\psi}(\vec{r}_A,t)$ donnée par la relation

$$\vec{\psi}(\vec{r}_A,t)=\frac{\vec{u}_B^{(\delta)}(\vec{r}_A,t+\delta t)-\vec{u}_C^{(\delta)}(\vec{r}_A,t)}{\delta t}=\frac{\partial \vec{u}^{(\delta)}(\vec{r}_A,t)}{\partial t} \qquad (2.58)$$

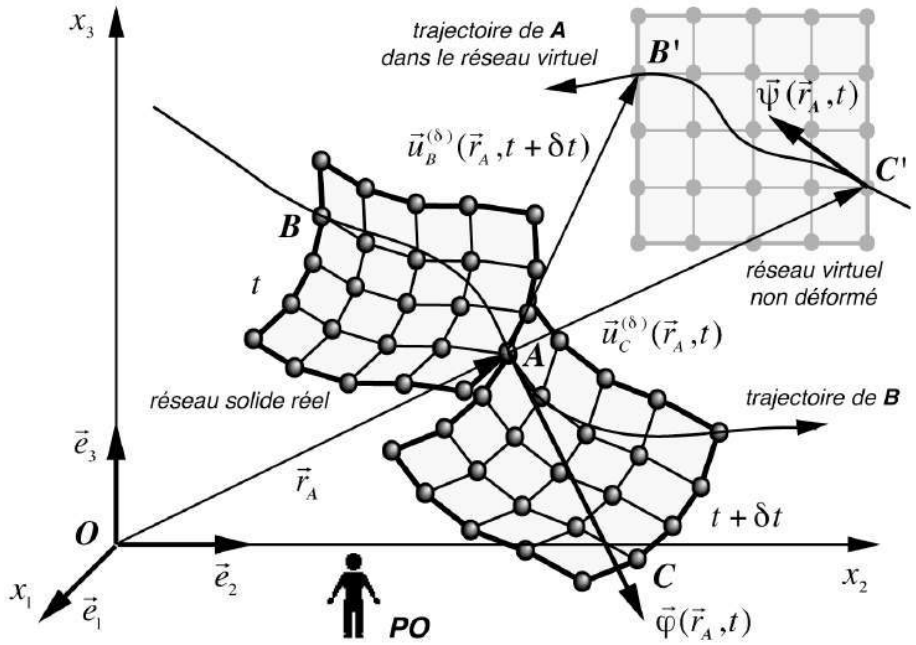


Figure 2.9 *- interprétation de la dérivé partielle du champ local $\vec{u}^{(\delta)}$ par rapport au temps*

On en conclue que la dérivée partielle par rapport au temps du vecteur de déplacement local $\vec{u}_E^{(\delta)}$ représente la vitesse avec laquelle l'extrémité de ce vecteur déplacement parcourt l'espace virtuel du réseau initial non déformé, lorsqu'il est originaire d'un point A fixe dans le référentiel local $Ox_1x_2x_3$.

Conséquence 4: relation entre les deux champs potentiels de déplacement

Les relations *(2.54)* et *(2.57)* peuvent être aisément reliés grâce à la relation *(2.16)*, ce qui permet d'exprimer une relation intéressante entre les champs de déplacement $\vec{u}_E$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}$

$$\frac{d\vec{u}_E}{dt}=-\vec{\phi}(\vec{\xi},t)=-\vec{\phi}(\vec{r},t)=-\vec{\varphi}(\vec{r},t)-\vec{\phi}_O(t)-\dot{\vec{\omega}}_O(t)\wedge\vec{r}=\frac{d\vec{u}_E^{(\delta)}}{dt}-\vec{\phi}_O(t)-\dot{\vec{\omega}}_O(t)\wedge\vec{r} \qquad (2.59)$$

Pour que cette relation soit satisfaite, il suffit que les champs de déplacement $\vec{u}_E$ et $\vec{u}_E^{(\delta)}$ exprimés dans le référentiel local $Ox_1x_2x_3$ soient reliés entre eux par la relation simple

$$\vec{u}_E^{(\delta)}(\vec{r},t)=\vec{u}_E(\vec{r},t)+\vec{\omega}_O(t)\wedge\vec{r}+\vec{u}_{E0}(t) \qquad (2.60)$$

Chapitre 3

Contorsions d'un réseau

Dans un réseau solide, les champs de distorsion $\vec{\beta}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\omega}$, τ représentent l'ensemble des distorsions, des déformations, des cisaillements, des rotations et des expansions volumiques que subissent localement les mailles de ce réseau. Si chaque maille d'un réseau est soumise à un champ de distorsion, qui peut varier d'une maille à l'autre, il doit aussi apparaître des effets plus macroscopiques de flexions et de torsions du milieu solide, liés à la continuité du réseau. Ces *"courbures"* du solide sous l'effet des champs de distorsion seront appelées les *contorsions du réseau*. Elles sont décrites dans la première partie du chapitre.
Dans la deuxième partie, on interprète les conditions de géométrocompatibilité d'un réseau solide en montrant que celles-ci assurent la compacité et la connexité topologique du réseau.

3.1 - Rotationnel et divergence d'un tenseur

Pour établir les tenseurs de contorsion d'un réseau solide, il nous faut en premier lieu trouver les relations existant entre les dérivés spatiales premières et secondes des différents tenseurs topologiques. Ces relations vont être établies *indépendamment du fait que le tenseur* $\vec{\beta}_i$ *peut être défini à partir d'un champ de déplacement* $\vec{u}(\vec{r},t)$ ou $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r},t)$ dans un réseau géométrocompatible, simplement en appliquant les opérateurs vectoriels aux tenseurs de distorsion,.

Le «rotationnel d'un tenseur »

En utilisant les décompositions du tenseur $\vec{\beta}_i$ illustrées dans la figure 1.8 , il est possible de calculer les relations pouvant exister entre les dérivées spatiales de premier ordre de ces tenseurs, en leur appliquant les opérateurs de l'analyse vectorielle ainsi que les lois de distributivité de ces opérateurs. L'application de l'opération du rotationnel à l'expression *(1.36)* du tenseur symétrique $\vec{\varepsilon}_i$ implique la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i - \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = (\vec{e}_i\vec{\nabla})\vec{\omega} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (3.1)$$

En utilisant les relations suivantes de transposition, faciles à vérifier

$$\left[(\vec{e}_i\vec{\nabla})\vec{\omega}\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \quad \text{et} \quad \left[-\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau\right]^{\mathrm{T}} = \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau \qquad (3.2)$$

les expressions précédentes de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i$ peuvent être transposées

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i + \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (3.3)$$

Les relations *(3.1)* et *(3.3)* permettent de trouver l'expression de la partie symétrique du rotationnel du tenseur symétrique $\vec{\varepsilon}_i$, et on constate que celle-ci ne dépend plus que du tenseur

symétrique transverse $\vec{\alpha}_i$

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{S}} = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i + (\vec{e}_i\vec{\nabla})\vec{\omega}\right) + \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{S}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (3.4)$$

La partie anti-symétrique du «rotationnel d'un tenseur »

A partir des relations précédentes, il est possible aussi de faire apparaître des relations directes entre les parties antisymétriques des rotationnels des tenseurs

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\alpha}_k + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\beta}_k + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \qquad (3.5)$$

La trace du «rotationnel d'un tenseur » et la divergence de sa partie anti-symétrique

Le calcul de la divergence des expressions suivantes, représentant les parties antisymétriques des tenseurs β_{ij} , ε_{ij} et α_{ij} respectivement

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = -2\vec{\omega} \quad \text{et} \quad \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\varepsilon}_k \equiv 0 \quad \text{et} \quad \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\alpha}_k \equiv 0 \qquad (3.6)$$

fournit un ensemble de relations concernant la trace des rotationnels de ces tenseurs.

$$\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\beta}_k = \mathrm{div}\left(-\sum_k \vec{e}_k \wedge\; \vec{\beta}_k\right) = 2\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (3.7)$$

On y observe entre autre que la symétrie des tenseurs $\vec{\varepsilon}_i$ et $\vec{\alpha}_i$ implique que la trace de leur rotationnel est identiquement nulle

$$\begin{cases} \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\varepsilon}_k = \mathrm{div}\left(-\sum_k \vec{e}_k \wedge\; \vec{\varepsilon}_k\right) \equiv 0 \\ \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\alpha}_k = \mathrm{div}\left(-\sum_k \vec{e}_k \wedge\; \vec{\alpha}_k\right) \equiv 0 \end{cases} \qquad (3.8)$$

La «divergence d'un tenseur »

On peut encore trouver des relations associées à *la « divergence »* des tenseurs

$$\sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\beta}_k + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \qquad (3.9)$$

et montrer que la divergence d'un tenseur est directement liée à la partie anti-symétrique de son rotationnel

$$\begin{cases} \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\beta}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\beta}_k + \sum_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k\right) + \sum_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{e}_k\vec{\beta}_k\right) \\ \qquad\qquad = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\beta}_k - 2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau \\ \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\varepsilon}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\varepsilon}_k + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau \\ \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\alpha}_k \end{cases} \qquad (3.10)$$

Les opérations de contraction sur les indices

Les dérivées spatiales du tenseur d'ordre deux β_{ij}, représentable sous forme vectorielle, ont été manipulées à l'aide de l'analyse vectorielle. Ces manipulations vectorielles d'objets tensoriels sont en fait des *opérations mathématiques de contraction sur les indices*. A partir des 27 composantes du tenseur d'ordre trois $A_{ijk} = \partial\beta_{ij} / \partial\xi_k$ sont formés des tenseurs d'ordre deux, des vecteurs et des scalaires, comme le montrent bien par exemple les relations *(3.3), (3.5)* et *(3.7)* respectivement.

Il est évidemment possible d'introduire des contractions sur les indices de tenseurs d'ordre supérieur à trois pour former des tenseurs d'ordre deux, des vecteurs ou des scalaires. Par exemple, le rotationnel de la relation *(3.3)* est un tenseur d'ordre deux (9 composantes) résultant de la contraction d'un tenseur d'ordre quatre (81 composantes), et qui vaut, puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \equiv 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left\{\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}\right\} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\sum_k \vec{e}_k\left(\vec{e}_i\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k\right) - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}\right] \qquad (3.11)$$

3.2 - Liens entre dérivés spatiales en cas de géométrocompatibilité

La condition de géométrocompatibilité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = 0$ implique la relation suivante

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\alpha}_i + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} + \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{\alpha}_i + \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}^{(\delta)} - \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\omega}^{(\delta)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau \wedge \vec{e}_i = 0 \qquad (3.12)$$

Avec $\mathrm{div}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = 0$, $\left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\omega}^{(\delta)} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(\delta)}$ et $\vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0(t)$, cette relation conduit directement aux relations suivantes entre dérivées spatiales des champs topologiques dans le cas d'un réseau géométrocompatible

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i - \dfrac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i{}^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \; - \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \\ -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = \mathrm{div}\,\vec{\omega} \; = 0 \end{cases} \qquad (3.13)$$

Nous verrons par la suite que ces relations sont très importantes pour la description de l'évolution spatio-temporelle des milieux solides géométrocompatibles. Si, de plus, un tel solide présente une expansion volumique τ indépendante des coordonnées d'espace, *les dérivées spatiales du vecteur de rotation $\vec{\omega}$ et du vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ sont liées uniquement aux dérivées spatiales du tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$*

$$\tau = \tau(t) \neq \tau(\vec{r},t) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \; - \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \\ \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega}^{(\delta)} = \mathrm{div}\,\vec{\omega} \; = 0 \end{cases} \qquad (3.14)$$

3.3 - Tenseurs de contorsion d'un solide

Le tenseur de contorsion d'un solide

La relation *(3.3)* présente la particularité tout à fait intéressante que, dans un réseau compatible, elle permet de relier directement $\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}}$ au gradient des composantes du vecteur de rotation $\vec{\omega}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \tag{3.15}$$

ce qui signifie qu'il est possible, dans un réseau solide compatible, de trouver les effets d'une variation locale du champ de rotation directement à partir du champ de déformation. Définissons donc un nouveau tenseur $\vec{\chi}_i$ de la façon suivante

$$\vec{\chi}_i = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i + \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} \tag{3.16}$$

Dans un milieu compatible, la signification de ce tenseur peut alors se déduire directement de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i$. Il est en effet intéressant de mesurer les variations spatiales du vecteur de rotation $\vec{\omega}$, puisque $\vec{\omega}$ est un vecteur invariant du milieu solide, c'est-à-dire indépendant du choix du référentiel utilisé pour le calculer. Dans un milieu compatible, la relation *(3.3)* prend la forme suivante

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\chi}_i = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i = \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\omega} + \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \tag{3.17}$$

Comme les composantes de ce tenseur sont étroitement liées aux dérivées spatiales du vecteur rotation $\vec{\omega}$, celles-ci doivent mesurer des variations de rotation au sein du solide, telles que des *torsions* ou des *flexions*. On peut définir plus précisément la signification des composantes de ce tenseur en utilisant deux exemples typiques de variations spatiales de $\vec{\omega}$.

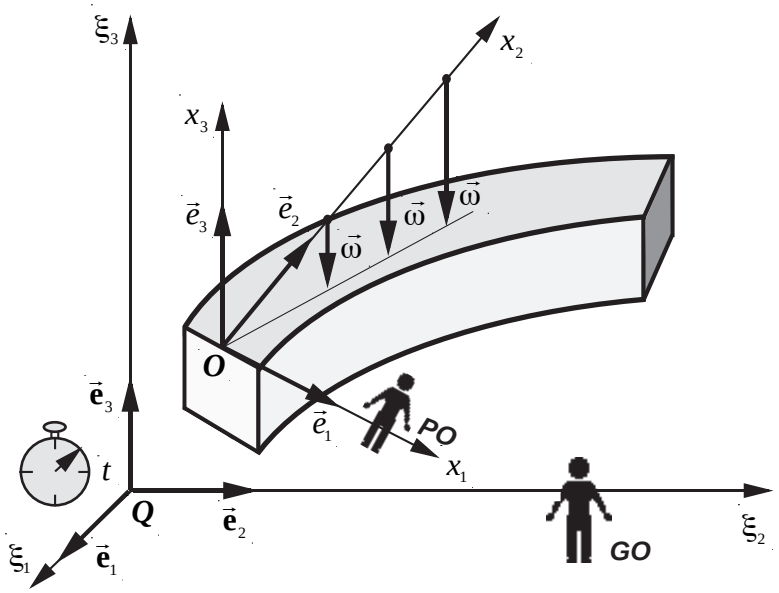


Figure 3.1 *- flexion du milieu solide*

Dans le premier exemple, un milieu fléchi présente un vecteur rotation parallèle à l'axe $\boldsymbol{O}x_3$, et qui s'accroît dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, comme représenté à la figure 3.1. En ce cas, il existe une *composante non diagonale* du tenseur $\vec{\chi}_i$ qui n'est pas nulle, et cette composante est associée à la *flexion* du solide

$$\chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \neq 0 \qquad (3.18)$$

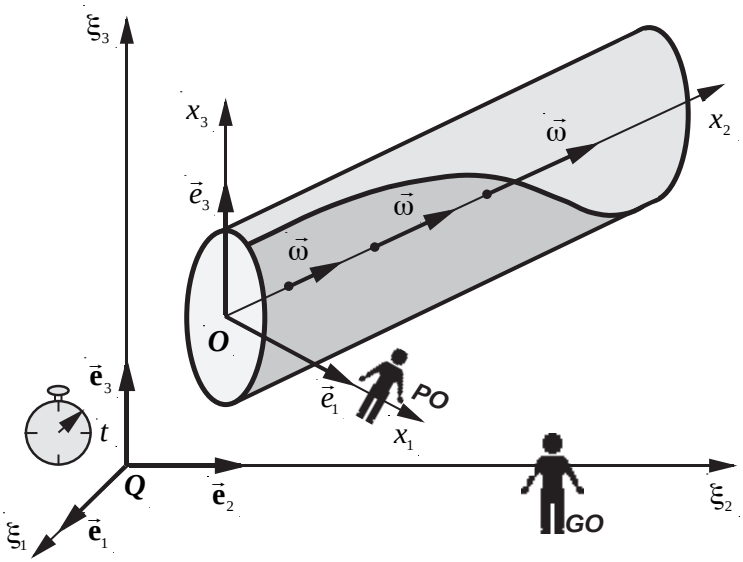


Figure 3.2 *- torsion du milieu solide*

Dans le deuxième exemple (figure 3.2), qui représente une *torsion* du milieu solide, par accroissement le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ d'un vecteur rotation parallèle à l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, c'est une *composante diagonale* du tenseur $\vec{\chi}_i$ qui devient forcément non nulle, puisque

$$\chi_{22} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \neq 0 \qquad (3.19)$$

A partir de ces deux exemples, il devient parfaitement clair que les composantes du tenseur $\vec{\chi}_i$ mesurent *les flexions* et *les torsions* du milieu solide, qui seront appelées du nom générique de *contorsions du milieu*. Le rotationnel de ce nouveau *tenseur de contorsion* $\vec{\chi}_i$ satisfait alors une relation intéressante

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left\{\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}\right\} \qquad (3.20)$$

En effet, dans un milieu compatible, le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$ satisfait une relation de compatibilité qui n'est rien d'autre que la relation de compatibilité du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = 0 \qquad (3.21)$$

Ces relations sont appelées *les équations de De Saint-Venant*. Comme le tenseur $\vec{\varepsilon}_i$ est symétrique, elles représentent 6 relations non triviales entre les dérivés partielles d'ordre 2 des ε_{ij}.
A noter encore que la trace de $\vec{\chi}_i$ est identiquement nulle, et donc que $\vec{\chi}_i$ est *un tenseur transverse*, ce qui est dû, d'après la relation *(1.70),* au fait que le tenseur $\vec{\varepsilon}_i$ est symétrique

$$\chi = \sum_k \vec{e}_k \vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right]^{\mathrm{T}} = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k \equiv 0 \qquad (3.22)$$

Le vecteur de flexion d'un solide

A partir du tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$, il est possible de construire un vecteur invariant $\vec{\chi}$ qui dépend de la partie antisymétrique du tenseur $\vec{\chi}_i$. Pour cela, on peut définir le vecteur $\vec{\chi}$ par la relation suivante

$$\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k \qquad (3.23)$$

Comme la partie anti-symétrique d'un tenseur est égale à la partie anti-symétrique de son transposé, changée de signe, on peut écrire

$$\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \wedge \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right]^{\mathrm{T}} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k \qquad (3.24)$$

En utilisant alors la relation *(3.5),* on obtient pour le vecteur $\vec{\chi}$ la relation

$$\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} - \sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k \qquad (3.25)$$

Ainsi, dans un milieu compatible, $\vec{\chi}$ dépend directement du vecteur rotation $\vec{\omega}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\chi} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \qquad (3.26)$$

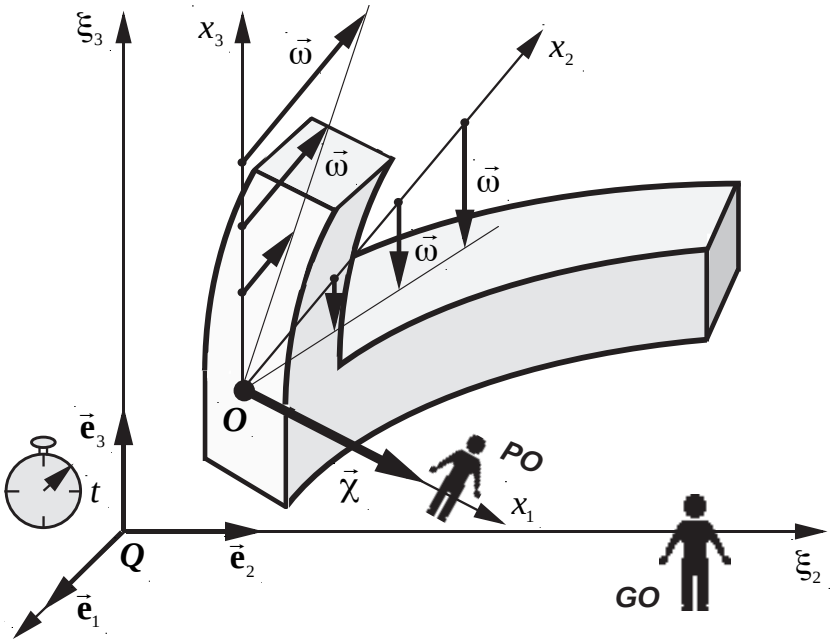


Figure 3.3 *- définition du vecteur de flexion* $\vec{\chi}$

Comme $\vec{\chi}$ dérive d'un rotationnel, il ne contient que des termes du type $\partial\omega_i / \partial x_j$, avec $i \neq j$. Il ne dépend donc que des composantes non diagonales du tenseur $\vec{\chi}_i$, qui sont reliées, comme vu précédemment, aux *flexions* du milieu. On peut vérifier cette assertion avec l'exemple de déformation reporté à la figure 3.3, dans lequel $\vec{\omega}$ possède des composantes selon les axes $\boldsymbol{O}x_2$ et $\boldsymbol{O}x_3$, qui s'accroissent dans les directions $\boldsymbol{O}x_3$ et $\boldsymbol{O}x_2$ respectivement

$$\vec{\omega} = \omega_3(x_2)\vec{e}_3 + \omega_2(x_3)\vec{e}_2 \qquad (3.27)$$

ce qui conduit au tenseur $\vec{\chi}_i$ suivant

$$\vec{\chi}_1 = 0 \qquad \vec{\chi}_2 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\vec{e}_3 \qquad \vec{\chi}_3 = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\vec{e}_2 \tag{3.28}$$

dont est déduit le vecteur $\vec{\chi}$, grâce à la relation *(3.10)*

$$\vec{\chi} = \vec{e}_2 \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\vec{e}_3 + \vec{e}_3 \wedge \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\vec{e}_2 = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right)\vec{e}_1 \tag{3.29}$$

Le vecteur $\vec{\chi}$ est perpendiculaire à la courbure générale du milieu par flexion. Il possède la direction du rayon de courbure, et son intensité est inversement proportionnelle au rayon de courbure moyen dans les directions $\boldsymbol{O}x_3$ et $\boldsymbol{O}x_2$. Il sera par conséquent appelé *vecteur de flexion* $\vec{\chi}$ du milieu solide. Le vecteur $\vec{\chi}$ satisfait une relation intéressante concernant sa divergence. Comme la divergence d'un rotationnel est nulle, on a, d'après *(3.25)*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{\chi} = \operatorname{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_k\right) \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{\chi} = -\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_k \end{aligned} \tag{3.30}$$

Cette relation montre que $\operatorname{div}\vec{\chi}$ est en fait égale à *la trace* de $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\chi}_k$ changée de signe.
Dans un milieu compatible, cette relation montre que le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ est aussi soumis à une relation de compatibilité, qui assure que le champ de flexion est non divergent

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{\chi} = 0 \tag{3.31}$$

Le tenseur de torsion d'un solide: partie symétrique transverse du tenseur de contorsion

Comme le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$ est un tenseur transverse (de trace nulle), sa partie symétrique $\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}}$ est un tenseur symétrique transverse, qui ne peut donc pas être décomposé d'avantage, et qui s'obtient par les relations

$$\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}} = \vec{\chi}_i + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k\right) = \vec{\chi}_i + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \vec{\chi} \tag{3.32}$$

Ce tenseur symétrique transverse satisfait les relations suivantes, faciles à démontrer en utilisant l'opération de transposition $2\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}} = \vec{\chi}_i + \left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{T}}$

$$\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}} = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{S}} = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{S}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\omega} + \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{S}} - \vec{e}_i \operatorname{div}\vec{\omega} \tag{3.33}$$

La partie symétrique transverse $\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}}$ du tenseur de contorsion représente donc les torsions du solide puisque il est obtenu à partir du tenseur de contorsion dont on retire sa partie anti-symétrique représentant les flexions. On appellera donc $\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}}$ le *tenseur de torsion* du solide.
La description complète des distorsions et des contorsions d'un réseau solide géométrocompatible présente ainsi une superbe symétrie parfaitement mise en évidence à la figure 3.3. On peut aussi dresser le tableau 3.1 des relations permettant une description topologique complète des contorsions et de la compatibilité d'un réseau solide. Dans ce tableau figurent en encadrés les termes dépendant du rotationnel du tenseur de distorsion et de la divergence du vecteur de rotation, qui sont évidemment nuls dans un milieu satisfaisant la condition de compatibilité.
Il faut noter ici que la partie symétrique transverse de $\vec{\chi}_i$ ne dépend plus directement de l'expansion volumique τ, mais exclusivement des cisaillements $\vec{\alpha}_i$. C'est pourquoi *les torsions* $\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}}$ *d'un solide sont étroitement liées aux cisaillements purs de ce solide*. Une autre re-

marque importante s'ajoute ici concernant les contorsions topologiques d'un milieu: comme le gradient du scalaire d'expansion volumique τ n'intervient que dans la partie antisymétrique du tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$, et comme cette partie antisymétrique est représentée par le vecteur de flexion $\vec{\chi}$, il est évident que *les flexions $\vec{\chi}$ d'un solide sont étroitement liées aux expansions volumiques τ de ce milieu*.

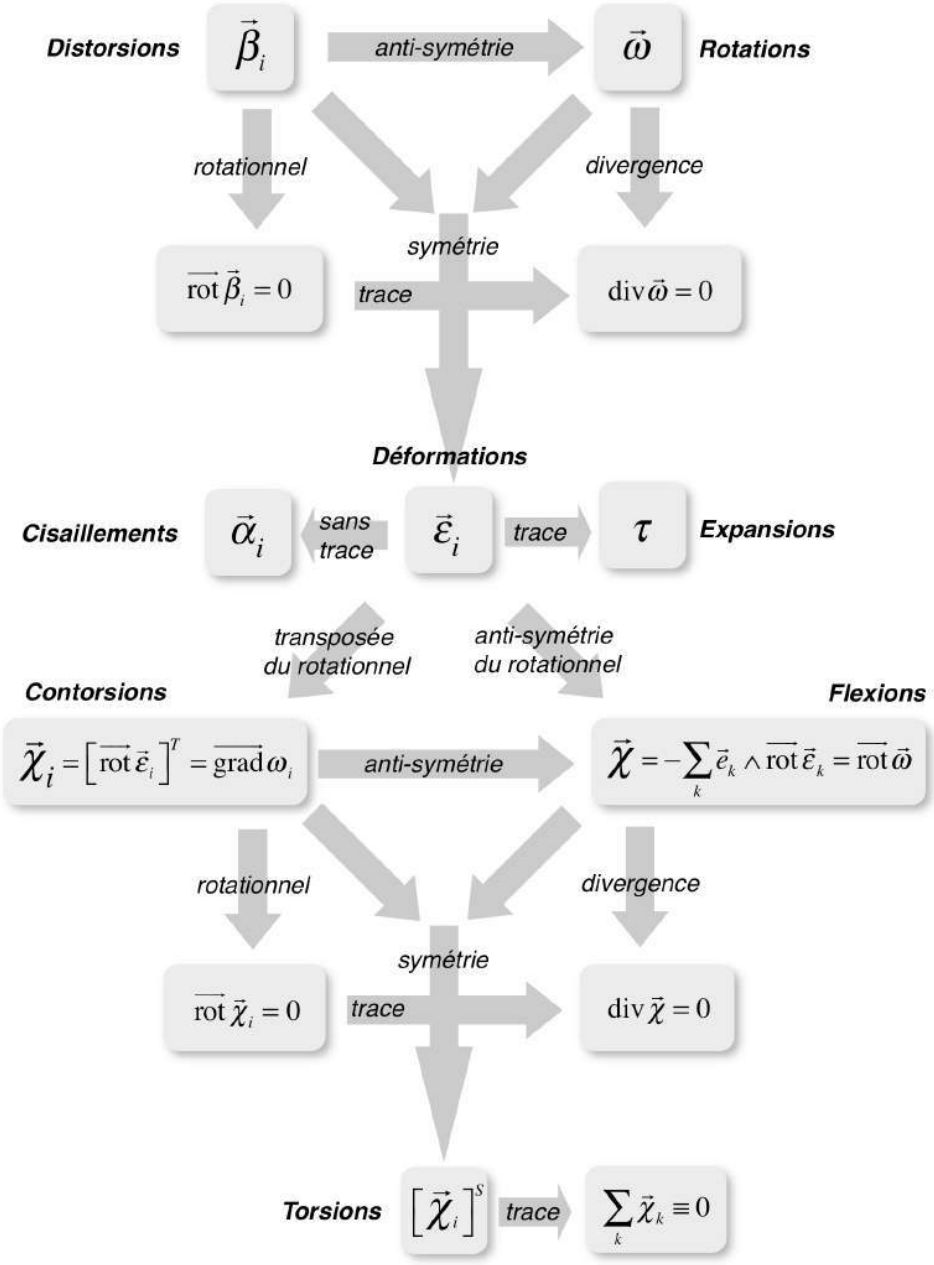


Figure 3.4 *- description complète des distorsions et des contorsions d'un réseau solide géométrocompatible*

Tableau 3.1 - Les contorsions et la géométrocompatibilité d'un réseau solide

Tenseur transverse de contorsion

$$\vec{\chi}_i = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i \underbrace{\boxed{+\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}}}_{=0} \quad (1)$$

Vecteur de flexion

$$\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau$$

$$= \sum_k \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \underbrace{\boxed{-\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k}}_{=0} \quad (2)$$

Trace identiquement nulle du tenseur de contorsion

$$\chi = \sum_k \vec{e}_k \vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right]^{\mathrm{T}} = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k \equiv 0 \quad (3)$$

Partie symétrique transverse de torsion

$$\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}} = \vec{\chi}_i + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \vec{\chi} = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{S}} = \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{S}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \underbrace{\boxed{+\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{S}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}}}_{=0} \quad (4)$$

Géométrocompatibilité des distorsions et des rotations

$$\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u_i \quad (5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i} = 0 \quad (6)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \quad (7) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{\omega} = \boxed{\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k} = 0 \quad (8)$$

Géométrocompatibilité des contorsions et des flexions

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{e}_i\tau\right)$$

$$= \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left\{\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\omega}\right\}} = 0 \quad (9)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\chi} = -\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\Delta\tau$$

$$= \boxed{\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k} = \boxed{-\mathrm{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k\right)} = 0 \quad (10)$$

3.4 - Interprétation physique des équations de compatibilité

Les diverses équations de compatibilité doivent avoir une signification physique qui va être explicitée dans cette section.

L'absence de dislocations et la continuité du champ de déplacement

La condition de compatibilité $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$ pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$ implique que le champ de déplacement $\vec{u}$ possède de bonnes propriétés de continuité. Pour le montrer, il suffit de calculer $d\vec{u}$ sur un contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du milieu

$$\oint_{\boldsymbol{C}} d\vec{u} = \sum_k \vec{e}_k \oint_{\boldsymbol{C}} du_k = \sum_k \vec{e}_k \oint_{\boldsymbol{C}} \overrightarrow{\text{grad}}\, u_k d\vec{r} = -\sum_k \vec{e}_k \oint_{\boldsymbol{C}} \vec{\beta}_k d\vec{r} \qquad (3.34)$$

En utilisant le théorème du rotationnel, une relation intégrale de compatibilité est obtenue sur la surface $\boldsymbol{S}$ délimitée par le contour $\boldsymbol{C}$

$$\oint_{\boldsymbol{C}} d\vec{u} = -\sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\beta}_k d\vec{S} = 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{C} \qquad (3.35)$$

On considère alors le champ de déplacement $\vec{u}$ associé à un contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du solide, tel celui représenté à la figure 3.5. Pour ce contour fermé, de $\boldsymbol{A}$ à $\boldsymbol{B}$, il faut avoir

$$\oint_{\boldsymbol{C}} d\vec{u} = \vec{u}_{\boldsymbol{B}} - \vec{u}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (3.36)$$

Ainsi, si un milieu présente un champ de distorsions satisfaisant la condition de compatibilité $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$, le vecteur de fermeture $\vec{\boldsymbol{B}}$, appelé *vecteur de Burgers* [1], du contour $\boldsymbol{C'}$ généré par les vecteurs $\vec{u}$ est nul, ce qui signifie effectivement, d'un point de vue topologique, qu'*il n'existe pas de discontinuités des déplacements*, appelées *dislocations* [2], au sein du milieu.

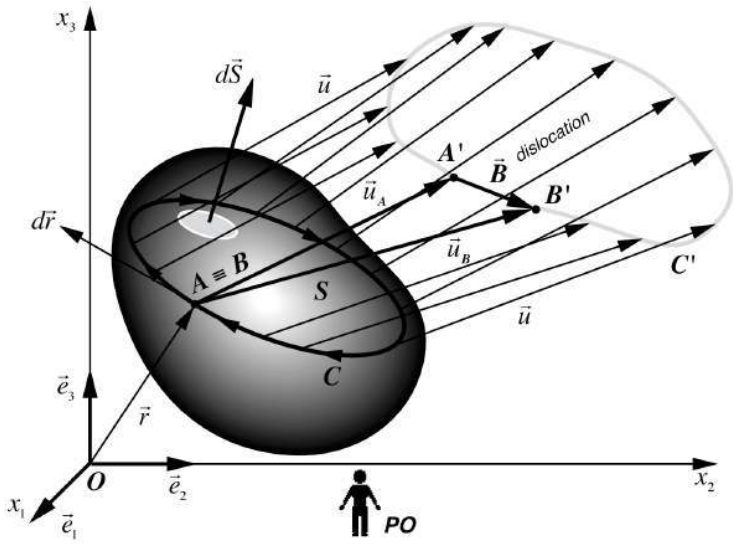


Figure 3.5 *- interprétation de la condition de compatibilité* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$

---

[1] *J. M. Burgers, Proc. Kon. Ned. Akad. Weten, vol.42, p. 293, 378, 1939*

[2] *A. E. H. Love, «A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity», 3rd edition, Cambridge U.P., 1920*

L'existence d'un champ de déplacement $\vec{u}$ sans discontinuités permet d'assurer :
- la *connexité topologique* du milieu, c'est-à-dire, d'un point de vue physique, le fait qu'il n'y ait pas eu de localisation des distorsions, telles des déchirures suivies d'un glissement des mâchoires l'une par rapport à l'autre,
- la *compacité topologique* du milieu, c'est-à-dire, d'un point de vue physique, le fait qu'il n'est pas apparu de formations de cavités au sein du milieu. En résumé, la condition $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$ *assure la solidité du milieu*.

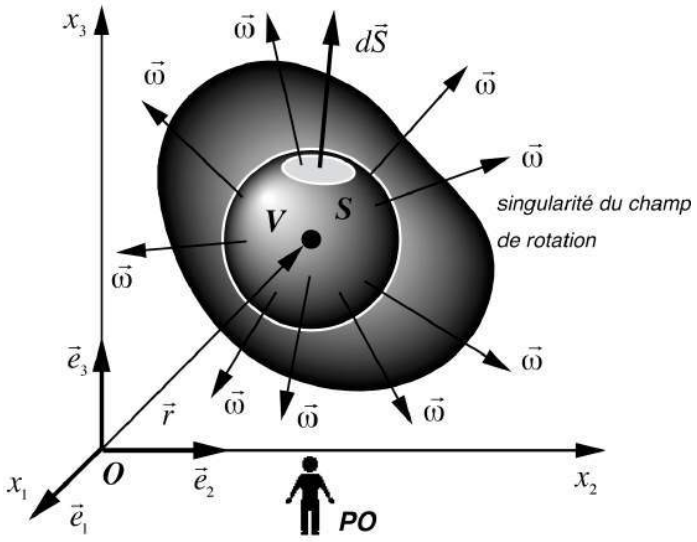


Figure 3.6 - *interprétation de la condition de compatibilité* $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$

L'absence de singularités divergentes du champ de rotation

Pour trouver la signification de la condition de compatibilité $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$ pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, le flux du vecteur de rotation $\vec{\omega}$, c'est-à-dire la grandeur $\vec{\omega}d\vec{S} = \vec{\omega}\vec{n}dS = \omega_\perp dS$ définie par le produit scalaire de $\vec{\omega}$ avec l'élément de surface $d\vec{S}$, est intégré sur une surface fermée $\boldsymbol{S}$ entourant un volume $\boldsymbol{V}$ de solide (figure 3.6).
En appliquant le théorème de la divergence, il vient les relations intégrales suivantes pour un milieu satisfaisant la condition de compatibilité associée au vecteur de rotation

$$\oiint_{\boldsymbol{S}} \omega_\perp dS = \oiint_{\boldsymbol{S}} \vec{\omega} d\vec{S} = \iiint_{\boldsymbol{V}} \mathrm{div}\,\vec{\omega} dV = 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{S} \qquad (3.37)$$

Ainsi, la condition de compatibilité pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, qui stipule que le champ des rotations est non-divergent, implique qu'*il n'existe pas de singularités du champ de rotation* $\vec{\omega}$ au sein du solide, donc *pas de torsions divergentes* telle celle représentée à la figure 3.6.

L'absence de désinclinaisons et la continuité du champ de rotation par déformation

La condition de compatibilité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = 0$ du tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$ présente aussi une interprétation intéressante. Si $d\vec{\omega}$ est intégré sur un contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du milieu, il vient, si le milieu est compatible

$$\oint_C d\vec{\omega}^{(\varepsilon)} = \sum_k \vec{e}_k \oint_C d\omega_k^{(\varepsilon)} = \sum_k \vec{e}_k \oint_C \overrightarrow{\text{grad}}\,\omega_k^{(\varepsilon)} d\vec{r} = \sum_k \vec{e}_k \oint_C \vec{\chi}_k d\vec{r} \qquad (3.38)$$

Dans cette relation a été introduit le vecteur de rotation $\vec{\omega}^{(\varepsilon)}$ qui représente *les rotations directement déduites du tenseur de déformation* $\vec{\varepsilon}_i$, et qui s'identifie au vecteur local de rotation $\vec{\omega}$ dans les milieux compatibles. Il vient alors

$$\oint_C d\vec{\omega}^{(\varepsilon)} = \sum_k \vec{e}_k \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\chi}_k \, d\vec{S} = \sum_k \vec{e}_k \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right]^{\text{T}} d\vec{S} = 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{C} \qquad (3.39)$$

En représentant maintenant le champ de rotation $\vec{\omega}^{(\varepsilon)}$ sur un contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du milieu (figure 3.7), il faut que, de $\boldsymbol{A}$ à $\boldsymbol{B}$

$$\oint_C d\vec{\omega}^{(\varepsilon)} = \vec{\omega}_{\boldsymbol{B}}^{(\varepsilon)} - \vec{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{(\varepsilon)} = \vec{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \qquad (3.40)$$

De cette relation, il découle que la condition de compatibilité $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\chi}_i = 0$ implique que le vecteur de fermeture $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$, appelé *vecteur de Frank* [3], soit nul, ce qui signifie d'un point de vue topologique et physique qu'*il n'existe pas de discontinuités des rotations par déformation,* appelées *désinclinaisons (disclinations* [4] en anglais), au sein du milieu. Comme la condition de compatibilité pour le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$ est aussi la condition de *compatibilité pour le tenseur de déformation* $\vec{\varepsilon}_i$, on déduit que les équations de *de Saint-Venant (3.21)* pour $\vec{\varepsilon}_i$ assurent de fait la continuité des rotations par déformation.

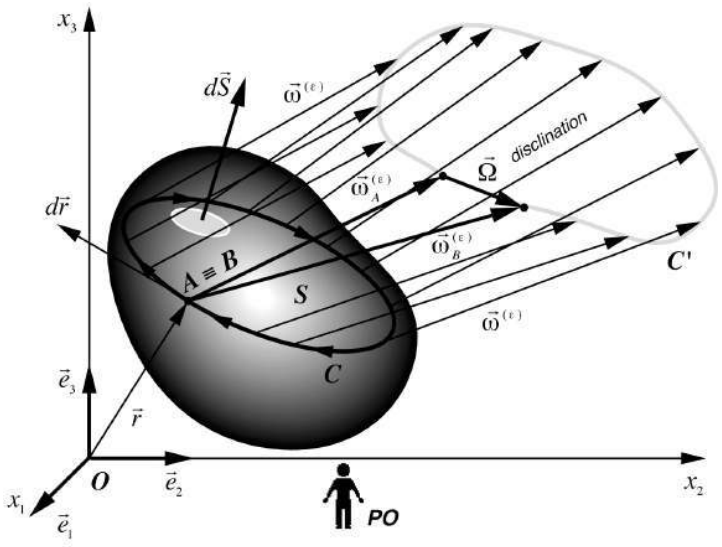


Figure 3.7 *- interprétation de la condition de compatibilité* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\chi}_i = 0$

L'absence de singularités divergentes du champ de flexion

La condition de compatibilité $\text{div}\,\vec{\chi} = 0$ du vecteur de flexion $\vec{\chi}$ s'interprète de la manière suivante. En intégrant le flux de $\vec{\chi}$ sur une surface fermée $\boldsymbol{S}$ entourant un volume $\boldsymbol{V}$ de milieu

[3] *R. DeWit, «Theory of disclinations II, III and IV», J. of the Nat. Bureau of Standards A, vol. 77A, p.49-100, p. 359-368, and p. 607-658, 1973*

[4] *F. C. Frank, Disc. Faraday Soc., vol. 25, p. 19, 1958*

(figure 3.8), il vient, en utilisant le théorème de la divergence et la définition de $\vec{\chi}$ à partir du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$

$$\oiint_S \chi_\perp dS = \oiint_S \vec{\chi} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\chi} dV = \sum_k \vec{e}_k \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\varepsilon}_k dV = 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{S} \tag{3.41}$$

Ainsi, la condition de compatibilité sur $\vec{\chi}$ implique que le champ de flexion est non-divergent, et qu'*il n'existe donc pas de singularités du champ de flexion* $\vec{\chi}$ au sein du milieu, telle celle représentée à la figure 3.8.

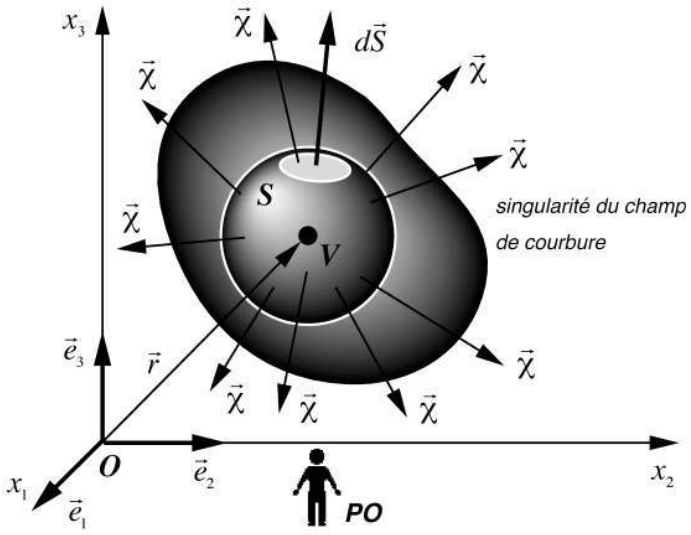


Figure 3.8 *- interprétation de la condition de compatibilité* $\operatorname{div} \vec{\chi} = 0$

Il faut noter au passage que la condition de compatibilité pour le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ correspond en fait à la *condition de compatibilité pour la partie antisymétrique du tenseur* $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i$ puisque

$$\operatorname{div} \vec{\chi} = -\operatorname{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\varepsilon}_k \right) = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\varepsilon}_k \tag{3.42}$$

3.5 - Conditions de passage à travers une interface compatible

Les *conditions de passage* pour les tenseurs topologiques au travers d'une interface compatible entre deux milieux, c'est-à-dire une interface pour laquelle les champs de déplacements de part et d'autre de l'interface sont les mêmes, se déduisent des conditions de compatibilité. Il suffit en effet d'écrire l'intégrale de la condition de compatibilité prise sur un volume extra-mince, mobile avec l'interface, et dont chaque face se situe de part et d'autre de l'interface (figure 3.9).
La condition de compatibilité pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$ implique les relations suivantes sur le volume mobile V

$$\iiint_V \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\beta}_i \, dV = \oiint_S d\vec{S} \wedge \vec{\beta}_i = \iint_{S_1} \left(\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\beta}_i^{(1)} \right) dS - \iint_{S_2} \left(\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\beta}_i^{(2)} \right) dS = 0 \tag{3.43}$$

de sorte que les composantes tangentielles des $\vec{\beta}_i$ sont égales de chaque côté de l'interface

$$\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\beta}_i^{(1)} = \vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\beta}_i^{(2)} \tag{3.44}$$

L'interprétation topologique de cette condition de passage est simple. En effet, en introduisant le fait que, dans un milieu compatible, le tenseur $\vec{\beta}_i$ dérive du gradient d'un champ de déplacement $\vec{u}$, par la relation $\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i$, il est possible de réécrire les intégrales sur les surfaces $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ sous la forme

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i^{(1)} \right) dS - \iint_{S_2} \left(\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i^{(2)} \right) dS = 0 \qquad (3.45)$$

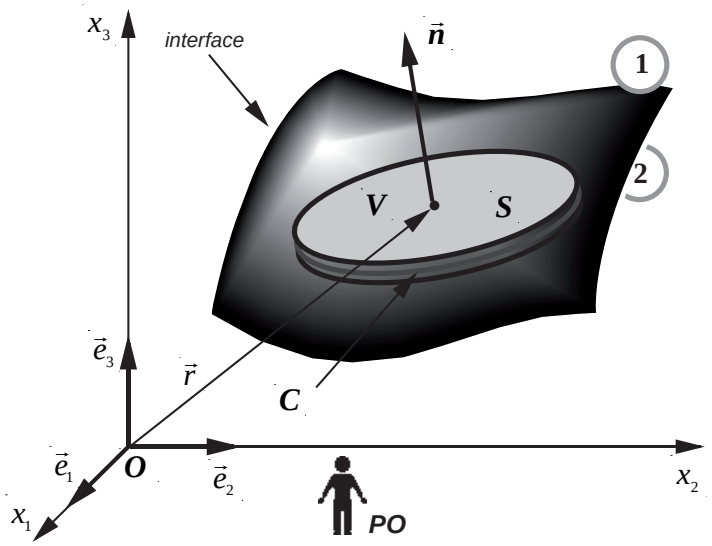


Figure 3.9 *- passage à travers une interface compatible entre deux milieux solides*

Le théorème du gradient appliqué à cette dernière relation conduit à l'expression

$$\oint_C u_i^{(1)} d\vec{r} - \oint_C u_i^{(2)} d\vec{r} = 0 \qquad (3.46)$$

dans laquelle C est le contour mobile situé à l'intersection de la surface mobile avec l'interface entre les deux milieux (figure 3.9). Pour que cette relation soit satisfaite quel que soit le contour $\boldsymbol{C}$ choisi, il faut que

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} \qquad (3.47)$$

Autrement dit, la condition de passage *(3.47)* implique bien que les déplacements $\vec{u}$ de part et d'autre de l'interface sont égaux, et donc que les deux milieux en contact ne peuvent ni se décoller, ni glisser l'un par rapport à l'autre (interface compatible).

La relation de compatibilité pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ implique les relations suivantes à l'interface

$$\iiint_V \text{div}\, \vec{\omega}\, dV = \oiint_S \vec{\omega} d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{\omega}^{(1)} \vec{\boldsymbol{n}} dS - \iint_{S_2} \vec{\omega}^{(2)} \vec{\boldsymbol{n}} dS = 0 \qquad (3.48)$$

qui ne peuvent être satisfaites que si

$$\vec{\omega}^{(1)} \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\omega}^{(2)} \vec{\boldsymbol{n}} \qquad (3.49)$$

L'interprétation de cette condition de passage est immédiate puisqu'elle assure que la composante normale du champ de rotation locale est conservée de part et d'autre de l'interface entre les deux milieux; elle empêche par conséquent un glissement à l'interface par rotation d'un mi-

lieu par rapport à l'autre.

Les relations intégrales suivantes sur l'interface peuvent être déduites de la condition de compatibilité pour le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$

$$\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i dV = \oiint_S d\vec{S} \wedge \vec{\chi}_i = \iint_{S_1} \left(\vec{n} \wedge \vec{\chi}_i^{(1)}\right) dS - \iint_{S_2} \left(\vec{n} \wedge \vec{\chi}_i^{(2)}\right) dS = 0 \qquad (3.50)$$

Pour les satisfaire, il faut que les composantes tangentielles des $\vec{\chi}_i$ soient conservées de part et d'autre de l'interface, ce qui s'écrit

$$\vec{n} \wedge \vec{\chi}_i^{(1)} = \vec{n} \wedge \vec{\chi}_i^{(2)} \qquad (3.51)$$

Pour trouver une interprétation topologique de cette condition de passage, il faut décomposer l'intégrale de surface en deux parties et se rappeler que, dans un milieu compatible, le tenseur $\vec{\chi}_i$ est directement relié aux gradients des composantes du champ de rotation $\vec{\omega}^{\varepsilon}$ associé aux déformations $\vec{\varepsilon}_i$, de sorte que

$$\iint_{S_1} \left(\vec{n} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i^{\varepsilon(1)}\right) dS - \iint_{S_2} \left(\vec{n} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_i^{\varepsilon(2)}\right) dS = 0 \qquad (3.52)$$

Avec le théorème du gradient, il vient

$$\oint_C \omega_i^{\varepsilon(1)} d\vec{r} - \oint_C \omega_i^{\varepsilon(2)} d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_i^{\varepsilon(1)} = \omega_i^{\varepsilon(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}^{\varepsilon(1)} = \vec{\omega}^{\varepsilon(2)} \qquad (3.53)$$

Autrement dit, la condition de passage *(3.53)* assure que les rotations $\vec{\omega}^{\varepsilon}$ implicitement contenues dans le tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ (dont on déduit le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$) sont égales de part et d'autre de l'interface entre les deux milieux.

L'équation de compatibilité pour le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ implique la relation intégrale suivante sur l'interface

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\chi}\, dV = \oiint_S \vec{\chi} d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{\chi}^{(1)} \vec{n} dS - \iint_{S_2} \vec{\chi}^{(2)} \vec{n} dS = 0 \qquad (3.54)$$

dont on déduit que la composante normale du vecteur de flexion doit être conservée de part et d'autre de l'interface

$$\vec{\chi}^{(1)} \vec{n} = \vec{\chi}^{(2)} \vec{n} \qquad (3.55)$$

3.6 - Exemples de champs de flexion et de torsion

Par des exemples simples de champs de déplacement $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r},t)$ propres à des déformations connues du milieu, ce paragraphe permettra de montrer que les tenseurs topologiques $\vec{\chi}_i$ et $\vec{\chi}$ décrivent parfaitement les contorsions, c'est-à-dire les flexions et les torsions pouvant apparaître au sein d'un milieu solide.

La flexion pure d'un réseau solide

Soit le champ de déplacement statique $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r})$ suivant dans le voisinage de l'origine du référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, qui ne présente qu'une seule composante dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_3$

$$\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r}) = \left(R - \sqrt{R^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2}\right) \vec{e}_3 \quad \text{pour} \quad |x_1| < R \quad \text{et} \quad |x_2| < R \qquad (3.56)$$

où les constantes α et β peuvent prendre les valeurs -1, 0 ou 3.

Si la déformation des plans horizontaux d'un solide soumis à un tel champ de déplacement est représentée graphiquement, il est observé *une courbure des plans par flexion* dépendant de la valeur des paramètres α et β, comme le montrent les quatre exemples de la figure 3.10.

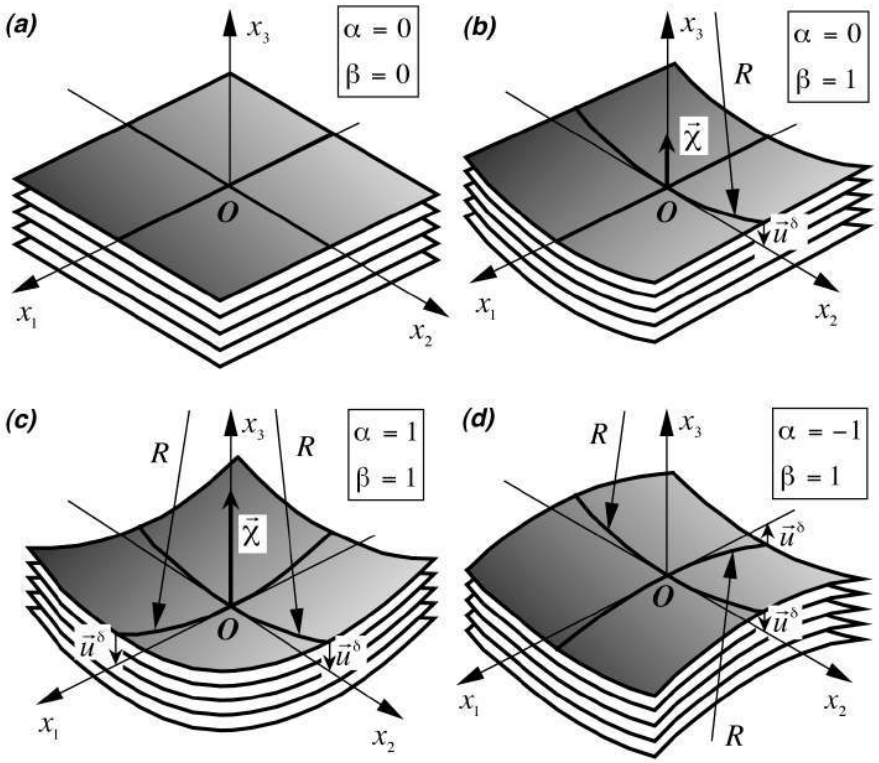


Figure 3.10 *- courbures par flexion pure au sein d'un réseau solide*

On peut vérifier que l'expression mathématique choisie ici pour le champ de déplacement correspond en fait à un arc de cercle de rayon R dans les plans $\boldsymbol{O}x_1x_3$ et $\boldsymbol{O}x_2x_3$, dont la courbure est orientée vers le haut ou vers le bas suivant que le signe des paramètres α et β est positif ou négatif. Si α et β sont tous deux nuls, il n'apparaît évidemment aucune déformation (figure 3.10a). Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, les plans horizontaux sont des portions d'un cylindre de rayon R (figure 3.10b). Si α et β valent 1, c'est une portion de sphère de rayon R (figure 3.10c), et si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, les plans horizontaux présentent un point de selle à l'origine des coordonnées (figure 3.10d).

Grâce aux relations *(2.48)*, les tenseurs de distorsion du solide se déduisent du vecteur de déplacement $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r})$. L'expansion volumique τ du solide est nulle, car $\tau = -\mathrm{div}\vec{u}^{(\delta)} = 0$, et le champ de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ ne présente aucune composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_3$

$$\vec{\omega}^{(\delta)} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^{(\delta)} = \frac{\beta x_2}{2\sqrt{R^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2}}\vec{e}_1 - \frac{\alpha x_1}{2\sqrt{R^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2}}\vec{e}_2 \qquad (3.57)$$

On peut vérifier que cette expression du champ $\vec{\omega}^{(\delta)}$ satisfait parfaitement la condition de géométrocompatibilité $\mathrm{div}\vec{\omega}^{(\delta)} = 0$. Le tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ est égal au tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$, de par le fait que $\mathrm{div}\vec{u}^{(\delta)} = 0$. Par conséquent

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \vec{\alpha}_1 = \dfrac{\alpha x_1}{2\sqrt{R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2}} \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\alpha}_2 = \dfrac{\beta x_2}{2\sqrt{R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2}} \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 = \vec{\alpha}_3 = \dfrac{\alpha x_1}{2\sqrt{R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2}} \vec{e}_1 + \dfrac{\beta x_2}{2\sqrt{R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2}} \vec{e}_2 \end{cases} \tag{3.58}$$

Le tenseur de contorsion $\vec{\chi}_i$ peut aussi être déduit, et on constate qu'il est bien de trace nulle, comme on l'avait déduit en *(3.22)*

$$\begin{cases} \vec{\chi}_1 = \overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_1^{(\delta)} = \dfrac{\alpha\beta x_1\, x_2}{2\left(R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2\right)^{3/2}} \vec{e}_1 + \dfrac{\beta\left(R^2 + \alpha {x_1}^{22}\right)}{2\left(R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2\right)^{3/2}} \vec{e}_2 \\ \vec{\chi}_2 = \overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_2^{(\delta)} = \dfrac{\alpha\left(R^2 + \beta {x_2}^2\right)}{2\left(R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2\right)^{3/2}} \vec{e}_1 + \dfrac{\alpha\beta x_1\, x_2}{2\left(R^2 + \alpha {x_1}^2 + \beta {x_2}^2\right)^{3/2}} \vec{e}_2 \\ \vec{\chi}_3 = \overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_3^{(\delta)} = 0 \end{cases} \tag{3.59}$$

Quant au vecteur de flexion $\vec{\chi}$, il vient

$$\vec{\chi} = -\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\omega}^{(\delta)} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = \frac{(\alpha+\beta)R^2 + \alpha\beta\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{2\left(R^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2\right)^{3/2}}\ \vec{e}_3 \tag{3.60}$$

La norme du vecteur de flexion $\vec{\chi}$ prise au centre $\boldsymbol{O}$ du système de coordonnées est directement liée à *l'inverse du rayon de courbure* R, de la manière suivante

$$\left|\vec{\chi}\right|_{x_1=x_2=0} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0 \\ 1/2R & \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 1 \\ 1/R & \text{pour} \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 1 \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha = -1 \quad \text{et} \quad \beta = 1 \end{cases} \tag{3.61}$$

de sorte que la norme du vecteur de flexion en un point donné de l'espace est égale à l'inverse du rayon R d'un cylindre (ou d'une sphère) qui serait centré à distance R de ce point dans la direction du vecteur de flexion, et qui s'ajusterait en ce point à la forme de la surface déformée.

La torsion pure d'un réseau solide

Soit maintenant le champ de déplacement statique $\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r})$ suivant dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, où α, β et γ sont des constantes

$$\vec{u}^{(\delta)}(\vec{r}) = \alpha x_2 x_3 \vec{e}_1 + \beta x_1 x_3 \vec{e}_2 + \gamma x_1 x_2 \vec{e}_3 \tag{3.62}$$

Il est possible d'obtenir le vecteur de torsion (rotation locale) $\vec{\omega}^{(\delta)}$ et le scalaire d'expansion volumique τ associés à ce champ de déplacement

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{(\delta)} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}^{(\delta)} = \dfrac{1}{2}\left[(\beta-\gamma)x_1\vec{e}_1 + (\gamma-\alpha)x_2\vec{e}_2 + (\alpha-\beta)x_3\vec{e}_3\right] \\ \tau = -\text{div}\, \vec{u}^{(\delta)} = 0 \end{cases} \tag{3.63}$$

Ce champ de déplacement est donc non divergent et il conduit à un champ de rotation dont les composantes augmentent ou diminuent le long des axes de coordonnées, ce qui est caractéristique d'une *torsion pure* du solide (correspondant d'ailleurs exactement au cas représenté à la figure 3.2 si on pose $\beta = 0$ et $\alpha = -\gamma$). D'autre part, on peut vérifier que le vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ satisfait la condition de géométrocompatibilité, ce qui est normal puisque la divergence d'un rotationnel est nulle

$$\operatorname{div}\vec{\omega}^{(\delta)} = \frac{1}{2}\left[(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)\right] = 0 \qquad (3.64)$$

Pour le tenseur de distorsion locale $\vec{\beta}_i^{(\delta)}$, il vient

$$\begin{cases} \vec{\beta}_1^{(\delta)} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_1^{(\delta)} = -\alpha x_3 \vec{e}_2 - \alpha x_2 \vec{e}_3 \\ \vec{\beta}_2^{(\delta)} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_2^{(\delta)} = -\beta x_3 \vec{e}_1 - \beta x_1 \vec{e}_3 \\ \vec{\beta}_3^{(\delta)} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_3^{(\delta)} = -\gamma x_2 \vec{e}_1 - \gamma x_1 \vec{e}_2 \end{cases} \qquad (3.65)$$

et pour les tenseurs de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ et de cisaillement $\vec{\alpha}_i$

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \vec{\alpha}_1 = \vec{\beta}_1^{(\delta)} - \vec{e}_1 \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = -(\alpha+\beta) x_3 \vec{e}_2 / 2 - (\alpha+\gamma) x_2 \vec{e}_3 / 2 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\alpha}_2 = \vec{\beta}_2^{(\delta)} - \vec{e}_2 \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = -(\alpha+\beta) x_3 \vec{e}_1 / 2 - (\beta+\gamma) x_1 \vec{e}_3 / 2 \\ \vec{\varepsilon}_3 = \vec{\alpha}_3 = \vec{\beta}_3^{(\delta)} - \vec{e}_3 \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = -(\alpha+\gamma) x_2 \vec{e}_1 / 2 - (\beta+\gamma) x_1 \vec{e}_2 / 2 \end{cases} \qquad (3.66)$$

Le tenseur de contorsion s'écrit alors

$$\begin{cases} \vec{\chi}_1 = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \omega_1^{(\delta)} = (\beta-\gamma)\vec{e}_1 / 2 \\ \vec{\chi}_2 = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \omega_2^{(\delta)} = (\gamma-\alpha)\vec{e}_2 / 2 \\ \vec{\chi}_3 = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \omega_3^{(\delta)} = (\alpha-\beta)\vec{e}_3 / 2 \end{cases} \qquad (3.67)$$

Ce tenseur est purement diagonal, et de trace nulle. Il est par conséquent parfaitement égal en ce cas au *tenseur de torsion* $\left[\vec{\chi}_i\right]^{\mathrm{S}}$. Quant au vecteur de flexion, il est en ce cas nul

$$\vec{\chi} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{\omega}^{(\delta)} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = 0 \qquad (3.68)$$

Chapitre 4

Dynamique newtonienne et thermocinétique eulérienne

On supposant que le réseau considéré se comporte de manière newtonienne dans le référentiel absolu du ***GO***, on introduit de manière rigoureuse la dynamique et la thermocinétique du réseau en les coordonnées d'Euler, en partant de trois axiomes de base tout-à-fait classiques et bien connus: l'énergie cinétique d'une particule et les deux premiers principes de la thermodynamique. Avec cette approche axiomatique et rigoureuse, on est conduit à définir des grandeurs moyennes par site du réseau, ainsi que des sources et des flux, qui doivent satisfaire trois *principes de continuité* absolument incontournables dans les réseaux solides newtoniens.

4.1 - Principe de la dynamique newtonienne

L'axiome d'une dynamique newtonienne

Il a été montré au chapitre 1 qu'une collection solide de particules dans l'espace présente un mouvement collectif qui correspond aux mouvements globaux de translation, de rotation et de déformation du milieu dans l'espace de l'observateur, et qui est décrit, en coordonnées d'Euler, par une vitesse locale moyenne $\vec{\phi}(\vec{r},t)$.
En admettant ici l'axiome que ce mouvement collectif satisfait *une dynamique newtonienne*, au mouvement collectif des particules à vitesse $\vec{\phi}$ doit correspondre une énergie cinétique. Par particule, cette énergie cinétique s'écrit, d'après la mécanique newtonienne:

$$e_{cin} = \frac{1}{2} m \vec{\phi}^2 = \textit{énergie cinétique par particule} \qquad (4.1)$$

Cette expression de l'énergie cinétique d'une particule du milieu fait appel à une grandeur physique scalaire conservative, propre à la particule: sa *masse d'inertie* ou *masse inerte* m.

L'équation de continuité locale de la masse d'inertie dans le référentiel absolu du GO

En coordonnées d'Euler, il faut trouver une équation traduisant la continuité de la masse globale du milieu dans le référentiel du ***GO***. Pour écrire cette équation, il suffit d'introduire une *densité volumique de masse* $\rho(\vec{r},t)$ du milieu, de sorte que la masse totale $\boldsymbol{M}$ contenue dans un volume $\boldsymbol{V_m}$ mobile avec le milieu s'obtient par l'intégration suivante sur le volume mobile

$$\boldsymbol{M} = \iiint_{V_m} \rho \, dV \qquad (4.2)$$

Sur ce volume $\boldsymbol{V_m}$, l'équation intégrale de continuité de la masse s'écrit à partir de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{M}$, sous la forme très simple

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \rho \, dV = \iiint_{V_m} S_m \, dV - \oiint_{S_m} \vec{J}_m d\vec{S} \qquad (4.3)$$

Dans cette équation, la variation de masse au sein du volume $\boldsymbol{V_m}$ est due à l'existence d'un *flux surfacique relatif de masse* $\vec{J}_m$, par rapport à la surface $\boldsymbol{S}_m$. La présence d'un terme de *source volumique de masse* S_m permet la création ou l'annihilation de masse au sein du volume $\boldsymbol{V_m}$, en plus des échanges de masse avec l'extérieur par l'intermédiaire du flux $\vec{J}_m$ traversant la surface mobile $\boldsymbol{S}_m$ (figure 4.1). L'équation *(4.3)* peut aussi être transformée en utilisant la dérivation d'une intégrale sur un volume mobile et le théorème de la divergence

$$\iiint_{V_m}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\vec{\phi}\right)\right]dV=\iiint_{V_m}S_m\,dV-\iiint_{V_m}\operatorname{div}\vec{J}_m\,dV \qquad (4.4)$$

On en déduit l'expression locale de l'équation de continuité de la masse dans $\boldsymbol{Q\xi_1\xi_2\xi_3}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=S_m-\operatorname{div}\left(\rho\vec{\phi}+\vec{J}_m\right) \qquad (4.5)$$

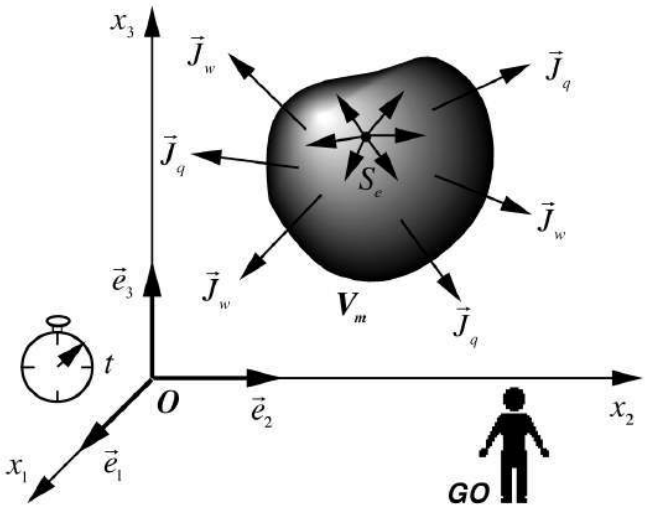


Figure 4.1 *- flux de masse $\vec{J}_m$, flux de travail $\vec{J}_w$, flux de chaleur $\vec{J}_q$, source de masse S_m et source volumique d'entropie S_e sur un volume mobile $\boldsymbol{V_m}$ du milieu*

L'équation de continuité locale de la masse d'inertie dans le repère local du PO

On peut reprendre les développements précédents, mais en effectuant maintenant tous les calculs dans le référentiel local mobile $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$ du ***PO***. En ce qui concerne la dérivation temporelle locale de ρ, c'est-à-dire en un point fixe $\vec{r}$ du référentiel local mobile, l'équation de continuité doit alors faire intervenir la vitesse locale $\vec{\varphi}$ en lieu et place de la vitesse absolue $\vec{\phi}$, et on obtient l'équation suivante dans $\boldsymbol{Ox_1x_2x_3}$, qui peut aussi s'exprimer à l'aide de la vitesse absolue $\vec{\phi}$ en utilisant la relation *(2.16)*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=S_m-\operatorname{div}\left(\rho\vec{\varphi}+\vec{J}_m\right)=S_m-\operatorname{div}\left[\rho\left(\vec{\phi}-\vec{\phi}_O(t)-\dot{\vec{\omega}}_O(t)\wedge\vec{r}\right)+\vec{J}_m\right] \qquad (4.6)$$

L'équation de continuité eulérienne de la masse d'inertie

On peut reprendre les deux équations de continuité locale de la masse inerte dans $\boldsymbol{Q\xi_1\xi_2\xi_3}$ et

$\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, et essayer d'en déduire une équation de continuité de type eulérienne, ne dépendant plus que de dérivés particulaires, et s'appliquant par conséquent aussi bien dans le référentiel absolu du ***GO*** que dans le repère mobile du ***PO***. Réécrivons la relation (4.5) sous la forme suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_m - \rho \operatorname{div}\vec{\phi} - \vec{\phi}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\rho - \operatorname{div}\vec{J}_m \qquad (4.7)$$

En utilisant alors l'équation géométrocinétique *(1.42)* pour τ, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\phi}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\rho = S_m - \rho\left(\frac{d\tau}{dt} + \frac{S_n}{n}\right) - \operatorname{div}\vec{J}_m \qquad (4.8)$$

Le premier membre de cette équation n'est rien d'autre que la dérivé particulaire de ρ, de sorte que l'équation de continuité eulérienne de la masse inerte s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = S_m - \rho\left(\frac{d\tau}{dt} + \frac{S_n}{n}\right) - \operatorname{div}\vec{J}_m \qquad (4.9)$$

On obtiendrait exactement le même résultat en effectuant les calculs à partir de la relation *(4.6)* dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Le concept newtonien de quantité de mouvement

L'équation *(4.3)* peut être écrite pour un volume $\boldsymbol{V}_f$ fixe dans le laboratoire de l'observateur. La dérivée temporelle de la masse totale $\boldsymbol{M}$ contenue dans ce volume fixe $\boldsymbol{V}_f$ s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_f} \rho\, dV = \iiint_{V_f} S_m\, dV - \oiint_{S_f} \vec{P}_m d\vec{S} \qquad (4.10)$$

dans laquelle le *flux surfacique absolu de masse* $\vec{P}_m$ par rapport au laboratoire de l'observateur représente en fait une autre grandeur caractéristique importante de la dynamique newtonienne, à savoir la *densité volumique de quantité de mouvement* au sein du réseau. En introduisant alors la *quantité de mouvement moyenne* $\vec{p}$ par site de réseau, définie comme

$$\vec{p} = \vec{P}_m / n \qquad (4.11)$$

l'équation *(4.10)*, correspondant à la dérivée temporelle d'une intégrale sur un volume fixe dans l'espace, peut s'écrire simplement

$$\iiint_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_{V_f} S_m\, dV - \iiint_{V_f} \operatorname{div}\left(n\vec{p}\right) dV \qquad (4.12)$$

qui conduit à une deuxième expression pour la continuité de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_m - \operatorname{div}\left(n\vec{p}\right) \qquad (4.13)$$

D'après *(4.5)* et *(4.10)*, le flux de masse peut donc s'écrire de deux façons

$$\vec{P}_m = n\vec{p} = \rho\vec{\phi} + \vec{J}_m \qquad (4.14)$$

ce qui signifie en fait que le transport absolu de masse $\vec{P}_m = n\vec{p}$ est égal à la somme d'un transport de masse $\rho\vec{\phi}$ par le milieu mobile à vitesse $\vec{\phi}$ et d'un transport de masse supplémentaire $\vec{J}_m$ par un autre processus physique, tel que l'auto-diffusion dans les réseaux solides, que nous introduirons par la suite.

4.2 - Principe de continuité de l'énergie

Pour introduire le concept d'énergie, il faut trouver l'énergie totale contenue dans un volume $\boldsymbol{V_m}$ du milieu, mobile avec le milieu (figure 4.1), c'est-à-dire se déplaçant à vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$. Il a été montré à la section 1.2 que la vitesse de chacune des particules i du milieu peut simplement s'écrire

$$\vec{v}_i = \vec{\phi} + \Delta\vec{v}_i \qquad (4.15)$$

où les $\Delta\vec{v}_i$ sont les fluctuations aléatoires de vitesse de la particule (par exemple associées à l'agitation thermique).
Au mouvement collectif des particules à vitesse $\vec{\phi}$ correspond, en admettant l'axiome d'une dynamique newtonienne, une énergie cinétique qui peut être exprimée sous la forme d'une *densité volumique d'énergie cinétique* $T(\vec{r},t)$.

L'axiome du premier principe thermodynamique

Aux mouvements de fluctuations aléatoires $\Delta\vec{v}_i$, ainsi qu'aux interactions pouvant exister entre les particules du milieu doit aussi correspondre une énergie cinétique et une énergie potentielle interne. C'est précisément l'axiome du *premier principe de la thermodynamique phénoménologique*, qui postule l'existence, pour un système physique donné, d'une telle fonction d'état U, appelée l'*énergie interne* du système, qui est telle que, pour toute transformation infinitésimale du système, on a la relation

$$dU = \delta W + \delta Q \qquad (4.16)$$

où δQ représente l'ensemble des échanges de chaleur entre le système et le monde extérieur, et δW l'ensemble des échanges de travail entre le système et le monde extérieur.
Au cours de son évolution spatio-temporelle, il est certain que le milieu se trouvera en général hors équilibre thermodynamique, de sorte qu'il est nécessaire de généraliser le concept d'énergie interne, en introduisant une grandeur d'énergie interne locale et dépendante du temps, sous la forme d'une *densité volumique d'énergie interne* $U(\vec{r},t)$.

L'équation de continuité eulérienne de l'énergie

L'énergie totale $\boldsymbol{E}$ contenue dans le volume $\boldsymbol{V_m}$ est alors égale à l'intégrale sur le volume $\boldsymbol{V_m}$ de la somme de la densité d'énergie cinétique T et de la densité d'énergie interne U. Elle s'écrit par conséquent

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{U} = \iiint_{\boldsymbol{V_m}} (T + U)\, dV \qquad (4.17)$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, l'énergie est une grandeur conservée, de sorte que toute variation temporelle de l'énergie $\boldsymbol{E}$ contenue dans le volume $\boldsymbol{V_m}$ ne peut être due qu'à des influences extérieures au volume $\boldsymbol{V_m}$: soit à des échanges de travail ou de chaleur par l'intermédiaire de la surface $\boldsymbol{S}_m$ entourant le volume $\boldsymbol{V_m}$, soit à un apport volumique de travail par l'intermédiaire d'un champ de force extérieur (tels que le champ de gravitation, le champ électrique, etc.). Les échanges de travail et de chaleur à travers la surface $\boldsymbol{S}_m$ peuvent être représentés sous la forme de *flux surfacique de travail* $\vec{J}_w$ et de *flux surfacique de chaleur*

$\vec{J}_q$. Quant à l'apport volumique de travail par des champs de forces extérieures, il est introduit sous la forme d'une *source volumique de travail des forces extérieures* S_w^{ext}.
Ce principe de conservation de l'énergie s'écrit par conséquent, sur le volume mobile $\boldsymbol{V_m}$, comme l'égalité entre la dérivée temporelle de l'énergie totale contenue dans le volume $\boldsymbol{V_m}$ et les différents apports au sein du volume $\boldsymbol{V_m}$ ou à travers la surface $\boldsymbol{S}_m$ l'entourant

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_m}(T+U)\,dV = \iiint_{V_m} S_w^{ext}\,dV - \oiint_{S_m}\left(\vec{J}_w + \vec{J}_q\right)d\vec{S} \qquad (4.18)$$

En utilisant le théorème de la divergence *(A.43)* et la dérivation d'une intégrale sur un volume mobile *(A.58)*, cette équation peut se transformer et s'écrire

$$\iiint_{V_m}\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}\left(T\vec{\phi} + U\vec{\phi}\right)\right]dV = \iiint_{V_m}\left[S_w^{ext} - \operatorname{div}\left(\vec{J}_w + \vec{J}_q\right)\right]dV \qquad (4.19)$$

qui, sous forme locale, donne

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}\left(T\vec{\phi}\right) + \operatorname{div}\left(U\vec{\phi}\right) = S_w^{ext} - \operatorname{div}\vec{J}_w - \operatorname{div}\vec{J}_q \qquad (4.20)$$

Il sera montré dans la suite de cet exposé que, pour des raisons de commodité, il est judicieux de transformer cette équation, contenant les densités volumiques T et U, en introduisant les grandeurs e_{cin} et u, définies comme *l'énergie cinétique moyenne et l'énergie interne moyenne par site de réseau*

$$e_{cin} = \frac{T}{n} \quad \text{et} \quad u = \frac{U}{n} \qquad (4.21)$$

Grâce à ces définitions, le premier membre de l'équation *(4.20)* peut être transformé. En effet, l'utilisation de l'équation de continuité *(1.12)* pour n fait apparaître la dérivée particulaire de u, ainsi qu'un terme associé à la source S_n de sites de réseau

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}\left(U\vec{\phi}\right) = n\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{\phi}\vec{\nabla})u\right] + uS_n = n\frac{du}{dt} + uS_n \qquad (4.22)$$

En appliquant cette transformation à l'équation *(4.20)*, la formulation finale du *premier principe*, ou principe de continuité de l'énergie en coordonnées d'Euler, est obtenue sous forme locale

$$n\frac{du}{dt} + n\frac{de_{cin}}{dt} = S_w^{ext} - \operatorname{div}\vec{J}_w - \operatorname{div}\vec{J}_q - uS_n - e_{cin}S_n \qquad (4.23)$$

Que ce soit dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ du ***GO*** ou dans le repère local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***PO***, cette équation de continuité reste identique à elle-même. Seule l'expression de la dérivé particulaire change puisque qu'elle dépend de la vitesse absolue $\vec{\phi}$ du réseau dans le référentiel $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et de la vitesse relative locale $\vec{\varphi}$ du réseau dans le repère mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

4.3 - Principe de continuité de l'entropie

L'axiome du deuxième principe thermodynamique

Le *deuxième principe de la thermodynamique* phénoménologique postule l'existence, pour un système physique donné, d'une fonction d'état S, appelée l'*entropie* du système. Cette fonction

d'état caractérise le désordre au sein du système, et est telle que toute transformation infinitésimale du système satisfait la relation

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \qquad (4.24)$$

où δQ représente l'ensemble des échanges de chaleur entre le système et le monde extérieur, et T la température à laquelle se font ces échanges. Au cours de son évolution spatio-temporelle, le milieu se trouve en général hors équilibre thermodynamique, de sorte qu'il est nécessaire de généraliser le concept d'entropie, en introduisant une grandeur d'entropie locale et dépendante du temps, sous la forme d'une *densité volumique d'entropie* $S(\vec{r},t)$.

L'équation de continuité eulérienne de l'entropie

En utilisant le même volume $\boldsymbol{V_m}$ mobile défini au paragraphe précédent, cette densité volumique d'entropie $S(\vec{r},t)$ permet de calculer l'entropie $\boldsymbol{S}$ totale du système comme

$$\boldsymbol{S} = \iiint_{V_m} S\, dV \qquad (4.25)$$

Le deuxième principe se généralise en un principe de l'entropie en coordonnées d'Euler en écrivant la relation intégrale suivante pour la dérivée temporelle de l'entropie totale $\boldsymbol{S}$ sur le volume mobile

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_m} S\, dV = \iiint_{V_m} S_e\, dV - \oiint_{S_m} \frac{\vec{J}_q}{T}\, d\vec{S} \qquad (4.26)$$

dans laquelle les échanges de chaleur avec l'extérieur sont introduits sous la forme d'un *flux surfacique de chaleur* $\vec{J}_q$.
L'irréversibilité des transformations thermodynamiques du milieu, qui est traduite par le signe d'inégalité $dS \geq \delta Q / T$ en thermodynamique phénoménologique, a été introduite ici sous la forme d'une *source volumique d'entropie* S_e au sein du volume $\boldsymbol{V_m}$. La notion de réversibilité ou d'irréversibilité de l'évolution du milieu est alors décrite par un terme de source macroscopique $\boldsymbol{\sigma}$ d'entropie

$$\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{V_m} S_e\, dV \qquad (4.27)$$

tel que l'évolution du système sera réversible pour $\boldsymbol{\sigma} = 0$ et irréversible pour $\boldsymbol{\sigma} > 0$.
La relation intégrale *(4.26)* peut encore être mise sous une autre forme, en utilisant la dérivation temporelle d'une intégrale sur un volume mobile et le théorème de la divergence

$$\iiint_{V_m}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{div}\left(S\vec{\phi}\right)\right] dV = \iiint_{V_m} S_e\, dV - \iiint_{V_m} \mathrm{div}\left(\frac{\vec{J}_q}{T}\right) dV \qquad (4.28)$$

On en extrait une équation locale du deuxième principe pour la densité volumique d'entropie S

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{div}\left(S\vec{\phi}\right) = S_e - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{J}_q}{T}\right) \qquad (4.29)$$

En introduisant la grandeur s représentant l'*entropie moyenne par site de réseau*, définie par la relation

$$s = \frac{S}{n} \tag{4.30}$$

et en utilisant la transformation décrite en *(4.22)*, la formulation finale du *deuxième principe*, ou principe de continuité eulérienne de l'entropie en coordonnées d'Euler, s'écrit

$$n\frac{ds}{dt} = S_e - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{J}_q}{T}\right) - s\,S_n \tag{4.31}$$

Que ce soit dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ du ***GO*** ou dans le repère local mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***PO***, cette équation de continuité reste identique à elle-même. Seule l'expression de la dérivé particulaire change puisque qu'elle dépend de la vitesse absolue $\vec{\phi}$ du réseau dans le référentiel $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et de la vitesse relative locale $\vec{\varphi}$ du réseau dans le repère mobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Les trois principes physiques fondamentaux de continuité
de la dynamique newtonienne et de la thermocinétique eulérienne

Ainsi, en se basant sur les axiomes de la dynamique newtonienne et de la thermodynamique phénoménologique classique, trois principes physiques de continuité ont été postulés pour décrire la *«thermo-géométro-dynamique»* en coordonnées d'Euler, à savoir
- un principe de continuité eulérienne de la densité de masse d'inertie,
- un principe de continuité eulérienne de l'énergie moyenne par site de réseau,
- un principe de continuité eulérienne de l'entropie moyenne par site de réseau.

Comme nous le verrons au cours des prochains chapitres, ces trois principes, résumés dans le tableau 4.1, sont *les seuls principes physiques fondamentaux absolument nécessaires à une description galiléenne complète de la géométrodynamique newtonienne et de la thermodynamique phénoménologique des milieux déformables en coordonnées d'Euler, que ceux-ci soient fluides ou solides*.

Tableau 4.1 – Dynamique newtonienne et thermocinétique eulérienne

Flux de masse absolu $\vec{P}_m$ *et quantité de mouvement moyenne* $\vec{p}$ *par site de réseau*

$$\vec{P}_m = n\vec{p} = \rho\vec{\phi} + \vec{J}_m \quad (1)$$

Principe de continuité eulérienne de la densité de masse inerte

$$\frac{d\rho}{dt} = S_m - \rho\left(\frac{d\tau}{dt} + \frac{S_n}{n}\right) - \operatorname{div}\vec{J}_m \quad (2)$$

Principe de continuité eulérienne de l'énergie moyenne par site de réeau

$$n\frac{du}{dt} + n\frac{de_{cin}}{dt} = S_w^{ext} - \operatorname{div}\vec{J}_w - \operatorname{div}\vec{J}_q - uS_n - e_{cin}S_n \quad (3)$$

Principe de continuité eulérienne de l'entropie moyenne par site de réseau

$$n\frac{ds}{dt} = S_e - \operatorname{div}\left(\frac{\vec{J}_q}{T}\right) - sS_n \quad (4)$$

Chapitre 5

Propriétés physiques d'un réseau newtonien

Dans ce chapitre, les propriétés physiques les plus fondamentales d'un réseau solide sont abordées, à savoir les *propriétés mécaniques* et les *propriétés de transport de masse*. A partir de l'équation thermocinétique du réseau solide, on montre comment l'*élasticité* du réseau fait apparaître des potentiels thermodynamiques, appelés *tenseurs de contrainte.* Puis on introduit la notion de *phénomènes mécaniques dissipatifs* dans les réseaux, en décomposant le tenseur de distorsion en composantes non-dissipatives et dissipatives, ce qui conduit à deux phénoménologies de dissipation possibles: *l'anélasticité* et *la plasticité*. Le principe newtonien de conservation de la masse implique ensuite de décrire l'*auto-diffusion*, à savoir le transport de masse relativement au réseau par le mouvement des *lacunes* et des *auto-interstitiels*, qui fait apparaître de nouvelles équations fondamentales du réseau, appelées *équations de diffusion*, ainsi que de nouveaux potentiel thermodynamiques, appelés *potentiels chimiques*. Finalement, on déduit les grandeurs associées au comportement newtonien du réseau, à savoir sa *quantité de mouvement moyenne par site*, son *énergie cinétique moyenne par site* et *la source de travail des forces extérieures* dans le cas où le réseau est soumis à un champ gravifique constant.

5.1 - Elasticité d'un réseau

Dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, l'état d'un solide peut être caractérisé de la manière la plus générale, en ce qui concerne son énergie potentielle, par la valeur de son tenseur de distorsion globale $\vec{\beta}_i$, et en ce qui concerne son énergie thermique, par la valeur locale de son entropie s. L'énergie interne moyenne par site du réseau est par conséquent une fonction de l'état local de distorsion et de l'état local d'entropie

$$u = u(\beta_{ij}, s) \qquad (5.1)$$

Cette fonction d'état est évidemment propre à chaque type de solides qu'on peut être amené à considérer. Elle décrit en fait la phénoménologie énergétique propre au solide considéré, et c'est pourquoi elle est appelée la *fonction phénoménologique d'état* du solide.

L'expression *(5.1)* de l'énergie interne n'est pas celle qui est d'habitude utilisée pour décrire les milieux solides usuels, pour lesquels l'énergie interne n'est fonction que des composantes du tenseur de déformation, et non des composantes β_{ij} du tenseur de distorsion. Ce point particulier sera discuté plus tard en détail. Pour l'instant, il suffit de considérer simplement, *à priori*, que la description de l'énergie interne à partir des composantes du tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$ est nettement plus générale que celle obtenue usuellement à partir des composantes du tenseur de déformation.

Le tenseur des contraintes de distorsion et l'équation thermocinétique d'élasticité

Comme l'énergie interne u est une fonction du scalaire s d'entropie et des composantes β_{ij} du tenseur de distorsion, sa différentielle s'écrit

$$du = \frac{\partial u}{\partial \beta_{ij}} d\beta_{ij} + \frac{\partial u}{\partial s} ds \qquad (5.2)$$

En introduisant un *potentiel mécanique* conjugué au tenseur de distorsion β_{ij}, qui sera appelé *tenseur des contraintes de distorsion* Σ_{ij}, ainsi qu'un *potentiel thermique* conjugué à l'entropie s, qui est simplement la *température* T, la différentielle du peut s'écrire

$$ndu = \Sigma_{ij} d\beta_{ij} + nTds \qquad (5.3)$$

La comparaison entre les deux expressions précédentes de la différentielle de u permet de déduire les *équations phénoménologiques d'état* du solide, c'est-à-dire les relations propres au milieu considéré donnant le tenseur des contraintes Σ_{ij} et la température T en fonction du tenseur de distorsion β_{ij} et de l'entropie s

$$\begin{cases} \Sigma_{ij} = n\dfrac{\partial u}{\partial \beta_{ij}} = \Sigma_{ij}(\beta_{kl}, s) \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} = T(\beta_{kl}, s) \end{cases} \qquad (5.4)$$

Comme dans le cas des tenseurs topologiques, une notation vectorielle du tenseur des contraintes Σ_{ij} peut être introduite ici

$$\vec{\Sigma}_i = \sum_j \Sigma_{ij} \vec{e}_j \qquad (5.5)$$

La différentielle de l'énergie interne u s'écrit alors de façon assez simple grâce à l'apparition du produit scalaire

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\beta}_k + nTds \qquad (5.6)$$

De cette différentielle est déduite l'*équation themocinétique* d'élasticité du réseau

$$n\frac{du}{dt} = \vec{\Sigma}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \qquad (5.7)$$

Le tenseur des contraintes de déformation et le torseur des moments de rotation

Les équations thermodynamiques obtenues au paragraphe précédent ont été décrites en fonction des composantes β_{ij} du tenseur de distorsion. Il pourrait cependant être intéressant de les décrire à partir du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ et du vecteur de rotation $\vec{\omega}$. Pour cela,

$$\vec{\beta}_i = \vec{\varepsilon}_i + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} \qquad (5.8)$$

peut être introduite dans l'expression de la différentielle de l'énergie interne u, d'où

$$\begin{aligned} ndu &= \vec{\Sigma}_k d\vec{\beta}_k + nTds = \vec{\Sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \vec{\Sigma}_k \left(\vec{e}_k \wedge d\vec{\omega}\right) + nTds \\ &= \vec{\Sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \left(\vec{\Sigma}_k \wedge \vec{e}_k\right) d\vec{\omega} + nTds \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Le potentiel mécanique conjugué au vecteur de rotation $\vec{\omega}$ sera appelé *torseur des moments* $\vec{m}$, défini par la relation

$$\vec{m} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\Sigma}_k \tag{5.10}$$

Il est évidemment relié à la partie anti-symétrique du tenseur des contraintes $\vec{\Sigma}_i$. Avec ce torseur des moments, la différentielle de u s'écrit sous la forme

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \vec{m} d\vec{\omega} + nTds = \Sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + m_k d\omega_k + nTds \tag{5.11}$$

Par conséquent, l'énergie interne u est aussi une fonction du tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$, du vecteur de rotation $\vec{\omega}$ et de l'entropie s

$$u = u(\varepsilon_{ij}, \omega_k, s) \tag{5.12}$$

dont la différentielle s'écrit

$$ndu = n\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + n\frac{\partial u}{\partial \omega_k} d\omega_k + n\frac{\partial u}{\partial s} ds \tag{5.13}$$

Comme le tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ est un tenseur symétrique, il est possible d'effectuer quelques transformations simples de la différentielle de l'énergie interne u dans le but de faire apparaître explicitement cette symétrie, ce qui sera d'une très grande utilité par la suite

$$\begin{aligned} ndu &= \frac{1}{2}\Sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\Sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} + m_k d\omega_k + nTds = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right) d\varepsilon_{ij} + m_k d\omega_k + nTds \\ &= \frac{n}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ji}}\right) d\varepsilon_{ij} + n\frac{\partial u}{\partial \omega_k} d\omega_k + n\frac{\partial u}{\partial s} ds \end{aligned} \tag{5.14}$$

Il apparaît un potentiel mécanique symétrique, conjugué au tenseur de déformation ε_{ij}, qui sera appelé *tenseur des contraintes de déformation* σ_{ij}, défini par la relation

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right) \tag{5.15}$$

Ce nouveau potentiel mécanique permet d'écrire la différentielle de u sous la forme

$$ndu = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + m_k d\omega_k + nTds \tag{5.16}$$

dont il est déduit, par comparaison avec les expressions précédentes, les équations d'état du milieu dans la représentation $\left\{\vec{\varepsilon}_i, \vec{\omega}\right\}$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} + \dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ji}}\right) = \sigma_{ij}(\varepsilon_{lm}, \omega_n, s) \\ m_k = n\dfrac{\partial u}{\partial \omega_k} = m_k(\varepsilon_{lm}, \omega_n, s) \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} = T(\varepsilon_{lm}, \omega_n, s) \end{cases} \tag{5.17}$$

Le tenseur des contraintes de déformation σ_{ij} peut s'écrire et se déduire vectoriellement du tenseur Σ_{ij} par les relations

$$\vec{\sigma}_i = \sum_j \sigma_{ij} \vec{e}_j = \vec{\Sigma}_i - \frac{1}{2}\left(\vec{e}_i \wedge \vec{m}\right) \tag{5.18}$$

L'utilisation de la relation $\vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}$ permet de transformer la différentielle de l'énergie interne u

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds = \vec{\sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds$$
$$= \vec{\sigma}_k d\vec{\beta}_k + \left(\vec{e}_k \wedge \vec{\sigma}_k\right) d\vec{\omega} + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds \qquad (5.19)$$

Mais comme le tenseur $\vec{\sigma}_i$ est symétrique, on vérifie que

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\sigma}_k = 0 \qquad (5.20)$$

de sorte que la différentielle de l'énergie interne u peut encore s'écrire sous la forme

$$ndu = \vec{\sigma}_k d\vec{\beta}_k + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds \qquad (5.21)$$

Cette nouvelle expression de la différentielle de u dépend de la différentielle $d\vec{\beta}_i$ du tenseur de distorsion, ce qui n'a été rendu possible que grâce à l'introduction du tenseur symétrique des contraintes $\vec{\sigma}_i$. L'avantage de cette expression est de pouvoir réécrire l'*équation thermocinétique* en ne faisant appel qu'aux dérivées particulaires de $\vec{\beta}_i$ et de $\vec{\omega}$, qui sont directement reliées à des équations géométrocinétiques simples

$$n\frac{du}{dt} = \vec{\sigma}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \qquad (5.22)$$

L'équation *(5.22)* montre que la variation temporelle de l'énergie interne u le long de la trajectoire est associée à des variations de l'énergie élastique de déformation, de l'énergie potentielle de rotation et de l'énergie thermique et que les variations de l'énergie de déformation peuvent s'écrire de plusieurs façons différentes et équivalentes

$$\vec{\Sigma}_k \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} = \vec{\sigma}_k \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} = \vec{\sigma}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} \qquad (5.23)$$

Le tenseur des contraintes de cisaillement, le torseur des moments et la pression

L'utilisation de l'expression suivante reliant le tenseur de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ au tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ et au scalaire d'expansion volumique τ

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{\alpha}_i + \vec{e}_i\tau / 3 \qquad (5.24)$$

permet de transformer la différentielle de u de la manière suivante

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\varepsilon}_k + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds = \vec{\Sigma}_k d\vec{\alpha}_k + \frac{1}{3}\vec{e}_k\vec{\Sigma}_k d\tau + \vec{m}d\vec{\omega} + nTds \qquad (5.25)$$

On peut ainsi introduire un potentiel conjugué au scalaire d'expansion volumique τ, qui est appelé la *pression* p

$$p = -\frac{1}{3}\sum_k \vec{e}_k\vec{\Sigma}_k = -\frac{1}{3}\sum_k \vec{e}_k\vec{\sigma}_k = -\frac{1}{3}\sum_k \Sigma_{kk} = -\frac{1}{3}\sum_k \sigma_{kk} \qquad (5.26)$$

Grâce à ce nouveau potentiel scalaire, la différentielle de u s'écrit

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\alpha}_k + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds = \Sigma_{ij} d\alpha_{ij} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds \qquad (5.27)$$

de sorte que l'énergie interne u peut aussi s'exprimer comme une fonction de α_{ij}, ω_k et τ

$$u = u(\alpha_{ij}, \omega_k, \tau, s) \qquad (5.28)$$

avec la différentielle

$$ndu = n\frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + n\frac{\partial u}{\partial \omega_k} d\omega_k + n\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau + n\frac{\partial u}{\partial s} ds \qquad (5.29)$$

De plus, comme le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ est symétrique, il vient encore

$$ndu = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}d\alpha_{ij} + \frac{1}{2}\Sigma_{ji}d\alpha_{ji} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right)d\alpha_{ji} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds \tag{5.30}$$

En introduisant le *symbole de Kronecker* δ_{ij}, tel que $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, la somme $\delta_{ij}d\alpha_{ji} = d\alpha_{ii}$ est nulle, car le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ est de trace nulle. Cette propriété permet d'ajouter un terme contenant la trace du tenseur des contraintes Σ_{ij} dans la différentielle de u

$$\begin{aligned} ndu &= \frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right)d\alpha_{ji} - \frac{1}{3}\delta_{ij}d\alpha_{ji}\sum_k \Sigma_{kk} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sum_k \Sigma_{kk}\right]d\alpha_{ij} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds \end{aligned} \tag{5.31}$$

qui peut être écrite aussi

$$ndu = \left[\frac{n}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_{ji}} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_{ji}}\right) - \frac{n}{3}\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial u}{\partial \alpha_{kk}}\right]d\alpha_{ij} + n\frac{\partial u}{\partial \omega_k}d\omega_k + n\frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau + n\frac{\partial u}{\partial s}ds \tag{5.32}$$

Il apparaît ainsi un nouveau potentiel mécanique, symétrique et sans trace, conjugué au tenseur de cisaillement α_{ij}, qui sera appelé *tenseur des contraintes de cisaillement* s_{ij}, défini par les relations suivantes

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sum_k \Sigma_{kk} = \sigma_{ij} + \delta_{ij}p \tag{5.33}$$

En comparant la différentielle de u obtenue grâce au potentiel s_{ij}

$$ndu = s_{ij}d\alpha_{ij} + m_k d\omega_k - pd\tau + nTds \tag{5.34}$$

avec les expression précédentes de la différentielle de u, on trouve les équations d'état du système dans la représentation $\left\{\vec{\alpha}_i, \vec{\omega}, \tau\right\}$

$$\begin{cases} s_{ij} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}} + \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_{ji}}\right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij}\displaystyle\sum_k \frac{\partial u}{\partial \alpha_{kk}} = s_{ij}(\alpha_{lm}, \omega_n, \tau, s) \\ m_k = n\dfrac{\partial u}{\partial \omega_k} = m_k(\alpha_{lm}, \omega_n, \tau, s) \\ p = -n\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = p(\alpha_{lm}, \omega_n, \tau, s) \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} = T(\alpha_{lm}, \omega_n, \tau, s) \end{cases} \tag{5.35}$$

Le tenseur des contraintes de cisaillement qui vient d'être défini peut s'écrire de manière simple sous forme vectorielle

$$\vec{s}_i = \sum_j s_{ij}\vec{e}_j = \vec{\sigma}_i + p\vec{e}_i \tag{5.36}$$

Comme ce tenseur est à la fois symétrique et de trace nulle, il satisfait les relations suivantes

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{s}_k \equiv 0 \quad \text{et} \quad \sum_k \vec{e}_k \vec{s}_k \equiv 0 \tag{5.37}$$

La différentielle de u exprimée à partir du tenseur des cisaillements $\vec{\alpha}_i$

$$ndu = \vec{\Sigma}_k d\vec{\alpha}_k + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds = \vec{s}_k d\vec{\alpha}_k + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds \qquad (5.38)$$

peut être modifiée en utilisant la décomposition suivante de $\vec{\alpha}_i$

$$\vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} - \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i \qquad (5.39)$$

de sorte à faire apparaître, grâce aux relations *(5.38)*, une dépendance directe en $d\vec{\beta}_i$

$$\begin{aligned} ndu &= \vec{s}_k d\vec{\beta}_k - \vec{s}_k\left(\vec{e}_k \wedge d\vec{\omega}\right) - \vec{s}_k\left(\frac{1}{3}\vec{e}_k d\tau\right) + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds \\ &= \vec{s}_k d\vec{\beta}_k + \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{s}_k\right)d\vec{\omega} - \frac{1}{3}\left(\sum_k \vec{e}_k\vec{s}_k\right)d\tau + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds \\ &= \vec{s}_k d\vec{\beta}_k + \vec{m}d\vec{\omega} - pd\tau + nTds \end{aligned} \qquad (5.40)$$

Cette dernière expression de la différentielle de u permet de déduire l'équation thermocinétique dans la représentation $\left\{\vec{\alpha}_i, \vec{\omega}, \tau\right\}$

$$n\frac{du}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \qquad (5.41)$$

Il faut remarquer ici que chacun des termes de l'équation thermocinétique correspond respectivement aux variations temporelles des énergies de cisaillement élastique, de rotation globale, d'expansion volumique élastique et de l'énergie thermique. De plus, cette équation thermocinétique fait appel aux dérivées temporelles des trois tenseurs topologiques dont les équations géométrocinétiques, données dans le tableau 1.1, dérivent de manière simple du champ de vitesse. Finalement, les égalités suivantes se vérifient aisément

$$\vec{\Sigma}_k \frac{d\vec{\alpha}_k}{dt} = \vec{\sigma}_k \frac{d\vec{\alpha}_k}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\alpha}_k}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} \qquad (5.42)$$

Les décompositions du tenseur de contrainte $\vec{\Sigma}_i$, représentées schématiquement à la figure 5.1, suivent une procédure parfaitement similaire, hormis quelques coefficients, à celle utilisée pour les décompositions du tenseur de distorsion

Le choix d'une représentation topologique

Ainsi, de manière générale, la thermocinétique d'un milieu déformable peut être décrite dans les trois représentations topologiques $\left\{\vec{\beta}_i\right\}$, $\left\{\vec{\varepsilon}_i, \vec{\omega}\right\}$ ou $\left\{\vec{\alpha}_i, \vec{\omega}, \tau\right\}$, qui ont chacune leurs potentiels de contrainte conjugués, à savoir $\left\{\vec{\Sigma}_i\right\}$, $\left\{\vec{\sigma}_i, \vec{m}\right\}$ et $\left\{\vec{s}_i, \vec{m}, p\right\}$ respectivement. Le choix d'une représentation plutôt qu'une autre pour décrire un milieu déformable dépend de la nature de celui-ci et d'une question de commodité en ce qui concerne l'écriture de l'énergie interne u. Voici quelques exemples de tels choix:

- dans le cas d'un fluide, l'énergie interne u doit être exprimée comme une fonction explicite de l'expansion volumique τ (ou du volume moyen v) et de l'entropie s, de sorte que le seul potentiel mécanique conservatif non nul dans un fluide est sa pression

$$u = u(\tau, s) \quad \text{ou} \quad u = u(v, s) \quad \Rightarrow \quad p = -n\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial v} \qquad (5.43)$$

ce qui conduit à l'équation géométrocinétique suivante

$$u = u(\tau, s) \quad \text{ou} \quad u = u(v, s) \quad \Rightarrow \quad n\frac{du}{dt} = -p\frac{d\tau}{dt} + nT\frac{ds}{dt} = -np\frac{dv}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \tag{5.44}$$

- dans le cas d'un réseau solide usuel, la partie potentielle de l'énergie interne doit évidemment dépendre des déformations élastiques $\vec{\varepsilon}_i$ du milieu, et uniquement des déformations $\vec{\varepsilon}_i$. Il en résulte que le seul potentiel mécanique non nul pour un réseau usuel est généralement le tenseur symétrique des contraintes $\vec{\sigma}_i$

$$u = u\left(\varepsilon_{ij}, s\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{n}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ji}} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \quad \Rightarrow \quad n\frac{du}{dt} = \vec{\sigma}_k \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \tag{5.45}$$

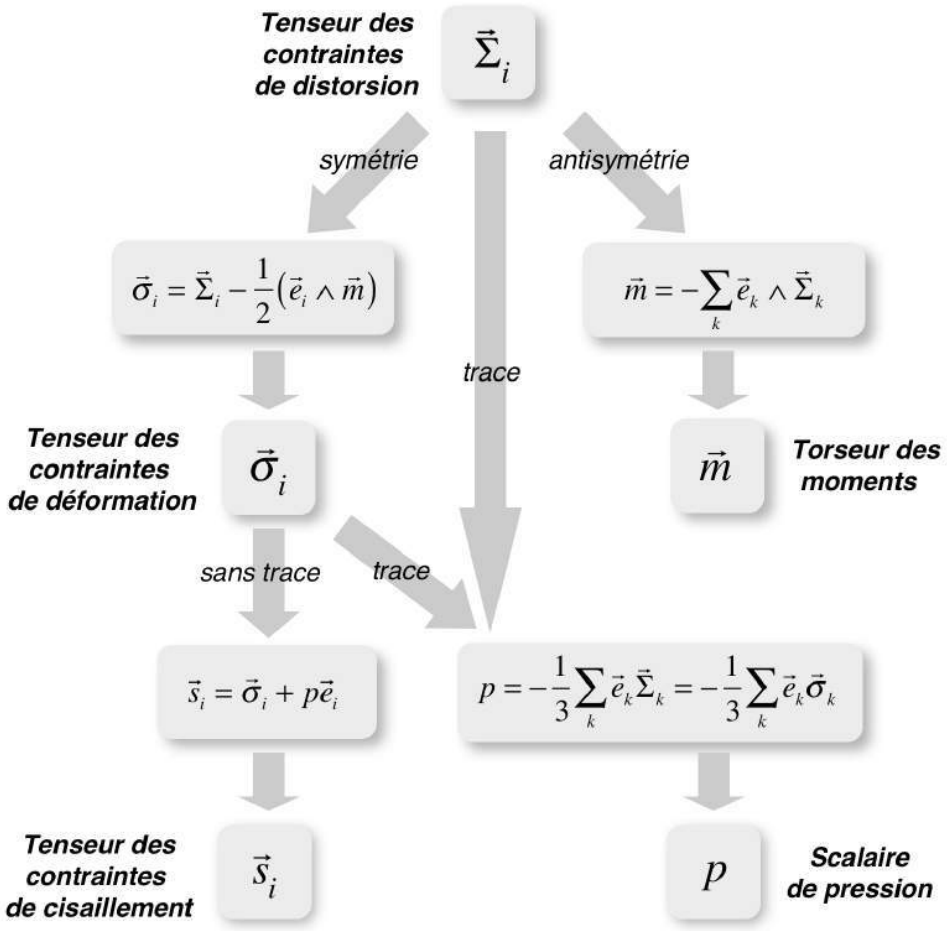


Figure 5.1 *- schéma de décomposition des tenseurs de contrainte*

- dans le cas d'un réseau solide isotrope, il est souvent préférable de séparer les déformations par cisaillement des déformations par expansion volumique, et par conséquent d'écrire l'énergie interne u en fonction du tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_i$, du scalaire d'expansion volumique τ et de l'entropie s. Ceci conduit à ce que les potentiels mécaniques non nuls sont alors le tenseur des contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$ et le scalaire de pression p

$$u = u\left(\alpha_{ij}, \tau, s\right) \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = \frac{n}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_{ji}} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}}\right) - \frac{n}{3}\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial u}{\partial \alpha_{kk}} \quad \text{et} \quad p = -n\frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{5.46}$$

ce qui implique pour l'équation thermocinétique la relation suivante

$$u = u\left(\alpha_{ij}, \tau, s\right) \quad \Rightarrow \quad n\frac{du}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\alpha}_k}{dt} - p\frac{d\tau}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \tag{5.47}$$

A la lumière de ces quelques considérations rudimentaires, on constate qu'une dépendance directe de l'énergie interne u en le vecteur de rotation globale $\vec{\omega}$ n'existe généralement pas et que, par conséquent, le torseur des moments $\vec{m}$ est en principe identiquement nul. Cependant, la possibilité d'existence d'un torseur des moments $\vec{m}$ a été volontairement introduite ici afin de rester dans un cadre théorique très général, d'autant plus qu'il est facile d'imaginer que u puisse dépendre du vecteur de rotation globale $\vec{\omega}$ du réseau, par exemple s'il existe un couplage de nature vectorielle entre un réseau présentant certaines propriétés directionnelles particulières (comme un moment magnétique axial ou une polarisation électrique axial) et un certain champ extérieur défini dans le référentiel absolu (comme un champ magnétique ou un champ électrique par exemple).

D'autre part, il sera aussi montré plus tard que, sous certaines conditions bien particulières, le tenseur des contraintes de cisaillement élastique $\vec{s}_i$ peut avantageusement être remplacé par un torseur de moment $\vec{m}$ conjugué au vecteur de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$.

Une autre remarque importante peut être faite ici. Dans notre description en coordonnées d'Euler, les potentiels mécaniques sont donnés par des équations d'état qui font intervenir la densité n de sites de réseau comme facteur multiplicatif. Or cette densité n est directement reliée à l'expansion volumique τ du solide ou au volume moyen v des sites du réseau par les relations $n = 1/v = n_0 e^{-\tau}$, ce qui a pour conséquence que les potentiels mécaniques dépendront en ce cas non-linéairement de l'expansion volumique τ du solide.

5.2 - Anélasticité et plasticité d'un réseau

La seule manière de faire intervenir des processus dissipatifs dans un réseau solide de particules est de postuler que les distorsions par déformation élastique du réseau sont forcément accompagnées d'un autre type de distorsions, de nature dissipative. Ce sont ces distorsions dissipatives qui pourront entraîner à l'échelle microscopique du réseau l'existence de mouvements relatifs à grande distance entre particules, par glissement des plans de particules les uns sur les autres. On écrira de manière générale les distorsions totales $\vec{\beta}_i$ dans le repère locale

$$\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{él} + \vec{\beta}_i^{dis} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \tag{5.48}$$

Il est clair que les variations des distorsions élastiques $\vec{\beta}_i^{él}$ sont à l'origine d'une variation de travail de déformation élastique $\delta W_{él}$, qu'on écrira

$$\delta W_{él} = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{él} + \vec{m} d\vec{\omega}^{él} - p d\tau^{él} \tag{5.49}$$

Quant aux distorsions dissipatives $\vec{\beta}_i^{dis}$, elles pourront être à l'origine à la fois d'une variation de travail δW_{dis} et d'une variation de chaleur δQ_{dis}, qu'on écrira par conséquent

$$\delta W_{dis} + \delta Q_{dis} = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{dis} + \vec{m} d\vec{\omega}^{dis} - p d\tau^{dis} \tag{5.50}$$

Les deux phénoménologies possibles de dissipation

La relation *(5.50)* peut conduire à deux phénoménologies dissipatives différentes, suivant que la

variation de travail y est nulle ou ne l'est pas:
- si la variation de travail δW_{dis} est nulle, les distorsions dissipatives ne stockent aucune énergie potentielle dans le réseau, de sorte qu'elles sont parfaitement *irrécupérables*. Ce phénomène *thermodynamiquement irréversible* sera appelé *plasticité du réseau*, et les *distorsions plastiques* qui lui sont associées satisfont la relation suivante

$$\delta Q_{pl} = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{pl} + \vec{m} d\vec{\omega}^{pl} - p d\tau^{pl} \tag{5.51}$$

- si la variation de travail δW_{dis} n'est pas nulle, les distorsions dissipatives stockent de l'énergie potentielle dans le réseau, de sorte qu'elles sont cette fois *récupérables*. Mais ce phénomène reste *thermodynamiquement irréversible* puisqu'il dissipe de l'énergie sous forme de chaleur. Il sera appelé *anélasticité du réseau*, et les *distorsions anélastiques* qui lui sont associées satisfont la relation suivante

$$\delta W_{an} + \delta Q_{an} = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{an} + \vec{m} d\vec{\omega}^{an} - p d\tau^{an} \tag{5.52}$$

Comme les distorsions anélastiques contribuent à la fois à des variations de travail et de chaleur, il est nécessaire d'introduire une façon de décomposer l'expression précédente afin de séparer δW_{an} et δQ_{an}. La seule manière logique de procéder ici est évidemment d'écrire que

$$\begin{cases} \vec{s}_k = \vec{s}_k^{cons} + \vec{s}_k^{dis} \\ \vec{m} = \vec{m}^{cons} + \vec{m}^{dis} \\ p = p^{cons} + p^{dis} \end{cases} \tag{5.53}$$

donc de décomposer les tenseurs de contrainte en une *partie conservative*, responsable de la source de travail, et en une *partie dissipative*, responsable de la source de chaleur, exactement comme il l'avait déjà été fait lors de l'introduction de la viscoélasticité des fluides. Cette décomposition des tenseurs de contrainte permet ainsi d'écrire individuellement les variations de travail et de chaleur liées à l'anélasticité sous la forme

$$\begin{cases} \delta W_{an} = \vec{s}_k^{cons} d\vec{\beta}_k^{an} + \vec{m}^{cons} d\vec{\omega}^{an} - p^{cons} d\tau^{an} \\ \delta Q_{an} = \vec{s}_k^{dis} d\vec{\beta}_k^{an} + \vec{m}^{dis} d\vec{\omega}^{an} - p^{dis} d\tau^{an} \end{cases} \tag{5.54}$$

Une hypothèse concernant le phénomène d'anélasticité peut être émise ici, qui permettra de simplifier grandement la description des milieux solides dissipatifs par la suite. En effet, s'il est supposé que la trace du tenseur de distorsion anélastique est nulle, ceci a pour conséquence immédiate qu'il n'existe pas de composante anélastique de l'expansion volumique, et donc que les déformations anélastiques ne se composent que de cisaillements

Hypothèse: $\tau^{an} = \sum_k \vec{\beta}_k^{an} \vec{e}_k \equiv 0$ *(5.55)*

L'équation thermocinétique d'un réseau anélastique et plastique

En utilisant les relations *(5.49)* et *(5.54)*, et en tenant compte de l'hypothèse *(5.55)*, la variation de travail $\delta W_{déf}$ associée aux déformations d'un réseau présentant à la fois de l'élasticité, de l'anélasticité et de la plasticité s'écrit

$$\delta W_{déf} = \delta W_{él} + \delta W_{an} = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{él} + \vec{m} d\vec{\omega}^{él} - p d\tau^{él} + \vec{s}_k^{cons} d\vec{\beta}_k^{an} + \vec{m}^{cons} d\vec{\omega}^{an} \tag{5.56}$$

La variation totale de travail de déformation $\delta W_{déf}$ doit se retrouver dans l'expression de l'*équation thermocinétique* pour l'énergie interne u

$$n\frac{du}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\beta}_k^{él}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} - p\frac{d\tau^{él}}{dt} + \vec{s}_k^{cons}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{cons}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \qquad (5.57)$$

Cette équation thermocinétique pourrait aussi s'écrire en remplaçant les $\vec{\beta}_i$ par des $\vec{\alpha}_i$, grâce à la propriété *(5.42)*, de sorte que la fonction d'état énergie interne u d'un réseau auto-diffusif anélastique et plastique est une fonction des variables d'état suivantes

$$u = u\left(\alpha_{ij}^{él}, \alpha_{ij}^{an}, \omega_k^{él}, \omega_k^{an}, \tau^{él}, s\right) \qquad (5.58)$$

Une première constatation primordiale peut être faite concernant cette fonction d'état: elle ne dépend aucunement des distorsions plastiques du réseau. En fait, les distorsions plastiques du réseau n'apparaissent que dans la variation totale de chaleur $\delta Q_{déf}$ associée aux processus dissipatifs de déformation anélastique et plastique

$$\delta Q_{déf} = \delta Q_{an} + \delta Q_{pl} = \vec{s}_k^{dis} d\vec{\beta}_k^{an} + \vec{m}^{dis} d\vec{\omega}^{an} + \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{pl} + \vec{m} d\vec{\omega}^{pl} - p d\tau^{pl} \qquad (5.59)$$

Il est clair que dans une description d'un réseau anélastique et plastique, cette variation de chaleur devra forcément apparaître dans l'équation de la chaleur du réseau. Elle doit être responsable d'une source d'entropie reflétant l'irréversibilité thermodynamique des processus dissipatifs d'anélasticité et de plasticité.

Les équations constitutives d'un réseau anélastique et plastique

Hormis l'hypothèse simplificatrice *(5.55),* il n'existe aucune restriction qui puisse empêcher de décomposer les distorsions dissipatives apparaissant dans la relation *(5.48)* en une partie anélastique et une partie plastique, de sorte qu'il peut être écrit, en toute généralité, les équations constitutives d'un réseau solide qui soit à la fois *anélastique* et *plastique* sous la forme

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{él} + \vec{\beta}_i^{an} + \vec{\beta}_i^{pl} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \\ \vec{\omega} = \vec{\omega}^{(\delta)} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}^{pl} + \vec{\omega}_0(t) = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k \\ \tau = \tau^{él} + \tau^{pl} = \sum_k \vec{\beta}_k \vec{e}_k \qquad (\tau^{an} \equiv 0 \ \textit{par hypothèse}) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\varepsilon}_i^{él} + \vec{\varepsilon}_i^{an} + \vec{\varepsilon}_i^{pl} = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}_i^{él} + \vec{\alpha}_i^{an} + \vec{\alpha}_i^{pl} = \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\tau\vec{e}_i \end{cases} \qquad (5.60)$$

Il est clair que les distorsions $\vec{\beta}_i$, $\vec{\omega}$ et τ satisfont toujours dans le repère local les équations géométrocinétiques du tableau 1.1 qui les relient au champ de vitesse $\vec{\phi}$ au sein du solide, ainsi que les équations de géométrocompatibilité $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$ et $\text{div}\,\vec{\omega} = 0$.

Existence de sources et de puits de sites de réseau en présence de plasticité

D'après la relation *(1.18)*, l'équation de continuité pour n peut se présenter sous la forme d'une dérivée le long de la trajectoire

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln n + cste\right) = \frac{S_n}{n} - \text{div}\,\vec{\phi} \qquad (5.61)$$

On sait par définition qu'il doit exister un lien directe entre l'expansion volumique et la densité n de sites de réseau. Mais d'après les relations *(5.60)*, l'expansion volumique contient deux composantes puisque $\tau = \tau^{él} + \tau^{pl}$. Or, il est aisé de comprendre que la densité n de sites de réseau n'est pas reliée directement au scalaire d'expansion volumique total τ, *mais uniquement à sa partie élastique* $\tau^{él}$. Cette assertion implique que

$$\tau^{él} = -\ln\frac{n}{n_0} \quad \Rightarrow \quad n = n_0 \exp(-\tau^{él}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = -\frac{d\tau^{él}}{dt} \tag{5.62}$$

De cette assertion, on déduit que l'équation de continuité *(1.20)* doit s'écrire, en présence d'élasticité et de plasticité, sous la forme

$$\frac{d\tau^{él}}{dt} = -\frac{S_n}{n} + \mathrm{div}\vec{\phi} \tag{5.63}$$

Cette relation est très importante, car elle montre qu'en présence de plasticité, la densité n de sites de réseau peut ne plus satisfaire un principe de conservation. En fait, les phénomènes de déformations plastiques se comportent en sources ou puits de sites de réseau, ce qui se justifiera pleinement dans la suite de cet exposé lorsque sera introduite la notion de charges plastiques. Il apparaît par conséquent une *source de sites de réseau* S_n différente de zéro directement liée à la dérivé particulaire de l'expansion volumique plastique

$$S_n = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau^{él}}{dt} = -\frac{d\tau^{pl}}{dt} + \mathrm{div}\vec{\phi} \tag{5.64}$$

Ainsi, en présence de plasticité, les équations géométrocinétiques contiendront implicitement une source de réseau S_n non nulle associée à $d\tau^{pl}/dt$, et s'écriront

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi_i \quad ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\phi} \quad ; \quad \frac{d\tau}{dt} = \mathrm{div}\vec{\phi} \tag{5.65}$$

5.3 - Auto-diffusion dans un réseau

Il existe une conséquence très importante de l'équation de continuité *(5.61)* pour la densité n de sites dans un réseau: le *principe newtonien de conservation de la masse* serait violé en présence de sources de sites de réseau non nulles! Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier l'équation de continuité *(1.7)* pour n par la masse m des particules du réseau. Puisque la densité de masse vaut $\rho = mn$ et la quantité de mouvement vaut $\vec{p} = m\vec{\phi}$ dans un réseau sans défauts ponctuels intrinsèques, il vient l'équation suivante

$$\frac{\partial(mn)}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = mS_n - \mathrm{div}\left(mn\vec{\phi}\right) = \rho\frac{d\tau^{pl}}{dt} - \mathrm{div}\left(n\vec{p}\right) \tag{5.66}$$

qui présente effectivement un terme de source de masse lié à la plasticité du réseau. Il n'est évidemment pas possible d'admettre la non-conservation de la masse dans un réseau newtonien, de sorte que, dans un réseau qui ne contiendrait pas de défauts ponctuels intrinsèques, toutes distorsions plastiques conduisant à une source de sites de réseau S_n différente de zéro, donc avec $d\tau^{pl}/dt$ non nul, sont impossibles.

Par contre, on peut montrer maintenant que, dans le cas d'un réseau contenant de l'auto-diffusion par des défauts ponctuels intrinsèques, les distorsions plastiques conduisant à une source

de sites de réseau S_n différente de zéro ne violent plus le principe de conservation de la masse et dviennent par conséquent tout-à-fait possibles.

L'auto-diffusion dans un réseau de particules

Un défaut ponctuel intrinsèque de type *lacunaire* est un site du réseau solide de particules qui ne possède aucune particule (figure 5.2). Il s'agit donc d'un *"trou"* dans le réseau. Un défaut ponctuel intrinsèque de type *interstitiel* est une particule qui se trouve dans le réseau solide, mais qui n'occupe pas un site substitutionnel régulier de ce réseau (figure 5.2). Il s'agit donc d'une particule *"supplémentaire"* dans le réseau.

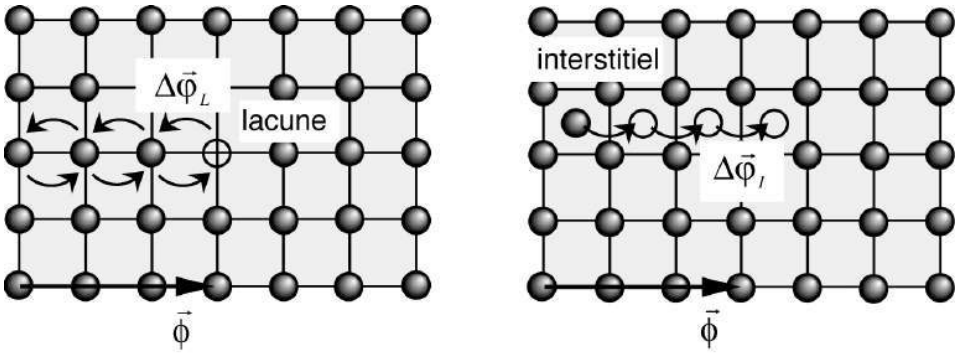


Figure 5.2 *- mouvement d'une lacune et d'un interstitiel dans un réseau solide*

Il est simple de comprendre comment la présence de tels défauts ponctuels intrinsèques peut conduire à l'existence de phénomènes de transport de masse par auto-diffusion lacunaire et/ou interstitielle. Ces deux mécanismes de transport de masse peuvent être illustrés dans un réseau se déplaçant à la vitesse absolue $\vec{\phi}$ (figure 5.2). Le mouvement d'une lacune à vitesse relative $\Delta\vec{\varphi}_L$ par rapport au réseau dans une direction donnée conduit à un flux relatif de masse dans la direction opposée, à vitesse $-\Delta\vec{\varphi}_L$, alors que le mouvement d'un auto-interstitiel à vitesse relative $\Delta\vec{\varphi}_I$ par rapport au réseau dans une direction donnée entraîne un flux de masse dans la même direction, à vitesse $\Delta\vec{\varphi}_I$.
Pour transcrire mathématiquement l'existence de ces défauts ponctuels, il faut introduire tout d'abord les densités volumiques de lacunes et d'auto-interstitiels, c'est-à-dire le nombre de lacunes et d'auto-interstitiels par unité de volume du réseau

$$\begin{aligned} &n_L = n_L(\vec{\xi},t) \quad \text{et} \quad n_I = n_I(\vec{\xi},t) \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3 \\ &n_L = n_L(\vec{r},t) \quad \text{et} \quad n_I = n_I(\vec{r},t) \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{O}x_1x_2x_3 \end{aligned} \qquad (5.67)$$

A partir de ces densités, il est possible de définir sans autre des *concentrations atomiques* de lacunes et d'auto-interstitiels par rapport à la densité n de sites de réseau par les relations

$$C_L = n_L / n \quad \text{et} \quad C_I = n_I / n \qquad (5.68)$$

Contrairement aux apparences, il existe une certaine dissymétrie entre lacunes et auto-interstitiels, qui s'exprime dans le fait que la concentration atomique maximum de lacunes est toujours limitée à 1, lorsque tous les sites du réseau sont localement inoccupés, alors que la concentra-

tion atomique d'auto-interstitiels dépend du nombre de sites interstitiels accessibles dans chaque maille d'un réseau de structure donnée, et du nombre d'interstitiels qu'il est possible de caser sur chacun de ces sites.

Au point $\vec{\xi}$ de l'espace absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et à l'instant t, la vitesse absolue $\vec{\phi}_L$ des lacunes et la vitesse absolue $\vec{\phi}_I$ des interstitiels peuvent être exprimées en fonction des vitesse relatives $\Delta\vec{\varphi}_L$ et $\Delta\vec{\varphi}_I$ de ces défauts par rapport au réseau, sous la forme

$$\vec{\phi}_L = \vec{\phi} + \Delta\vec{\varphi}_L \quad et \quad \vec{\phi}_I = \vec{\phi} + \Delta\vec{\varphi}_I \tag{5.69}$$

alors que dans le référentiel local $Ox_1x_2x_3$, la vitesse $\vec{\varphi}_L$ des lacunes et la vitesse $\vec{\varphi}_I$ des interstitiels s'écrivent respectivement

$$\vec{\varphi}_L = \vec{\varphi} + \Delta\vec{\varphi}_L \quad et \quad \vec{\varphi}_I = \vec{\varphi} + \Delta\vec{\varphi}_I \tag{5.70}$$

Si un morceau de réseau est suivi au cours de son évolution dans l'espace (figure 5.3), les équations de continuité caractérisant n, n_L et n_I sur cette portion de réseau peuvent se retrouver, à condition de les écrire sous forme d'intégrales sur ce morceau mobile de réseau. En effet, sur ce volume mobile, le nombre de sites de réseau ne change pas, ce qui se traduit mathématiquement par une relation valable aussi bien dans $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ que dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_m} n\,dV = 0 \tag{5.71}$$

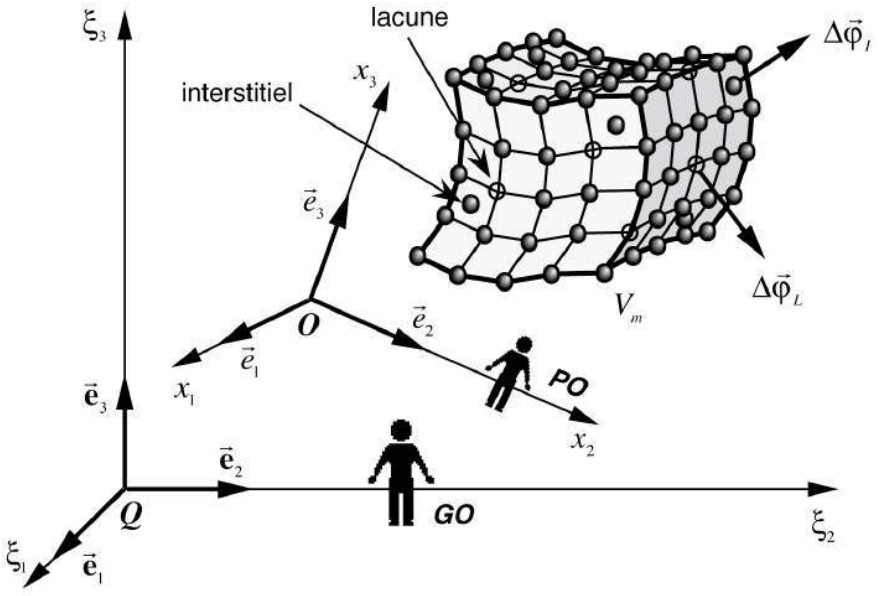


Figure 5.3 *- flux de lacunes et d'interstitiels à travers la surface d'un morceau de réseau*

Quant aux équations intégrales d'évolution des nombres de lacunes et d'interstitiels dans le volume $\boldsymbol{V}_m$, elles s'écrivent en tenant compte d'une part des sources volumiques S_L et S_I associées aux créations et annihilations de lacunes et d'interstitiels dans le volume $\boldsymbol{V}_m$, et d'autre part aux flux de lacunes et d'interstitiels entrant ou sortant à vitesse relative $\Delta\vec{\varphi}_L$ ou $\Delta\vec{\varphi}_I$ du volume $\boldsymbol{V}_m$ par la surface l'entourant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\iiint_{V_m} n_L\, dV = -\oiint_{S_m} n_L \Delta\vec{\varphi}_L\, d\vec{S} + \iiint_{V_m} S_L\, dV \\ \dfrac{d}{dt}\iiint_{V_m} n_I\, dV = -\oiint_{S_m} n_I \Delta\vec{\varphi}_I\, d\vec{S} + \iiint_{V_m} S_I\, dV \end{cases} \qquad (5.72)$$

Sous forme locale, dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$, en utilisant les formules de dérivation d'une intégrale sur un volume mobile, les équations de continuité pour la densité de sites de réseau et pour les densités de lacunes et d'interstitiels s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n\vec{\phi}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial n_L}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_L\vec{\phi}\right) = S_L - \operatorname{div}\left(n_L\Delta\vec{\varphi}_L\right) \\ \dfrac{\partial n_I}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_I\vec{\phi}\right) = S_I - \operatorname{div}\left(n_I\Delta\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \qquad (5.73)$$

Ces équations de continuité peuvent se mettre sous forme classique, en faisant apparaître les vitesse absolues des lacunes et des interstitiels grâce aux relations *(5.70)*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(n\vec{\phi}\right) \\ \dfrac{\partial n_L}{\partial t} = S_L - \operatorname{div}\left(n_L\vec{\phi}_L\right) \\ \dfrac{\partial n_I}{\partial t} = S_I - \operatorname{div}\left(n_I\vec{\phi}_I\right) \end{cases} \qquad (5.74)$$

L'équation de continuité pour la densité de sites de réseau n ne contient pas de terme de source de sites de réseau ($S_n = 0$), de sorte que les équations topologiques d'un réseau élastique avec auto-diffusion restent exactement les mêmes que celles établies dans le cas d'un réseau élastique. Les premières équations de continuité *(5.73)* obtenues pour n_L et n_I peuvent être encore transformées en remplaçant n_L et n_I par nC_L et nC_I et en y faisant apparaître la dérivée particulaire

$$\begin{cases} \dfrac{d(nC_L)}{dt} = S_L - nC_L \operatorname{div}\vec{\phi} - \operatorname{div}\left(n_L\Delta\vec{\varphi}_L\right) \\ \dfrac{d(nC_I)}{dt} = S_I - nC_I \operatorname{div}\vec{\phi} - \operatorname{div}\left(n_I\Delta\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \qquad (5.75)$$

Grâce à la relation suivante, aisée à vérifier pour $S_n = 0$

$$\frac{d(nC_L)}{dt} = n\frac{dC_L}{dt} + C_L\frac{dn}{dt} = n\frac{dC_L}{dt} - nC_L \operatorname{div}\vec{\phi} \qquad (5.76)$$

des équations décrivant directement la variation des concentrations atomiques C_L et C_I le long de la trajectoire sont obtenues

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = S_L - \operatorname{div}\left(n_L\Delta\vec{\varphi}_L\right) \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = S_I - \operatorname{div}\left(n_I\Delta\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \qquad (5.77)$$

En introduisant encore des *flux de diffusion* $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ de lacunes et d'interstitiels par rapport au

réseau, définis par les relations

$$\begin{cases} \vec{J}_L = nC_L \Delta\vec{\varphi}_L = nC_L\left(\vec{\phi}_L - \vec{\phi}\right) = nC_L\left(\vec{\varphi}_L - \vec{\varphi}\right) \\ \vec{J}_I = nC_I \Delta\vec{\varphi}_I = nC_I\left(\vec{\phi}_I - \vec{\phi}\right) = nC_I\left(\vec{\varphi}_I - \vec{\varphi}\right) \end{cases} \tag{5.78}$$

on peut réécrire *les équations de diffusion des lacunes et des interstitiels* sous la forme finale suivante

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = S_L - \operatorname{div}\vec{J}_L \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = S_I - \operatorname{div}\vec{J}_I \end{cases} \tag{5.79}$$

Ces équations faisant appel à la dérivée particulaire sont valides aussi bien dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ que dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. En effet, on peut vérifier que les équations *(5.79)* peuvent aussi être déduites à partir des équations de continuité dérivées des relations intégrales *(5.72)*, mais écrites dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, à savoir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(n\vec{\varphi}\right) \\ \dfrac{\partial n_L}{\partial t} = S_L - \operatorname{div}\left(n_L\vec{\varphi}_L\right) \\ \dfrac{\partial n_I}{\partial t} = S_I - \operatorname{div}\left(n_I\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \tag{5.80}$$

Les potentiels chimiques et l'équation thermocinétique en présence d'auto-diffusion

Dans un réseau élastique, anélastique et plastique présentant de l'auto-diffusion, il est clair que les concentrations atomiques C_L et C_I de lacunes et d'auto-interstitiels doivent influer aussi l'état énergétique du réseau, de sorte qu'il faut compléter la fonction d'état énergie interne *(5.58)*, et l'écrire maintenant comme une fonction des variables thermodynamiques suivantes

$$u = u\left(\alpha_{ij}^{él}, \omega_k^{él}, \tau^{él}, \alpha_{ij}^{an}, \omega_k^{an}, C_L, C_I, s\right) \tag{5.81}$$

La différentielle de la fonction d'état u le long de la trajectoire des sites du réseau s'écrit

$$du = \frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}^{él}} d\alpha_{ij}^{él} + \frac{\partial u}{\partial \omega_k^{él}} d\omega_k^{él} + \frac{\partial u}{\partial \tau^{él}} d\tau^{él} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}^{an}} d\alpha_{ij}^{an} + \frac{\partial u}{\partial \omega_k^{an}} d\omega_k^{an} + \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial C_L} dC_L + \frac{\partial u}{\partial C_I} dC_I \tag{5.82}$$

Cette différentielle permet d'introduire les potentiels mécaniques de contrainte, ainsi que le potentiel thermique de température $T = \partial u / \partial s$. Par analogie, il est possible maintenant d'introduire de nouveaux potentiels associés aux dérivées partielles $\partial u / \partial C_L$ et $\partial u / \partial C_I$. Ces potentiels seront appelés les *potentiels chimiques* μ_L et μ_I des lacunes et des interstitiels respectivement. En tenant compte de la relation *(5.42)*, on peut alors écrire la différentielle

$$ndu = \vec{s}_k d\vec{\beta}_k^{él} + m_k \omega_k^{él} - p d\tau^{él} + \vec{s}_k^{cons} d\vec{\beta}_k^{an} + m_k^{cons} \omega_k^{an} + nTds + n\mu_L dC_L + n\mu_I dC_I \tag{5.83}$$

L'équation thermocinétique d'un tel réseau solide s'en déduit immédiatement

$$n\frac{du}{dt} = \vec{s}_k \frac{d\vec{\beta}_k^{él}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} - p\frac{d\tau^{él}}{dt} + \vec{s}_k^{cons}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{cons}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + n\mu_L\frac{dC_L}{dt} + n\mu_I\frac{dC_I}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \tag{5.84}$$

Application du principe newtonien de conservation de la masse

En effet, les équations de continuité *(5.74)* et *(5.80)* obtenues dans le cas d'un réseau auto-diffusif peuvent être écrite en tenant compte de la source S_n de sites de réseau due à la composante plastique de l'expansion volumique du réseau solide. La première équation décrivant n s'écrit, dans $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ et $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ respectivement

$$\frac{\partial n}{\partial t} = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} - \mathrm{div}\left(n\vec{\phi}\right) = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} - \mathrm{div}\left(n\vec{\varphi}\right) \tag{5.85}$$

alors que les relations *(5.74)* et *(5.80)* pour les densités de lacunes n_L et d'interstitiels n_I restent inchangées

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_L}{\partial t} = S_L - \mathrm{div}\left(n_L\vec{\phi}_L\right) = S_L - \mathrm{div}\left(n_L\vec{\varphi}_L\right) \\ \dfrac{\partial n_I}{\partial t} = S_I - \mathrm{div}\left(n_I\vec{\phi}_I\right) = S_I - \mathrm{div}\left(n_I\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \tag{5.86}$$

Quant à la densité de masse ρ du réseau solide contenant n_L lacunes et n_I interstitiels par unité de volume, elle s'exprime simplement

$$\rho = m\left(n + n_I - n_L\right) = mn\left(1 + C_I - C_L\right) \tag{5.87}$$

L'établissement d'une équation de continuité pour la densité de masse ρ dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ se fait à partir des équations *(5.85) et (5.86)*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(n + n_I - n_L\right)\right] = -\mathrm{div}\left[m\left(n\vec{\phi} + n_I\vec{\phi}_I - n_L\vec{\phi}_L\right)\right] + m\left(S_I - S_L\right) + mn\frac{d\tau^{pl}}{dt} \tag{5.88}$$

Cette équation peut être comparée avec l'équation fondamentale de continuité de la masse obtenue à partir des relations *(4.5)* et *(4.14)*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = S_m - \mathrm{div}\left(n\vec{p}\right) = S_m - \mathrm{div}\left(\rho\vec{\phi} + \vec{J}_m\right) \tag{5.89}$$

De cette comparaison, il émerge une première relation donnant la source de masse S_m par unité de volume

$$S_m = m\left(S_I - S_L\right) + mn\frac{d\tau^{pl}}{dt} = m\left(S_I - S_L\right) + mS_n \tag{5.90}$$

En admettant alors que *le principe de conservation de la masse ne peut être violé*, ce qui se traduit par l'hypothèse suivante

Hypothèse: $S_m \equiv 0$ *(5.91)*

il vient la relation suivante entre S_n, S_L et S_I

$$S_n = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} = S_L - S_I \tag{5.92}$$

Dans cette expression, les termes de source de lacunes S_L et de source d'interstitiels S_I contiennent en fait deux contributions: *les créations et annihilations spontanées de paires lacune-interstitiel*, qui seront écrites S_{I-L}, et *les créations ou les annihilations de lacunes et/ou d'interstitiels par les processus de déformation plastique*, qui seront écrites S_L^{pl} et S_I^{pl}. De la sorte, les sources totales S_L et S_I peuvent se décomposer comme suit

$$S_L = S_{I-L} + S_L^{pl} \quad ; \quad S_I = S_{I-L} + S_I^{pl} \tag{5.93}$$

Ces valeurs de S_L et S_I peuvent être injectées dans l'équation *(5.92)*

$$S_n = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} = S_L^{pl} - S_I^{pl} \tag{5.94}$$

ce qui relate bien le fait que les distorsions plastiques à trace non nulle ne peuvent être que des sources ou des puits de lacunes et/ou d'auto-interstitiels.

L'auto-diffusion en présence de sources de sites de réseau par plasticité

A partir des équations de continuité *(5.86)* obtenues pour n_L et n_I, en remplaçant n_L et n_I par nC_L et nC_I, il vient

$$\begin{cases} d(nC_L)/dt = S_L - nC_L \operatorname{div}\vec{\phi} - \operatorname{div}\left(n_L \Delta\vec{\varphi}_L\right) \\ d(nC_I)/dt = S_I - nC_I \operatorname{div}\vec{\phi} - \operatorname{div}\left(n_I \Delta\vec{\varphi}_I\right) \end{cases} \tag{5.95}$$

En effectuant, grâce à la relation *(5.66)* contenant la source S_n non nulle de sites de réseau, les opérations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{d(nC_L)}{dt} = n\dfrac{dC_L}{dt} + C_L\dfrac{dn}{dt} = n\dfrac{dC_L}{dt} + C_L S_n - C_L n \operatorname{div}\vec{\phi} \\ \dfrac{d(nC_I)}{dt} = n\dfrac{dC_I}{dt} + C_I\dfrac{dn}{dt} = n\dfrac{dC_I}{dt} + C_I S_n - C_I n \operatorname{div}\vec{\phi} \end{cases} \tag{5.96}$$

et en introduisant encore les flux de diffusion $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ de lacunes et d'interstitiels par rapport au réseau, définis par les relations *(5.59),* les équations d'auto-diffusion des lacunes et des interstitiels dans le réseau prennent la forme suivante, qui est évidemment valable aussi bien dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ que dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = S_L - C_L S_n - \operatorname{div}\vec{J}_L \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = S_I - C_I S_n - \operatorname{div}\vec{J}_I \end{cases} \tag{5.97}$$

Comparativement aux équations d'auto-diffusion *(5.60)* obtenues précédemment, il apparaît ici les termes supplémentaires $-C_L S_n$ et $-C_I S_n$ associés à la source S_n de sites de réseau. En utilisant les relations *(5.94)* et *(53.95)*, on fait apparaître en détail les sources et les puits de défauts ponctuels intrinsèques lacunaires et interstitiels

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = \left(S_{I-L} + S_L^{pl}\right) - C_L\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) - \operatorname{div}\vec{J}_L \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = \left(S_{I-L} + S_I^{pl}\right) - C_I\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) - \operatorname{div}\vec{J}_I \end{cases} \tag{5.98}$$

5.4 - Dynamique newtonienne d'un réseau

Si le réseau considéré se comporte de manière newtonienne dans le référentiel absolu du ***GO***, on peut exprimer sa quantité de mouvement locale, son énergie cinétique locale et la source de

travail des forces extérieures.

La quantité de mouvement

De la comparaison entre *(5.88)* et *(5.89)*, il émerge une autre relation intéressante donnant la quantité de mouvement moyenne $\vec{p}$ par site de réseau

$$\vec{p} = m\left(\vec{\phi} + C_I\vec{\phi}_I - C_L\vec{\phi}_L\right) = \frac{1}{n}\left(\rho\vec{\phi} + \vec{J}_m\right) \qquad (5.99)$$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ peut s'écrire de manière quelque peu différente, en décomposant les vitesses $\vec{\phi}_L$ et $\vec{\phi}_I$ grâce aux relations *(5.69)*

$$\vec{p} = m\left(\vec{\phi} + C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \frac{m}{n}\left(nC_I\Delta\vec{\varphi}_I - nC_L\Delta\vec{\varphi}_L\right) \qquad (5.100)$$

En introduisant les flux de diffusion $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ de lacunes et d'interstitiels définis en *(5.78),* on déduit que

$$\vec{p} = m\vec{\phi} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \frac{m}{n}\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right) \qquad (5.101)$$

et donc que la quantité de mouvement moyenne transportée par site de réseau est la somme de la quantité de mouvement $m\vec{\phi}$ associée à la vitesse absolue du réseau, de la quantité de mouvement $m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}$ due au transport des lacunes et des interstitiels par le réseau et de la quantité de mouvement $m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)/n$ associée à l'auto-diffusion des lacunes et des interstitiels dans le réseau.

En introduisant la densité de masse ρ *(5.87)*, on peut encore écrire $\vec{p}$ sous la forme

$$\vec{p} = \frac{1}{n}\left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] \qquad (5.102)$$

En comparant cette relation avec la relation *(5.90)*, on déduit

$$\vec{J}_m = m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right) \qquad (5.103)$$

ce qui signifie aussi que la quantité de mouvement $\vec{p}$ moyenne associée à chaque site de réseau est due à la somme d'un transport de masse $\rho\vec{\phi}/n$ dû au mouvement d'entraînement local du réseau chargé en lacunes et interstitiels, et d'un transport de masse $m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)/n = \vec{J}_m/n$ dû à l'auto-diffusion des défauts ponctuels intrinsèques de type lacunaire et de type interstitiel.

Il est possible d'établir d'une autre façon la valeur de $\vec{p}$. Dans la maille du réseau, il y a n_I particules interstitielles à vitesse relative $\Delta\vec{\varphi}_I$, qui transportent de la masse dans la direction de $\Delta\vec{\varphi}_I$. D'autre part, le mouvement des n_L lacunes à vitesse $\Delta\vec{\varphi}_L$ est associé à un flux de masse de n_L particules du réseau à vitesse $-\Delta\vec{\varphi}_L$, qui transportent donc de la masse dans la direction opposée à $\Delta\vec{\varphi}_L$. Les particules restantes du réseau, à savoir les $n - n_L$ particules situées aux noeuds, dont on soustrait encore les n_L particules situées sur les noeuds associés aux sauts lacunaires, se déplacent à vitesse relative nulle par rapport au réseau, d'où le résumé suivant de la situation dynamique des particules dans l'unité de volume du milieu:

- il existe $n - 2n_L$ particules à vitesse relative nulle par rapport au réseau, et donc à vitesse absolue $\vec{\phi}$,

- il existe n_I particules à vitesse relative $\Delta\vec{\varphi}_I$ par rapport au réseau, et donc à vitesse absolue $\vec{\phi}+\Delta\vec{\varphi}_I=\vec{\phi}_I$,
- il existe n_L particules à vitesse relative $-\Delta\vec{\varphi}_L$ par rapport au réseau, et donc à vitesse absolue $\vec{\phi}-\Delta\vec{\varphi}_L=2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L$.

Le flux de masse, ou densité de quantité de mouvement $\vec{P}_m$ au point $\vec{\xi}$ et à l'instant t dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$, peut alors se déduire de cette situation dynamique des particules, et on en déduit bien les expressions *(5.99)* à *(5.102)*

$$\begin{aligned}\vec{P}_m &= m\left(n-2n_L\right)\vec{\phi}+mn_L\left(2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L\right)+mn_I\vec{\phi}_I \\ &= m\left(n+n_I-n_L\right)\vec{\phi}+mn_I\Delta\vec{\varphi}_I-mn_L\Delta\vec{\varphi}_L=\rho\vec{\phi}+m\left(\vec{J}_I-\vec{J}_L\right)=n\vec{p}\end{aligned} \qquad (5.104)$$

L'énergie cinétique

On peut également déduire l'énergie cinétique moyenne e_{cin} par site de réseau. En effet, la densité volumique d'énergie cinétique E_{cin} s'écrit simplement à partir des vitesses absolues et des densités des différentes espèces

$$E_{cin}=\left(n-2n_L\right)\frac{1}{2}m\vec{\phi}^2+n_I\frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2+n_L\frac{1}{2}m\left(2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L\right)^2 \qquad (5.105)$$

On en déduit l'énergie cinétique moyenne e_{cin} par site par division par n

$$e_{cin}=\left(1-2C_L\right)\frac{1}{2}m\vec{\phi}^2+C_I\frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2+C_L\frac{1}{2}m\left(2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L\right)^2 \qquad (5.106)$$

L'énergie cinétique moyenne par site de réseau est égale à l'énergie cinétique d'un site de réseau, diminuée d'une fraction correspondant à l'énergie cinétique des couples de particules qui sont soustraites au réseau pour assurer la diffusion lacunaire, et augmentée d'une fraction correspondant à l'énergie cinétique des interstitiels et d'une fraction correspondant à l'énergie cinétique associée aux sauts lacunaires.

L'expression de e_{cin} peut encore s'écrire en remplaçant $\vec{\phi}$ par $\vec{\phi}_L-\Delta\vec{\varphi}_L$ dans le terme suivant

$$\frac{1}{2}m\left(2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L\right)^2-m\vec{\phi}^2=-\frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^2-2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right) \qquad (5.107)$$

ce qui permet d'écrire finalement

$$e_{cin}=\frac{1}{2}m\left[\vec{\phi}^2+C_I\vec{\phi}_I^2-C_L\left(\vec{\phi}_L^2-2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right)\right] \qquad (5.108)$$

La source de travail des champs de forces extérieures

Quant à la source de travail S_w^{ext} due à un champ de forces de volume extérieures, elle peut aussi se calculer si on connait la nature de ce champ de force. A titre d'exemple, si on suppose que le réseau se trouve dans un *champ gravifique d'accélération constante* $\vec{g}$, on aura

$$S_w^{ext}=m\left[\left(n-2n_L\right)\vec{\phi}\vec{g}+n_I\vec{\phi}_I\vec{g}+n_L\left(2\vec{\phi}-\vec{\phi}_L\right)\vec{g}\right]=\vec{P}_m\vec{g}=n\vec{p}\vec{g} \qquad (5.109)$$

En introduisant l'expression *(5.102)* de $\vec{p}$, il vient l'expression finale suivante de la source de travail des forces extérieures découlant d'un champ gravifique constant

$$S_w^{ext}=\rho\vec{\phi}\vec{g}+\left(\vec{J}_I-\vec{J}_L\right)m\vec{g} \qquad (5.110)$$

Chapitre 6

Equations d'évolution d'un réseau newtonien

L'introduction de l'élasticité, des processus mécaniques dissipatifs d'anélasticité et de plasticité, des processus de transport et de la dynamique newtonienne d'un réseau solide dans les équations fondamentales de continuité pour l'énergie et l'entropie permet de retrouver l'ensemble des équations qui régissent le comportement spatio-temporelle de ce réseau. Ces équations de comportement sont de deux types: les *équations fondamentales* qui restent identiques à elles-même quel que soit la nature du réseau considéré, et les *équations phénoménologiques* qui dépendent essentiellement de la nature de ce réseau.

6.1 - Equations d'évolution d'un réseau

Le premier membre du principe de continuité de l'énergie dans un réseau solide élastique, anélastique et plastique, en présence de lacunes et d'auto-interstitiels, s'écrit en utilisant les relations *(5.108)* pour e_{cin} et *(5.84)* pour du/dt, tout en supposant ici, par souci de généralité, que l'énergie interne u peut aussi dépendre de $\vec{\omega}^{él}$ et $\vec{\omega}^{an}$

$$\begin{aligned} n\frac{de_{cin}}{dt} + n\frac{du}{dt} &= nm\vec{\phi}\frac{d\vec{\phi}}{dt} + n\left[\mu_I + \frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2\right]\frac{dC_I}{dt} + nmC_I\boxed{\vec{\phi}_I}\frac{d\vec{\phi}_I}{dt} \\ &+ n\left[\mu_L - \frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^2 - 2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right)\right]\frac{dC_L}{dt} - nmC_L\boxed{\vec{\phi}_L}\frac{d\vec{\phi}_L}{dt} + 2nmC_L\Delta\vec{\varphi}_L\frac{d\Delta\vec{\varphi}_L}{dt} \\ &+ \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{él}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} - p\frac{d\tau^{él}}{dt} + \vec{s}_k^{cons}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{cons}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + nT\frac{ds}{dt} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Les termes encadrés peuvent être décomposés grâce aux relations *(5.69)*, et il est possible d'introduire des *énergies chimiques généralisées* μ_L^* et μ_I^* des lacunes et des interstitiels, définies comme les sommes des potentiels chimiques et des énergies cinétiques associés à chacune des espèces diffusantes

$$\mu_L^* = \mu_L - \frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^2 - 2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right) = \mu_L + e_{cin}^L \quad \text{et} \quad \mu_I^* = \mu_I + \frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2 = \mu_I + e_{cin}^I \qquad (6.2)$$

Grâce aux relations *(5.60),* l'expression

$$\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{él}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} - p\frac{d\tau^{él}}{dt} + \vec{s}_k^{cons}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{cons}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} \qquad (6.3)$$

peut être remplacée par la suivante, qui a l'avantage de faire apparaître $\vec{\beta}_i$, $\vec{\omega}$ et τ

$$\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt} + \left(-\vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} - \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} - \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} - \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} + p\frac{d\tau^{pl}}{dt}\right) \qquad (6.4)$$

Il vient alors l'expression

$$n\frac{de_{cin}}{dt}+n\frac{du}{dt}=nm\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{\phi}}{dt}+C_I\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}-C_L\frac{d\vec{\phi}_L}{dt}\right)+m\vec{J}_I\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}-m\vec{J}_L\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L-2\Delta\vec{\varphi}_L\right)$$
$$+nT\frac{ds}{dt}+n\mu_I^*\frac{dC_I}{dt}+n\mu_L^*\frac{dC_L}{dt}+\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt}+\vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt}-p\frac{d\tau}{dt} \qquad (6.5)$$
$$+\left(-\vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt}-\vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}-\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt}-\vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}+p\frac{d\tau^{pl}}{dt}\right)$$

Dans la deuxième ligne de cette expression, les dérivées particulaires des tenseurs topologiques et des concentrations atomiques sont remplaçables en utilisant les équations géométro-cinétiques *(5.65)* et les équations de diffusion *(5.98). Il vient*

$$n\frac{de_{cin}}{dt}+n\frac{du}{dt}=\left[nm\frac{d\vec{\phi}}{dt}+nmC_I\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}-nmC_L\frac{d\vec{\phi}_L}{dt}-\sum_k\vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{s}_k+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{m}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}p\right]\vec{\phi}$$
$$-\mathrm{div}\left[\mu_L^*\vec{J}_L+\mu_I^*\vec{J}_I-\phi_k\vec{s}_k-\frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right)+p\vec{\phi}\right] \qquad (6.6)$$
$$+\begin{bmatrix}\mu_L^*\left(S_L-C_LS_n\right)+\mu_I^*\left(S_I-C_IS_n\right)\\ +\vec{J}_I\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mu_I^*+m\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}\right)+\vec{J}_L\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mu_L^*-m\frac{d\left(\vec{\phi}_L-2\Delta\vec{\varphi}_L\right)}{dt}\right)\\ -\vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt}-\vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}-\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt}-\vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}+p\frac{d\tau^{pl}}{dt}+nT\frac{ds}{dt}\end{bmatrix}$$

Cette expression doit maintenant être comparée au deuxième membre du premier principe *(4.23)*, dans lequel la source de sites S_n est bien différente de zéro

$$n\frac{de_{cin}}{dt}+n\frac{du}{dt}=S_w^{ext}-\mathrm{div}\,\vec{J}_w-\mathrm{div}\,\vec{J}_q-uS_n-e_{cin}S_n \qquad (6.7)$$

et qui s'écrit, en introduisant la source de travail *(5.110)* d'un champ gravifique constant

$$n\frac{de_{cin}}{dt}+n\frac{du}{dt}=\left[\rho\vec{g}\right]\vec{\phi}-\mathrm{div}\left[\vec{J}_w\right]+\left[\left(\vec{J}_I-\vec{J}_L\right)m\vec{g}-\mathrm{div}\,\vec{J}_q-uS_n-e_{cin}S_n\right] \qquad (6.8)$$

De cette comparaison point par point, il apparaît trois équations importantes qui doivent toujours être satisfaites dans un réseau élastique, anélastique, plastique et auto-diffusif.

L'équation de Newton du réseau

La comparaison des expressions vectorielles entre crochets, dans le produit scalaire avec $\vec{\phi}$, conduit à l'équation suivante

$$nm\frac{d\vec{\phi}}{dt}+nmC_I\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}-nmC_L\frac{d\vec{\phi}_L}{dt}-\sum_k\vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{s}_k+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\vec{m}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\rho\vec{g} \qquad (6.9)$$

En utilisant la dérivée particulaire de la quantité de mouvement moyenne $\vec{p}$ par site donnée par l'expression *(5.99)*

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\left(\frac{d\vec{\phi}}{dt}+C_I\frac{d\vec{\phi}_I}{dt}+\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt}-C_L\frac{d\vec{\phi}_L}{dt}-\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) \qquad (6.10)$$

l'équation *(6.9)* devient une équation dynamique pour la quantité de mouvement $\vec{p}$

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g} + \sum_k \vec{e}_k \operatorname{div}\vec{s}_k - \frac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{m} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}p + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \tag{6.11}$$

Cette équation n'est évidemment rien d'autre que l'*équation de Newton* appliquée au réseau, en coordonnées d'Euler. Cette équation gère la dynamique du solide, qui dépend de la force gravifique $\rho\vec{g}$, des forces de volume dérivant des potentiels de contrainte $\vec{s}_i$, $\vec{m}$ et p et de quantités de mouvement additionnelles apportées au réseau lors d'accroissement des concentrations de défauts ponctuels. L'expression *(6.11)* représente en fait l'équation de Newton qu'on obtient en utilisant l'équation thermocinétique *(5.84)*. Mais on peut vérifier en se basant sur les équations thermocinétiques *(5.13)* et (5.7), que cette même équation de Newton peut s'écrire sous deux autres formes, faisant apparaître les potentiels mécaniques $\vec{\sigma}_i$ et $\vec{\Sigma}_i$

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g} + \sum_k \vec{e}_k \operatorname{div}\vec{\sigma}_k - \frac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{m} + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \tag{6.12}$$

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g} + \sum_k \vec{e}_k \operatorname{div}\vec{\Sigma}_k + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \tag{6.13}$$

Le flux de travail et la force de surface

La comparaison des arguments vectoriels des opérateurs de divergence conduit à l'expression du flux de travail au sein du réseau

$$\vec{J}_w = \mu_L^*\vec{J}_L + \mu_I^*\vec{J}_I - \phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) + p\vec{\phi} \tag{6.14}$$

Ce flux correspond à une propagation d'énergie au sein du solide. On remarque entre autre que la contribution due à $\vec{m}$ est un vecteur tout-à-fait similaire au *vecteur de Poynting* de l'électromagnétisme. L'expression *(6.14)* permet d'écrire l'intégrale de surface apparaissant dans l'expression *(4.18)*

$$\begin{aligned} -\oiint_{S_m}\vec{J}_w\,d\vec{S} &= -\oiint_{S_m}\left(\mu_L^*\vec{J}_L + \mu_I^*\vec{J}_I - \phi_k\vec{s}_k - \left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right)/2 + p\vec{\phi}\right)d\vec{S} \\ &= \oiint_{S_m}\vec{\phi}\left[\sum_k \vec{e}_k\left(\vec{s}_k\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \left(\vec{m}\wedge\vec{\boldsymbol{n}}\right)/2 - \vec{\boldsymbol{n}}p\right]dS - \oiint_{S_m}\left[\mu_L^*\vec{J}_L + \mu_I^*\vec{J}_I\right]\vec{\boldsymbol{n}}\,dS \end{aligned} \tag{6.15}$$

La première intégrale fait apparaître la notion de *force de surface* $\vec{F}_S$, où $\vec{\boldsymbol{n}}$ correspond au vecteur unité normal à la surface considérée, et la deuxième intégrale fait apparaître deux *flux d'énergie associés aux flux de diffusion de lacunes et d'interstitiels*

$$\begin{cases} \vec{F}_S = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{s}_k\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}\wedge\vec{\boldsymbol{n}}\right) - \vec{\boldsymbol{n}}p \\ \vec{J}_w^L = \mu_L^*\vec{J}_L = \left[\mu_L - \frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^2 - 2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right)\right]nC_L\Delta\vec{\varphi}_L \\ \vec{J}_w^I = \mu_I^*\vec{J}_I = \left[\mu_I + \frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2\right]nC_I\Delta\vec{\varphi}_I \end{cases} \tag{6.16}$$

Les deux dernières relations montrent que les flux de travail associés aux flux de diffusion des

lacunes et des interstitiels contiennent à la fois des flux d'énergie potentielle (les potentiels chimiques μ_L et μ_I des lacunes et des interstitiels) et des flux d'énergie cinétique.
La première relation pourrait aussi être calculée à partir des autres potentiels mécaniques et conduirait simplement aux expressions suivantes

$$\vec{F}_S = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\sigma}_k \vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (6.17)$$

$$\vec{F}_S = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\Sigma}_k \vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (6.18)$$

Les trois équations pour la force de surface permettent de fixer les *conditions aux limites* extérieures du solide, c'est-à-dire de relier aux limites du milieu les forces extérieures $\vec{F}_S$ par unité de surface aux tenseurs de contrainte $\vec{\Sigma}_i$, $\vec{\sigma}_i$ ou $\vec{s}_i$, au vecteur moment $\vec{m}$ et au scalaire de pression p.
A partir de ces expressions de la force de surface $\vec{F}_S$ se déduit aussi aisément l'interprétation physique, tout à fait classique, des potentiels de contrainte $\vec{\Sigma}_i$, $\vec{\sigma}_i$ ou $\vec{s}_i$, qui sont dimensionnellement des forces par unité de surface: la composante Σ_{ij} du tenseur $\vec{\Sigma}_i$ est égale à la force *par unité de surface*, appliquée dans la direction i sur une surface unité perpendiculaire à la direction j. Schématiquement, on peut représenter l'ensemble de ces forces agissant sur un cube unité du milieu de la façon représentée à la figure 6.1.

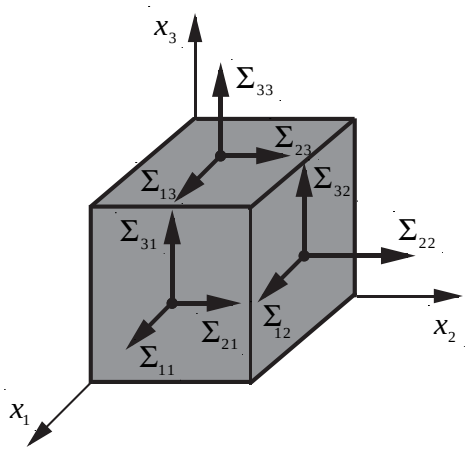


Figure 6.1 *- interprétation des composantes du tenseur de contrainte* $\vec{\Sigma}_i$

Les composantes du tenseur $\vec{\Sigma}_i$ ont donc les dimensions d'une contrainte, d'une force par unité de surface, et c'est pourquoi nous avons appelé $\vec{\Sigma}_i$ le *tenseur des contraintes* conjugué à $\vec{\beta}_i$. La même interprétation peut être donnée pour les tenseurs $\vec{\sigma}_i$ et $\vec{s}_i$, à savoir des tenseurs de contraintes conjugués à $\vec{\varepsilon}_i$ et $\vec{\alpha}_i$ respectivement.
Quant au vecteur $\vec{m}$, il peut être interprété grâce au schéma de la figure 6.2. Le vecteur $\vec{m}$ représente en fait le moment local appliqué au milieu continu par les forces de surface Σ_{ij}. $\vec{m}$ est donc le vecteur moment conjugué au vecteur $\vec{\omega}$ des rotations, de telle sorte que l'on appellera $\vec{m}$ le *torseur des moments* conjugué à $\vec{\omega}$. Le scalaire p est défini comme la moyenne des trois contraintes de compression Σ_{ii} ou σ_{ii}, changée de signe. Il a les dimensions d'une pression hydrostatique et nous l'appellerons *scalaire de pression* conjugué à τ.

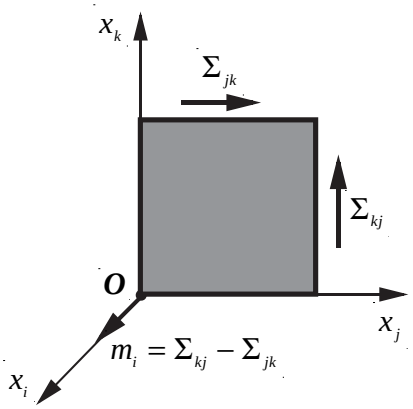


Figure 9.3 *- interprétation des composantes du torseur de moment* $\vec{m}$

Finalement, les équations *(6.16)* à *(6.18)* permettent encore de déduire les *conditions de passage* à l'interface entre deux milieux (voir figure 3.9) pour les potentiels de contrainte $\vec{\Sigma}_i$, $\vec{\sigma}_i$ ou $\vec{s}_i$, pour le vecteur moment $\vec{m}$ et pour le scalaire de pression p, en assurant l'égalité des forces de surface de part et d'autre de l'interface, selon les trois équations de passage suivantes

$$\sum_k \vec{e}_k \left(\vec{s}_k^{(1)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}^{(1)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) - \vec{\boldsymbol{n}} p^{(1)} = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{s}_k^{(2)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}^{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) - \vec{\boldsymbol{n}} p^{(2)} \qquad (6.19)$$

$$\sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\sigma}_k^{(1)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}^{(1)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\sigma}_k^{(2)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}^{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (6.20)$$

$$\sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\Sigma}_k^{(1)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) = \sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\Sigma}_k^{(2)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (6.21)$$

L'équation de la chaleur du réseau

La comparaison des expressions scalaires entre crochets conduit à l'*équation de la chaleur*, ou *équation thermique*, d'un réseau élastique, anélastique et plastique, avec auto-diffusion, qui permet en principe de calculer l'évolution thermique du réseau

$$\begin{aligned} nT\frac{ds}{dt} = &-\mu_L^* S_L - \mu_I^* S_I - \left(e_{cin} + u - \mu_L^* C_L - \mu_I^* C_I\right) S_n \\ &-\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu_I^* + m\frac{d\vec{\phi}_I}{dt} - m\vec{g}\right)\vec{J}_I - \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu_L^* - m\frac{d\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right)}{dt} + m\vec{g}\right)\vec{J}_L \\ &+\vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} - p\frac{d\tau^{pl}}{dt} - \text{div}\,\vec{J}_q \end{aligned} \qquad (6.22)$$

En fait, l'écriture *(6.22)* de l'équation de la chaleur n'est pas optimale car elle ne sépare pas les processus de création de lacunes et d'interstitiels par création-annihilation de paires d'une part et par plasticité d'autre part. Pour en tenir compte, il est judicieux de réécrire cette équation en introduisant la définition *(5.64)* de $d\tau^{pl}/dt$, puis les définitions *(5.93)* de S_L et S_I, ainsi que la définition *(5.92)* de S_n. Il vient alors une équation de la chaleur qui ne dépend plus que de S_{I-L}, S_L^{pl} et S_I^{pl}

$$\begin{aligned} nT\frac{ds}{dt} &= -\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \left(\mu_L^* + h^*\right)S_L^{pl} - \left(\mu_I^* - h^*\right)S_I^{pl} \\ &+\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right)\vec{J}_L + \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right)\vec{J}_I \\ &+\vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} - \text{div}\,\vec{J}_q \end{aligned} \qquad (6.23)$$

dans laquelle on a introduit l'énergie h^* qui n'est rien d'autre que *l'énergie thermique* prise au réseau pour la création d'un site de réseau, donnée par

$$\begin{aligned} h^* &= u + pv + e_{cin} - \mu_L^* C_L - \mu_I^* C_I \\ &= f + Ts + pv + e_{cin} - \mu_L^* C_L - \mu_I^* C_I \end{aligned} \qquad (6.24)$$

La dénomination h^* donnée à cette énergie est simplement due au fait qu'il y intervient *l'enthalpie* $h = u + pv = f + Ts + pv$ par site de réseau. Cette énergie peut encore s'écrire, en y introduisant les définitions *(6.2)*

$$\begin{aligned} h^* &= u + pv + m\vec{\phi}^2/2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \\ &= f + Ts + pv + m\vec{\phi}^2/2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \end{aligned} \qquad (6.25)$$

Les sources de chaleur

Dans l'équation de la chaleur *(6.23)*, il apparaît plusieurs *sources de chaleur:*
- une source de chaleur $S_q^{formation(I-L)}$ qui correspond à *l'énergie thermique prise ou fournie au réseau lors de la création ou de l'annihilation d'une paire lacune-interstitiel*

$$S_q^{formation\ (I-L)} = -\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} \qquad (6.26)$$

- deux sources de chaleur $S_q^{diffusion(L)}$ et $S_q^{diffusion(I)}$ qui correspondent *aux énergies thermiques mises en jeu lors des processus de diffusion des lacunes et des interstitiels respectivement*

$$\begin{cases} S_q^{diffusion\ (L)} = \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right)\vec{J}_L \\ S_q^{diffusion\ (I)} = \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right)\vec{J}_I \end{cases} \qquad (6.27)$$

- une source de chaleur induite par les *phénomènes dissipatifs d'anélasticité*

$$S_q^{anélasticité} = \vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} \qquad (6.28)$$

- une source de chaleur induite par les *phénomènes dissipatifs de plasticité*, qui peut s'écrire sous deux formes différentes en utilisant la relation *(5.94)*

$$\begin{aligned} S_q^{plasticité} &= -\left(\mu_L^* + h^*\right)S_L^{pl} - \left(\mu_I^* - h^*\right)S_I^{pl} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} \\ &= -\mu_L^* S_L^{pl} - \mu_I^* S_I^{pl} - h^* S_n + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} \end{aligned} \qquad (6.29)$$

et qui démontre bien que les énergies thermiques prises au réseau valent respectivement μ_L^* pour créer une lacune, μ_I^* pour créer un auto-interstitiel et h^* pour créer un site de réseau.

La source d'entropie

Si l'équation thermique *(6.23)* est comparée avec l'expression *(4.29)* du second principe, dans laquelle la source de sites de réseau S_n n'est pas nulle, il vient l'expression de la *source d'entropie volumique* au sein du réseau élastique, anélastique et plastique, doué d'auto-diffusion

$$\begin{aligned} S_e = & -\frac{1}{T}\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right) S_{I-L} - \frac{1}{T}\left(\mu_L^* + g^*\right) S_L^{pl} - \frac{1}{T}\left(\mu_I^* - g^*\right) S_I^{pl} \\ & + \frac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right)\vec{J}_L + \frac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right)\vec{J}_I \\ & + \frac{1}{T}\left(\vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}\right) + \vec{J}_q\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \qquad (6.30)$$

dans laquelle g^* est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} g^* &= f + pv + e_{cin} - \mu_L^* C_L - \mu_I^* C_I \\ &= f + pv + m\vec{\phi}^2/2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \end{aligned} \qquad (6.31)$$

qui contient entre autre *l'enthalpie libre* $g = u + pv - Ts = f + pv$ par site de réseau.

6.2 - Relations phénoménologiques d'un réseau

Les fonctions et équations d'état

Il a déjà été fait mention des équations d'état à la section 5.1. Cependant, les expressions trouvées sont dérivées de l'énergie interne u du solide et dépendent par conséquent de l'entropie s. Comme il est en général beaucoup plus judicieux d'utiliser la température T comme variable indépendante, en lieu et place de l'entropie s, on peut introduire la fonction d'état *énergie libre* f par maille du réseau en appliquant la *transformation de Legendre* suivante

$$f = u - Ts \quad \Rightarrow \quad df = du - Tds - sdT \qquad (6.32)$$

Dans cette expression de la différentielle de l'énergie libre f, on peut introduire l'expression de la différentielle de l'énergie interne u obtenues en *(5.83)*

$$ndf = \vec{s}_k d\vec{\alpha}_k^{él} + m_k\omega_k^{él} - pd\tau^{él} + \vec{s}_k^{cons} d\vec{\alpha}_k^{an} + m_k^{cons}\omega_k^{an} + n\mu_L dC_L + n\mu_I dC_I - nsdT \qquad (6.33)$$

L'énergie libre $f = u - Ts$ devient alors une fonction des variables d'état suivantes

$$f = f\left(\alpha_{ij}^{él}, \alpha_{ij}^{an}, \omega_k^{él}, \omega_k^{an}, \tau^{él}, C_L, C_I, T\right) \qquad (6.34)$$

Une constatation primordiale peut être faite ici concernant cette fonction d'état, à savoir qu'elle ne dépend aucunement des distorsions plastiques du réseau.

Comme expliqué dans la section 5.1, les fonctions et équations d'état peuvent prendre différentes formes dans les trois représentations topologiques $\left\{\vec{\beta}_i\right\}$, $\left\{\vec{\varepsilon}_i, \vec{\omega}\right\}$ ou $\left\{\vec{\alpha}_i, \vec{\omega}, \tau\right\}$, qui ont chacune leurs propres potentiels de contrainte conjugués, à savoir $\left\{\vec{\Sigma}_i\right\}$, $\left\{\vec{\sigma}_i, \vec{m}\right\}$ et $\left\{\vec{s}_i, \vec{m}, p\right\}$ respectivement. Par exemple, de l'expression *(6.34)* de l'énergie libre f, ce sont les différentes équations d'état d'un réseau dans la représentation topologique $\left\{\vec{\alpha}_i, \vec{\omega}, \tau\right\}$ qui se déduisent directement :

- les *équations d'état de l'élasticité*:

$$\begin{cases} s_{ij} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{él}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{él}} \right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij} \sum_k \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{él}} = s_{ij}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \\ m_k = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{él}} = m_k(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \\ p = -n\dfrac{\partial f}{\partial \tau^{él}} = p(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \end{cases} \quad (6.35)$$

- les *équations d'état de l'anélasticité*:

$$\begin{cases} s_{ij}^{dis} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{an}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{an}} \right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij} \sum_k \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{an}} = s_{ij}^{dis}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \\ m_k^{dis} = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{an}} = m_k^{dis}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \end{cases} \quad (6.36)$$

- et finalement les *équations d'état pour l'entropie et pour les potentiels chimiques* des lacunes et des interstitiels:

$$\begin{cases} s = -\dfrac{\partial f}{\partial T} = s(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \\ \mu_L = \dfrac{\partial f}{\partial C_L} = \mu_L(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \\ \mu_I = \dfrac{\partial f}{\partial C_I} = \mu_I(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) \end{cases} \quad (6.37)$$

Les équations dissipatives de thermoconduction et d'auto-diffusion

Trois termes de la source d'entropie *(6.30)* dépendent de flux thermodynamiques et sont liés aux processus dissipatifs suivants:

- *le processus de thermoconduction:*

$$S_e^{thermoconduction} = \vec{J}_q \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} = \vec{J}_q \bullet \vec{X}_q \quad (6.38)$$

- *le processus de diffusion de lacunes:*

$$S_e^{auto-diffusion\ (L)} = \vec{J}_L \frac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\phi}_L\right) - m\vec{g} \right) = \vec{J}_L \bullet \vec{X}_L \quad (6.39)$$

- *le processus de diffusion d'auto-interstitiels:*

$$S_e^{auto-diffusion\ (I)} = \vec{J}_I \frac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g} \right) = \vec{J}_I \bullet \vec{X}_I \quad (6.40)$$

Ces processus peuvent s'écrire comme le produit de flux vectoriels par des forces thermodynamiques vectorielles qui leur sont conjuguées. Les forces $\vec{X}_L$ et $\vec{X}_I$ conjuguées aux flux de diffusion $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ contiennent plusieurs termes: une force de gravitation, une force d'inertie et une force chimique généralisée, cette dernière correspondant au gradient du potentiel chimique et de l'énergie cinétique des deux espèces de défauts ponctuels. Selon la *thermodynamique*

des processus irréversibles, il peut exister des couplages entre les divers flux et forces thermodynamiques apparaissant dans l'expression de la source d'entropie, à condition que ces flux et ces forces soient de même ordre tensoriel. Dans le cas présent, en ce qui concerne le *flux de chaleur par thermoconduction* $\vec{J}_q$ et les *flux de particules par auto-diffusion* $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$, il doit exister des *équations phénoménologiques dissipatives de thermoconduction et d'auto-diffusion*, qui dépendent fortement de l'état local du réseau et par conséquent surtout de la valeur des grandeurs n, T, C_L, C_I

$$\begin{cases} \vec{J}_q = \vec{J}_q(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) \\ \vec{J}_L = \vec{J}_L(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) \\ \vec{J}_I = \vec{J}_I(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) \end{cases} \qquad (6.41)$$

et qui, pour assurer la positivité des sources d'entropie *(6.38)* à *(6.40)*, doivent dépendre essentiellement de manière linéaire des forces thermodynamiques $\vec{X}_q$, $\vec{X}_L$ et $\vec{X}_I$, définies par les relations

$$\begin{cases} \vec{X}_q = \overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{1}{T} \\ \vec{X}_L = \dfrac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_L{}^* + m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right) \\ \vec{X}_I = \dfrac{1}{T}\left(- \overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_I{}^* - m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right) \end{cases} \qquad (6.42)$$

L'équation de création-annihilation de paires lacune-interstitiel

Le premier terme de la source d'entropie fait apparaître le produit de la source S_{I-L} de paires lacune-interstitiel, c'est-à-dire le nombre de paires créées ou annihilées par unité de volume et par unité de temps au sein du réseau, par un terme entropique $-(\mu_L^* + \mu_I^*)/T$ qui lui est conjugué, à savoir l'*entropie de formation* d'une paire lacune-interstitiel

$$S_e^{création-annihilation\ (I-L)} = S_{I-L} \bullet \left[-\frac{1}{T}(\mu_L^* + \mu_I^*) \right] \qquad (6.43)$$

Cette entropie de formation est directement liée à l'énergie thermique (chaleur) extraite du réseau pour former une paire lacune-interstitiel, comme le montre la source de chaleur $S_q^{formation\ (I-L)}$ obtenue en *(6.26)*. L'*énergie de formation d'une paire lacune-interstitiel* est par conséquent égale à la somme des énergies chimiques, à savoir les potentiels chimiques μ_L et μ_I, et des énergies cinétiques d'une paire, à savoir e_{cin}^L et e_{cin}^I comme le montre bien la comparaison des relations *(5.108)* et *(6.2)*

$$\mu_L^* + \mu_I^* = \mu_L + \mu_I + e_{cin}^L + e_{cin}^I \qquad (6.44)$$

Les énergies cinétiques e_{cin}^L et e_{cin}^I méritent une discussion plus étendue. Pour cela, il est judicieux de les écrire en utilisant les relations *(6.2)* dans lesquelles elles ont été définies

$$\begin{cases} e_{cin}^{L} = -\frac{1}{2} m\left(\vec{\phi}_L^{\,2} - 2\Delta\vec{\varphi}_L^{\,2}\right) = -\frac{1}{2} m\vec{\phi}^{\,2} - m\vec{\phi}\Delta\vec{\varphi}_L + \frac{1}{2} m\Delta\vec{\varphi}_L^{\,2} \\ e_{cin}^{I} = \frac{1}{2} m\vec{\phi}_I^{\,2} = \frac{1}{2} m\vec{\phi}^{\,2} + m\vec{\phi}\Delta\vec{\varphi}_I + \frac{1}{2} m\Delta\vec{\varphi}_I^{\,2} \end{cases} \quad (6.45)$$

Ces énergies se composent en fait d'un terme d'énergie cinétique d'entraînement proportionnel à $\vec{\phi}^{\,2}$, qui est négatif pour la lacune puisqu'elle représente alors le déficit d'énergie cinétique dû à l'absence d'une particule du réseau sur le site occupé par la lacune, et d'un terme d'énergie cinétique propre (Δe_{cin}^{L} et Δe_{cin}^{I}) lié au mouvement relatif du défaut ponctuel par rapport au réseau. La somme des énergies e_{cin}^{L} et e_{cin}^{I} est donc égale à

$$e_{cin}^{L} + e_{cin}^{I} = m\vec{\phi}\left(\Delta\vec{\varphi}_I - \Delta\vec{\varphi}_L\right) + \frac{1}{2} m\left(\Delta\vec{\varphi}_I^{\,2} + \Delta\vec{\varphi}_L^{\,2}\right) = \Delta e_{cin}^{L} + \Delta e_{cin}^{I} \quad (6.46)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta e_{cin}^{L} = \frac{1}{2} m\Delta\vec{\varphi}_L^{\,2} - m\vec{\phi}\Delta\vec{\varphi}_L \\ \Delta e_{cin}^{I} = \frac{1}{2} m\Delta\vec{\varphi}_I^{\,2} + m\vec{\phi}\Delta\vec{\varphi}_I \end{cases} \quad (6.47)$$

L'énergie cinétique Δe_{cin}^{I-L} nécessaire lors de la création d'une paire, et fournie par l'énergie thermique du réseau, est par conséquent égale à

$$\Delta e_{cin}^{I-L} = \Delta e_{cin}^{L} + \Delta e_{cin}^{I} = e_{cin}^{L} + e_{cin}^{I} \quad (6.48)$$

de sorte que l'*énergie de formation d'une paire lacune-interstitiel* est composée de l'énergie chimique $\mu_L + \mu_I$ et de l'énergie cinétique Δe_{cin}^{I-L}

$$\mu_L^* + \mu_I^* = \mu_L + \mu_I + \Delta e_{cin}^{I-L} \quad (6.49)$$

Il est clair que le taux S_{I-L} de création de paires doit fortement dépendre de la valeur de l'énergie de formation. Par conséquent, il existe assurément une *équation phénoménologique de création-annihilation de paires lacune-interstitiel*, dépendant de $\mu_L^* + \mu_I^*$. Celle-ci sera écrite ici sous une forme symbolique dans laquelle doit être inclue une dépendance fort probable en les paramètres thermodynamiques intensifs locaux n, T, C_L, C_I

$$S_{I-L} = S_{I-L}\left[\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right), n, T, C_L, C_I, ...\right] \quad (6.50)$$

Les équations dissipatives de plasticité

Les deuxième et troisième termes de la source d'entropie font apparaître les produits des sources scalaires de lacunes et d'interstitiels, dues à la création ou à l'annihilation de sites de réseau lors du processus d'expansion volumique plastique, par un terme d'entropie de formation

$$\begin{cases} S_e^{site-L} = S_L^{pl} \bullet \left[-\left(\mu_L^* + g^*\right)/T\right] \\ S_e^{site-I} = S_I^{pl} \bullet \left[-\left(\mu_I^* - g^*\right)/T\right] \end{cases} \quad (6.51)$$

Ces termes d'entropie de formation conjugués aux sources de lacunes et d'interstitiels par plasticité peuvent encore s'écrire sous la forme suivante, en utilisant les relations *(6.45)* pour e_{cin}^{L} et e_{cin}^{I}, et en introduisant la relation *(6.31)* donnant g^*

$$-\frac{1}{T}\left(\underbrace{\mu_L+e_{cin}^L}_{\substack{\text{énergie de formation}\\ \text{d'une lacune}}}\ \underbrace{+g+e_{cin}-\mu_L^*C_L-\mu_I^*C_I}_{\substack{\text{énergie de création}\\ \text{d'un site additionnel de réseau}}}\right)=-\frac{1}{T}\left(\underbrace{\mu_L+e_{cin}^L}_{\substack{\text{énergie de formation}\\ \text{d'une lacune}}}\ \underbrace{+g+\frac{m\vec{\phi}^2}{2}-\mu_L C_L-\mu_I C_I}_{\substack{\text{énergie de création}\\ \text{d'un site additionnel de réseau}}}\right)$$

$$-\frac{1}{T}\left(\underbrace{\mu_I+e_{cin}^I}_{\substack{\text{énergie de formation}\\ \text{d'un interstitiel}}}\ \underbrace{-g-e_{cin}+\mu_L^*C_L+\mu_I^*C_I}_{\substack{\text{énergie d'annihilation}\\ \text{d'un site de réseau}}}\right)=-\frac{1}{T}\left(\underbrace{\mu_I+e_{cin}^I}_{\substack{\text{énergie de formation}\\ \text{d'un interstitiel}}}\ \underbrace{-g-\frac{m\vec{\phi}^2}{2}+\mu_L C_L+\mu_I C_I}_{\substack{\text{énergie d'annihilation}\\ \text{d'un site de réseau}}}\right) \tag{6.52}$$

On constate alors que ces entropies de formation font intervenir deux grandeurs très importantes: l'*énergie de formation d'une lacune par création d'un site de réseau additionnel*, et l'*énergie de formation d'un interstitiel par annihilation d'un site de réseau*. La création ou l'annihilation de sites de réseau au cours de la déformation plastique va satisfaire une cinétique qui doit dépendre essentiellement des énergies de formation des lacunes ou des interstitiels, ainsi que des conditions physiques au sein du mélange, telles que le volume de la maille v, la température T, les concentrations atomiques des lacunes et des interstitiels, etc. Il doit par conséquent exister des *équations phénoménologiques de création-annihilation de sites de réseau*, qui traduiront la plasticité du réseau en expansion volumique, et qui seront écrites symboliquement sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau^{pl}}{dt}=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{n}\left(S_L{}^{pl}-S_I{}^{pl}\right) \\ S_L{}^{pl}=S_L{}^{pl}\left[\left(\mu_L{}^*+g^*\right),v,T,C_L,C_I,...\right] \\ S_I{}^{pl}=S_I{}^{pl}\left[\left(\mu_I{}^*-g^*\right),v,T,C_L,C_I,...\right] \end{cases} \tag{6.53}$$

Quant au terme dissipatif associé à la plasticité par cisaillement et par rotation, il conduit à une source d'entropie qu'il est possible d'écrire, en vertu de l'équation *(6.30)*

$$S_e^{pl}=\frac{1}{T}\left(\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt}+\vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}\right) \tag{6.54}$$

Dans cette relation, les champs potentiels mécaniques $\vec{s}_i$ et $\vec{m}$ sont parfaitement connus, puisqu'il s'agit des champs de contrainte de cisaillement élastique $\vec{s}_i$ et de torseur de moment élastique $\vec{m}$ déduits des équations d'état *(6.35)*. Par conséquent, ce sont les vitesses de déformation plastique par cisaillement et par rotation qui doivent satisfaire des *équations phénoménologiques dissipatives de plasticité*

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{pl}}{dt}=\dfrac{d\vec{\alpha}_i^{pl}}{dt}\left(\vec{s}_m,v,T,...\right) \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}=\dfrac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}\left(\vec{m},v,T,...\right) \end{cases} \tag{6.55}$$

Cette écriture reflète alors le fait que les termes de source d'entropie dus aux déformations plastiques par cisaillement et par rotation peuvent être considérés comme des produits d'un *"flux généralisé"* ($d\vec{\alpha}_i^{pl}/dt$ ou $d\vec{\omega}^{pl}/dt$) par une *"force généralisée"*, qui est représentée ici

par le tenseur de contrainte de cisaillement $\vec{s}_i$ ou le torseur de moment $\vec{m}$.

Les équations dissipatives d'anélasticité

Pour les termes dissipatifs associés à l'anélasticité par cisaillement et par rotation, la source d'entropie peut s'écrire, en vertu de l'équation *(6.30)*

$$S_e^{an} = \frac{1}{T}\left(\vec{s}_k^{\,dis} \frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis} \frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} \right) \tag{6.55}$$

Les équations d'état *(6.35)* montrent que les champs potentiels totaux $\vec{s}_i$ et $\vec{m}$ sont les conjugués des champ de déformation élastique par cisaillement $\vec{\alpha}_i^{él}$ et de rotation élastique $\vec{\omega}^{él}$ alors que les champs potentiels conservatifs $\vec{s}_i^{\,cons}$ et $\vec{m}^{cons}$ sont, quant à eux, les conjugués des champs de déformation anélastique par cisaillement $\vec{\alpha}_i^{an}$ et de rotation anélastique $\vec{\omega}^{an}$. En écrivant la décomposition de l'énergie de distorsion anélastique en termes de source de travail et de source de chaleur, il a fallu décomposer les champs élastiques $\vec{s}_i$ et $\vec{m}$ en parties conservatives et parties dissipatives, de la manière suivante

$$\begin{cases} \vec{s}_i = \vec{s}_i^{\,cons} + \vec{s}_i^{\,dis} \\ \vec{m} = \vec{m}^{cons} + \vec{m}^{dis} \end{cases} \tag{6.56}$$

Dans ces relations, les champs $\vec{s}_i$, $\vec{s}_i^{\,cons}$, $\vec{m}$ et $\vec{m}^{cons}$ sont déjà fournis par les équations d'état. Il reste donc les composantes dissipatives $\vec{s}_i^{\,dis}$ et $\vec{m}^{dis}$ à discuter.
En fait, les vitesses de distorsion anélastique par cisaillement $d\vec{\alpha}_i^{an} / dt$ et de rotation anélastique $d\vec{\omega}^{an} / dt$ sont responsables de l'apparition de forces de frottement intrinsèques qui génèrent les champs de contraintes dissipatives $\vec{s}_i^{\,dis}$ et $\vec{m}^{dis}$. Par conséquent, il est raisonnable d'admettre que ces champs dissipatifs sont avant tout des fonctions des vitesses de distorsion anélastique, en écrivant

$$\begin{cases} \vec{s}_i^{\,dis} = \vec{s}_i^{\,dis}\left(\dfrac{d\vec{\alpha}_m^{an}}{dt}, v, T, \ldots \right) \\ \vec{m}^{dis} = \vec{m}^{dis}\left(\dfrac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}, v, T, \ldots \right) \end{cases} \tag{6.57}$$

Ceci conduit à poser, en tenant compte des relations existant entre les différents champs de potentiel mécanique, des *équations phénoménologiques dissipatives d'anélasticité*, sous la forme finale suivante

$$\begin{cases} \vec{s}_i = \vec{s}_i^{\,cons}\left(\vec{\alpha}_m^{an}, v, T, \ldots \right) + \vec{s}_i^{\,dis}\left(\dfrac{d\vec{\alpha}_m^{an}}{dt}, v, T, \ldots \right) \\ \vec{m} = \vec{m}^{cons}\left(\vec{\omega}^{an}, v, T, \ldots \right) + \vec{m}^{dis}\left(\dfrac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}, v, T, \ldots \right) \end{cases} \tag{6.58}$$

Les équations dissipatives précédentes, écrites sous cette forme, ne sont en fait rien d'autre que des équations mathématiques différentielles qui fournissent les réponses anélastiques $\vec{\alpha}_i^{an}$ et $\vec{\omega}^{an}$ du réseau solide aux sollicitations induites par les contraintes élastiques $\vec{s}_i$ et $\vec{m}$.

6.3 - Bilan énergétique

En effectuant les opérations suivantes de multiplication sur les trois équations géométrocinétiques principales *(5.65)* et sur l'équation de la dynamique newtonienne *(6.11)*

$$\vec{s}_k \frac{d\vec{\beta}_k}{dt} = \vec{s}_k \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_k \quad \text{et} \quad \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{m}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\phi} \quad \text{et} \quad -p\frac{d\tau}{dt} = -p\,\text{div}\,\vec{\phi} \tag{6.59}$$

$$n\vec{\phi}\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g}\vec{\phi} + \phi_k\,\text{div}\,\vec{s}_k - \frac{1}{2}\vec{\phi}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{m} - \vec{\phi}\overrightarrow{\text{grad}}\,p + nm\vec{\phi}\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} \tag{6.60}$$

et en sommant toutes ces équations, il apparaît une *équation de bilan énergétique* au sein du réseau

$$n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt} = \rho\vec{g}\vec{\phi} - \text{div}\left[-\phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) + p\vec{\phi}\right] \tag{6.61}$$

Chaque terme de cette équation s'interprète aisément en terme de variation de densité volumique d'énergie:

$n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right)$ est la variation de la densité volumique d'énergie cinétique,

$\vec{s}_k\ d\vec{\beta}_k / dt$ est la variation de la densité volumique d'énergie élastique de cisaillement,

$\vec{m}\ d\vec{\omega} / dt$ est la variation de la densité volumique d'énergie potentielle associée à la rotation globale du réseau, si elle existe,

$-\ p\ d\tau / dt$ est la variation de la densité volumique d'énergie élastique d'expansion volumique,

$\rho\vec{g}\vec{\phi}$ est la puissance volumique fournie par le champ des forces extérieures de gravitation,

$-\phi_k\vec{s}_k - \left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right)/2 + p\vec{\phi}$ est le flux de travail de distorsion $\vec{J}_w$, analogue au vecteur de Poynting.

Quant aux équations de bilan énergétique tirées des autres expressions possibles de l'équation thermocinétique, suivant la représentation topologique choisie, elles s'écrivent encore plus simplement

$$n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \vec{\sigma}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \rho\vec{g}\vec{\phi} - \text{div}\left[-\phi_k\vec{\sigma}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right)\right] \tag{6.62}$$

$$n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \vec{\Sigma}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} = \rho\vec{g}\vec{\phi} - \text{div}\left(-\phi_k\vec{\Sigma}_k\right) \tag{6.63}$$

6.4 - Equations d'évolution spatio-temporelle

Il est possible maintenant de combiner l'ensemble des résultats obtenus dans ce chapitre et dans les chapitres précédents pour écrire les équations complètes d'évolution spatio-temporelle d'un réseau solide auto-diffusif, présentant des comportements phénoménologiques d'élasticité, d'anélasticité et de plasticité. Comme le montre le tableau 6.1, ce système d'équations est assez complexe, surtout au niveau du nombre élevé d'équations phénoménologiques d'état et

d'équations phénoménologiques de dissipation nécessaires à une description complète de tous les phénomènes possibles dans un tel réseau.

Le calcul complet de l'évolution spatio-temporelle d'un réseau passe donc par la résolution du système d'*équations fondamentales* suivantes:

- *les équations topologiques*, traduisant la géométrocinétique galiléenne au sein du solide, qui permettent de calculer les champs de distorsion globaux ou locaux à partir du champ de vitesse absolue $\vec{\phi}$ ou du champ de vitesse relative $\vec{\varphi}$ au sein du solide, et dont on tire notamment la densité volumique n de mailles de réseau. De plus, les conditions de géométrocompatibilité, basées sur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{(\delta)} = 0$, sont évidemment valides pour les réseaux doués d'anélasticité et de plasticité, car elles assurent que le champ de déplacement local $\vec{u}^{(\delta)}$, associé aux déformations élastique, anélastique et plastique, reste continu. Ceci est évidemment une condition nécessaire pour assurer la solidité du réseau.
- *les équations dynamiques*, traduisant la dynamique newtonienne du réseau, qui conduisent au calcul de la quantité de mouvement $\vec{p}$, dont on tire les vitesses $\vec{\phi}$ et $\vec{\varphi}$, et au calcul de la densité de masse inerte ρ,
- *les équations de diffusion*, traduisant l'auto-diffusion dans le réseau, qui conduisent au calcul des densités C_L et C_I de lacunes et d'auto-interstitiels,
- *l'équation thermique*, qui fournit l'entropie s, dont on déduit la température T dans le solide,

A ce système d'équations fondamentales identiques pour n'importe quel type de réseau, il faut ajouter un système d'*équations phénoménologiques* propres à chaque type de réseau:

- *les équations d'état*, qui décrivent les comportements phénoménologiques associés aux propriétés élastiques, anélastiques, auto-diffusives et thermiques du réseau considéré,
- *les équations dissipatives*, qui traduisent les phénoménologies de dissipation par thermoconduction, par auto-diffusion, par création-annihilation de paires lacune-interstitiel, par anélasticité et par plasticité du réseau considéré.

Aux équations fondamentales et phénoménologiques nécessaires à la résolution de l'évolution spatio-temporelle du réseau considéré, on peut encore ajouter des *équations additionnelles*, telles que les équations de continuité de la masse, de flux de travail et de force de surface, de source d'entropie et de bilan énergétique. En fait, ces équations étant déduites à partir des équations fondamentales, elles ne sont pas nécessaires à la résolution du problème de l'évolution spatio-temporelle du réseau. Cependant, elles peuvent apporter une information très intéressante en ce qui concerne les flux de travail, les forces de surface et les échanges d'énergie au sein du solide.

Tableau 6.1 - Equations fondamentales d'évolution des solides auto-diffusifs, élastiques, anélastiques et plastiques

Equations topologiques

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i & (1) \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\phi} & (2) \\ \dfrac{d\tau}{dt} = \text{div}\,\vec{\phi} & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 & (4) \\ \text{div}\,\vec{\omega} = 0 & (5) \\ d/dt = \partial/\partial t + (\vec{\varphi}\vec{\nabla}) & (6) \\ \vec{\varphi} = \vec{\phi} - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t) \wedge \vec{r} & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{él} + \vec{\beta}_i^{an} + \vec{\beta}_i^{pl} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) & (8) \\ \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = \vec{\omega}^{(\delta)} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}^{pl} + \vec{\omega}_0(t) & (9) \\ \tau = \sum_k \vec{\beta}_k \vec{e}_k = \sum_k \vec{\beta}_k{}^{(\delta)} \vec{e}_k = \tau^{él} + \tau^{pl} \qquad (\tau^{an} \equiv 0 \ \textit{par hypothèse}) & (10) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\varepsilon}_i^{él} + \vec{\varepsilon}_i^{an} + \vec{\varepsilon}_i^{pl} & (11) \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau\vec{e}_i = \vec{\alpha}_i^{él} + \vec{\alpha}_i^{an} + \vec{\alpha}_i^{pl} & (12) \end{cases}$$

Equations dynamique

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g} + \sum_k \vec{e}_k\,\text{div}\,\vec{s}_k - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{m} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p + nm\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} n = 1/v = n_0\exp(-\tau^{él}) & (14) \\ \vec{p} = m\left(\vec{\phi} + C_I\vec{\phi}_I - C_L\vec{\phi}_L\right) = m\vec{\phi} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \dfrac{m}{n}\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right) \\ \qquad\qquad = \left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right]\Big/ n & (15) \\ \rho = mn\left(1 + C_I - C_L\right) & (16) \end{cases}$$

Equations de diffusion

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = \left(S_{I-L} + S_L{}^{pl}\right) - C_L\left(S_L{}^{pl} - S_I{}^{pl}\right) - \text{div}\,\vec{J}_L & (17) \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = \left(S_{I-L} + S_I{}^{pl}\right) - C_I\left(S_L{}^{pl} - S_I{}^{pl}\right) - \text{div}\,\vec{J}_I & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{J}_L = nC_L\Delta\vec{\varphi}_L = nC_L\left(\vec{\phi}_L - \vec{\phi}\right) = nC_L\left(\vec{\varphi}_L - \vec{\varphi}\right) & (19) \\ \vec{J}_I = nC_I\Delta\vec{\varphi}_I = nC_I\left(\vec{\phi}_I - \vec{\phi}\right) = nC_I\left(\vec{\varphi}_I - \vec{\varphi}\right) & (20) \end{cases}$$

Equations thermiques

$$nT\frac{ds}{dt} = -\left(\mu_L^{\,*} + \mu_I^{\,*}\right)S_{I-L} - \left(\mu_L^{\,*} + h^*\right)S_L^{\,pl} - \left(\mu_I^{\,*} - h^*\right)S_I^{\,pl} + T\vec{J}_L\vec{X}_L$$
$$+T\vec{J}_I\vec{X}_I + \vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} - \mathrm{div}\,\vec{J}_q \qquad (21)$$

$$\begin{cases} \mu_L^{\,*} = \mu_L - \dfrac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^{\,2} - 2\Delta\vec{\varphi}_L^{\,2}\right) & (22) \\ \mu_I^{\,*} = \mu_I + \dfrac{1}{2}m\vec{\phi}_I^{\,2} & (23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{X}_q = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\dfrac{1}{T} & (24) \\ \vec{X}_L = \dfrac{1}{T}\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mu_L^{\,*} + m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L\ - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right) & (25) \\ \vec{X}_I = \dfrac{1}{T}\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mu_I^{\,*} - m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right) & (26) \end{cases}$$

$$h^* = f + Ts + pv + \frac{1}{2}m\vec{\phi}^2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \qquad (27)$$

Equations phénoménologiques d'évolution des solides auto-diffusifs, élastiques, anélastiques et plastiques

Fonctions et équations d'état

$$f = f\left(\alpha_{ij}^{\,él}, \alpha_{ij}^{\,an}, \omega_k^{\,él}, \omega_k^{\,an}, \tau^{él}, C_L, C_I, T\right) \qquad (28)$$

$$\begin{cases} s_{ij} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{\,él}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{\,él}}\right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij}\sum_k \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{\,él}} = s_{ij}(\alpha_{lm}^{\,él}, \omega_n^{\,él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{\,an}, \omega_n^{\,an}, C_L, C_I, T) & (29) \\ m_k = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{\,él}} = m_k(\alpha_{lm}^{\,él}, \omega_n^{\,él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{\,an}, \omega_n^{\,an}, C_L, C_I, T) & (30) \\ p = -n\dfrac{\partial f}{\partial \tau^{él}} = p(\alpha_{lm}^{\,él}, \omega_n^{\,él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{\,an}, \omega_n^{\,an}, C_L, C_I, T) & (31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{ij}^{dis} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{\,an}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{\,an}}\right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij}\sum_k \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{\,an}} = s_{ij}^{dis}(\alpha_{lm}^{\,él}, \omega_n^{\,él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{\,an}, \omega_n^{\,an}, C_L, C_I, T) & (32) \\ m_k^{dis} = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{\,an}} = m_k^{dis}(\alpha_{lm}^{\,él}, \omega_n^{\,él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{\,an}, \omega_n^{\,an}, C_L, C_I, T) & (33) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\dfrac{\partial f}{\partial T} = s(\alpha_{lm}{}^{él}, \omega_n{}^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}{}^{an}, \omega_n{}^{an}, C_L, C_I, T) & (34) \\ \mu_L = \dfrac{\partial f}{\partial C_L} = \mu_L(\alpha_{lm}{}^{él}, \omega_n{}^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}{}^{an}, \omega_n{}^{an}, C_L, C_I, T) & (35) \\ \mu_I = \dfrac{\partial f}{\partial C_I} = \mu_I(\alpha_{lm}{}^{él}, \omega_n{}^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}{}^{an}, \omega_n{}^{an}, C_L, C_I, T) & (36) \end{cases}$$

Equations de dissipation: auto-diffusion et création-annihilation de paires

$$\begin{cases} \vec{J}_q = \vec{J}_q(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) & (37) \\ \vec{J}_L = \vec{J}_L(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) & (38) \\ \vec{J}_I = \vec{J}_I(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, ...) & (39) \end{cases}$$

$$S_{I-L} = S_{I-L}\left(\mu_L{}^* + \mu_I{}^*, n, T, C_L, C_I, ...\right) \quad (40)$$

Equations de dissipation: anélasticité

$$\begin{cases} \vec{s}_i = \vec{s}_i^{\,cons}\left(\vec{\alpha}_m^{an}, v, T, ...\right) + \vec{s}_i^{\,dis}\left(\dfrac{d\vec{\alpha}_m^{an}}{dt}, v, T, ...\right) & (41) \\ \vec{m} = \vec{m}^{cons}\left(\vec{\omega}^{an}, v, T, ...\right) + \vec{m}^{dis}\left(\dfrac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}, v, T, ...\right) & (42) \end{cases}$$

Equations de dissipation: plasticité

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau^{pl}}{dt} = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\left(S_L{}^{pl} - S_I{}^{pl}\right) & (43) \\ S_L{}^{pl} = S_L{}^{pl}\left[\left(\mu_L{}^* + g^*\right), v, T, C_L, C_I, ...\right] & (44) \\ S_I{}^{pl} = S_I{}^{pl}\left[\left(\mu_I{}^* - g^*\right), v, T, C_L, C_I, ...\right] & (45) \end{cases}$$

$$g^* = f + pv + m\vec{\phi}^2 / 2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \quad (46)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{pl}}{dt} = \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{pl}}{dt}\left(\vec{s}_m, v, T, ...\right) & (47) \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}\left(\vec{m}, v, T, ...\right) & (48) \end{cases}$$

Equations additionnelles d'évolution

Continuité de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] = -\operatorname{div}\left(n\vec{p}\right) \qquad \text{dans } \boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3 \qquad (49)$$

Flux de travail et force de surface

$$\begin{cases} \vec{J}_w = \mu_L{}^*\vec{J}_L + \mu_I{}^*\vec{J}_I - \phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) + p\vec{\phi} & (50) \\ \vec{F}_S = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{s}_k\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m}\wedge\vec{\boldsymbol{n}}\right) - \vec{\boldsymbol{n}}p & (51) \end{cases}$$

Source d'entropie

$$\begin{aligned} S_e = &-\frac{1}{T}\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \frac{1}{T}\left(\mu_L^* + g^*\right)S_L^{pl} - \frac{1}{T}\left(\mu_I^* - g^*\right)S_I^{pl} \\ &+\vec{J}_L\vec{X}_L + \vec{J}_I\vec{X}_I + \frac{1}{T}\left(\vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k^{pl}}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt}\right) \\ &+\vec{J}_q\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \qquad (52)$$

Bilan énergétique

$$\begin{aligned} n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt} \\ = \rho\vec{g}\vec{\phi} - \operatorname{div}\left[-\phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) + p\vec{\phi}\right] \end{aligned} \qquad (53)$$

PARTIE I

B

Application: exemples de phénoménologies des solides usuels

Fonctions et équations d'état d'un solide isotrope

Comportements élastiques et thermiques

Propagation d'ondes et relaxations thermoélastiques

Phénomènes de transport et relaxations inertielles

Phénoménologies de l'anélasticité et de la plasticité

Transitions structurales de 2ème et 1ère espèce

Chapitre 7

Exemples de phénoménologies des solides usuels

Dans ce chapitre, on présente quelques applications de la première partie par des exemples élémentaires de phénoménologies propres aux solides isotropes usuels. En premier lieu, des fonctions d'état simplifiées sont introduites pour décrire la phénoménologie d'un *solide isotrope «linéaire»*. On en déduit les équations d'état pour ce type de solide. Ensuite, on discute quelques comportements phénoménologiques associés à l'élasticité, à l'anélasticité, aux transitions structurales, à la plasticité et à l'auto-diffusion dans les solides usuels.

7.1 - Fonctions et équations d'état des solides isotropes

Pour qu'un solide présente des propriétés élastiques isotropes (indépendantes de la direction considérée dans l'espace), il faut que son énergie libre f par site de réseau soit un scalaire construit à partir des invariants du tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$. Etant donné que les opérateurs divergence et rotationnel appliqués à un champ de vecteurs $\vec{u}$ fournissent des grandeurs invariantes de ce champ, ne dépendant pas du système de coordonnées choisi, les deux premiers *invariants scalaires* du tenseur gradient β_{ij} sont sa trace τ et le carré de la norme de sa partie antisymétrique $\vec{\omega}$

$$\tau = -\operatorname{div}\vec{u} = \sum_i \vec{e}_i\vec{\beta}_i = \sum_i \vec{e}_i\vec{\varepsilon}_i = \textit{invariant} \qquad (7.1)$$

$$\vec{\omega}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{\beta}_i\right)^2 = \textit{invariant} \qquad (7.2)$$

A partir du tenseur gradient β_{ij}, d'autres invariants scalaires peuvent être déduits, comme la somme des mineurs des tenseurs de distorsion d'ordre deux

$$\sum_i \vec{e}_i\left(\vec{\beta}_j \wedge \vec{\beta}_k\right) = \textit{invariant} \;\; ; \;\; \sum_i \vec{e}_i\left(\vec{\varepsilon}_j \wedge \vec{\varepsilon}_k\right) = \textit{invariant} \;\; ; \;\; \sum_i \vec{e}_i\left(\vec{\alpha}_j \wedge \vec{\alpha}_k\right) = \textit{invariant} \qquad (7.3)$$

ou la somme des carrés des composantes des tenseurs de distorsion d'ordre deux

$$\sum_i \vec{\beta}_i^2 = \textit{invariant} \;\; ; \;\; \sum_i \vec{\varepsilon}_i^2 = \textit{invariant} \;\; ; \;\; \sum_i \vec{\alpha}_i^2 = \textit{invariant} \qquad (7.4)$$

La fonction d'état de l'élasticité d'un solide isotrope

L'expression de l'énergie libre par site de réseau d'un solide isotrope doit être une fonction des invariants suivants

$$f^{él} = f^{él}\left(\tau, \sum_i \vec{\varepsilon}_i^2, T\right) \quad \text{ou} \quad f^{él} = f^{él}\left(\tau, \sum_i \vec{\alpha}_i^2, T\right) \qquad (7.5)$$

elle doit pouvoir s'exprimer assez correctement en séparant expansion volumique et cisaillement sous la forme d'un développement du type

$$f^{él} = -k_0(T)\tau + k_1(T)\tau^2 + k_2(T)\sum_i \vec{\alpha}_i^2 + k_3(T)\tau\sum_i \vec{\alpha}_i^2 + k_4(T)\tau^3 + ... \qquad (7.6)$$

Si ce développement est limité aux termes contenant $k_0(T), k_1(T), k_2(T)$, on parlera alors d'un *solide isotrope élastique «linéaire»,* qu'on appellera dorénavant *solide parfait.* On en déduit alors l'énergie libre élastique $f^{él}$ moyenne par site de réseau

$$f^{él} = -k_0(T)\tau + k_1(T)\tau^2 + k_2(T)\sum_i \vec{\alpha}_i^2 \qquad (7.7)$$

La fonction d'état associée à l'anélasticité linéaire d'un solide

L'anélasticité d'un réseau solide de particules peut avoir plusieurs causes physiques microscopiques différentes, parmi lesquelles il faut citer essentiellement des mouvements à courte distance de défauts de structure du réseau (défauts substitutionnels ou interstitiels, dislocations ou désinclinaisons, joints de grains dans les polycristaux, joints d'interphase dans les polyphasés, etc.) et même certaines transitions de phase. A l'échelle macroscopique de la description continue du réseau, la manifestation statistique des mouvements de l'ensemble des défauts de structure impliqués se traduit par l'existence d'une équation phénoménologique dissipative d'anélasticité.

La façon la plus simple d'introduire la manifestation phénoménologique d'anélasticité dans un réseau solide est de se limiter à un réseau isotrope et de supposer que *(i)* l'anélasticité de ce réseau peut être entièrement décrite par le tenseur de cisaillement, et donc qu'il n'intervient pas de termes en les rotations anélastiques dans la fonction d'état énergie libre, que *(ii)* les termes d'élasticité ne sont pas couplés à l'anélasticité et à l'auto-diffusion et que *(iii)* le terme d'énergie libre par site de réseau lié à l'anélasticité est une fonction quadratique simple des composantes du tenseur des cisaillements anélastiques, multipliée par un coefficient k_{an} qui pourrait dépendre de la température T ainsi que de l'expansion volumique élastique $\tau^{él}$ du réseau. Sous ces conditions, l'énergie libre associée à l'anélasticité du réseau s'écrit

$$f^{an} = \frac{1}{2}k_{an}(T, \tau^{él})\sum_i (\vec{\alpha}_i^{an})^2 \qquad (7.8)$$

En fait, le terme anélastique f^{an} rajouté dans la fonction d'état f n'est rien d'autre que l'énergie potentielle moyenne stockée par site du réseau par les forces de rappel agissant sur les défauts de structure responsables de l'anélasticité. Et la fonction quadratique correspond à supposer que ces forces ont une *réponse linéaire* au tenseur de cisaillement anélastique.

La fonction d'état associée à un solide faiblement auto-diffusif

Pour un réseau solide de densité volumique n de sites, et contenant n_L et n_I lacunes et interstitiels respectivement par unité de volume, l'énergie libre est calculable si la concentration en défauts ponctuels est assez faible pour qu'il soit possible de négliger les interactions entre ces défauts, et de négliger aussi les effets de ces défauts sur les propriétés élastiques et thermiques du réseau. On parlera en ce cas d'un *solide faiblement auto-diffusif*. L'énergie libre F par unité de volume du solide doit contenir une composante F^{dp} due à la présence des *défauts*

ponctuels (*dp*). En négligeant les interactions entre défauts ponctuels, la fonction F^{dp} peut être supposée proportionnelle aux nombres n_L et n_I de défauts ponctuels par unité de volume

$$F^{dp} = n_L \varepsilon_L(\tau^{él}) - T n_L s_L(\tau^{él}) + n_I \varepsilon_I(\tau^{él}) - T n_I s_I(\tau^{él}) - T\Delta S^{conf} \qquad (7.9)$$

dans laquelle $\varepsilon_L(\tau^{él})$ et $\varepsilon_I(\tau^{él})$ sont les *énergies potentielles* d'une lacune et d'un interstitiel respectivement, qui doivent surtout dépendre de l'expansion volumique élastique $\tau^{él}$ du réseau, $s_L(\tau^{él})$ et $s_I(\tau^{él})$ sont les *entropies* associées à une lacune ou à un interstitiel, qui doivent aussi dépendre de $\tau^{él}$, et ΔS^{conf} est l'*entropie de configuration*, liée à la présence des n_L et n_I défauts ponctuels dans l'unité de volume de réseau contenant n sites.

L'entropie de configuration ΔS^{conf} vaut $k \ln \Omega^{conf}$, où k est la *constante de Boltzmann* et Ω^{conf} est le *nombre de configurations microscopiques différentes (complexions)* que peut prendre l'unité de volume de réseau contenant n_L et n_I lacunes et interstitiels. Pour un réseau avec une densité n de sites substitutionnels, la densité de sites interstitiels est donnée par $z_I n$, où z_I est le nombre de sites interstitiels associés à chaque site substitutionnel, et qui dépend évidemment de la structure du réseau considéré. Si le nombre de sites lacunaires est n_L et que le nombre de sites interstitiels occupés vaut n_I, le nombre de sites substitutionnels occupés est donné par $n - n_L$ et le nombre de sites interstitiels inoccupés est de $z_I n - n_I$, de sorte que le nombre de complexions s'écrit

$$\Omega^{conf} = \frac{n!(z_I n)!}{(n-n_L)!\,n_L!\,(z_I n - n_I)!\,n_I!} \qquad (7.10)$$

En utilisant la *formule de Stirling*, l'entropie de configuration s'écrit

$$\Delta S^{conf} = k \ln \Omega^{conf} \cong -k\left(n_L \ln \frac{n_L}{n} + n_I \ln \frac{n_I}{z_I n} \right) \qquad (7.11)$$

A partir de ces relations, l'énergie libre moyenne par site de réseau due à la présence des défauts ponctuels se déduit en divisant F^{dp} par n et en introduisant les concentrations atomiques de défauts ponctuels

$$f^{dp} = C_L\left[\varepsilon_L(\tau^{él}) - T s_L(\tau^{él})\right] + C_I\left[\varepsilon_I(\tau^{él}) - T s_I(\tau^{él})\right] + kT\left(C_L \ln C_L + C_I \ln \frac{C_I}{z_I} \right) \qquad (7.12)$$

Les équations d'état du solide parfait

En se basant alors sur les expressions des diverses composantes de l'énergie libre f, en introduisant encore un terme thermique $f_0(T)$ qui contient tous *les effets dus à la température* du réseau, et en émettant l'hypothèse simplificatrice suivante

Hypothèse: $k_1, k_2, k_{an}, \varepsilon_L, s_L, \varepsilon_I$ *et* s_I *sont des constantes* (7.13)

on obtient l'expression de l'énergie libre $f \cong f_0(T) + f^{él} + f^{an} + f^{dp}$ la plus simple qui soit

$$\begin{aligned} f \cong\ & f_0(T) - k_0(T)\tau^{él} + k_1\left(\tau^{él}\right)^2 + k_2 \sum \left(\vec{\alpha}_i^{él}\right)^2 + \frac{1}{2} k_{an} \sum_i \left(\vec{\alpha}_i^{an}\right)^2 \\ & + C_L\left[\varepsilon_L - T s_L\right] + C_I\left[\varepsilon_I - T s_I\right] + kT\left(C_L \ln C_L + C_I \ln \frac{C_I}{z_I} \right) \end{aligned} \qquad (7.14)$$

Les équations d'état de ce réseau s'écrivent en ce cas, en se rappelant que $n = n_0 \exp\left(-\tau^{él}\right)$

$$\begin{cases} \vec{s}_i = n\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2nk_2\,\vec{\alpha}_i^{él} \\ p = -n\dfrac{\partial f}{\partial \tau^{él}} = n\left(k_0(T) - 2k_1\tau^{él}\right) \text{ dans le solide parfait} \\ \vec{s}_i^{cons} = n\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{an}}\vec{e}_j = nk_{an}\,\vec{\alpha}_i^{an} \end{cases} \tag{7.15}$$

$$\left\{ s = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial f_0(T)}{\partial T} + \frac{\partial k_0(T)}{\partial T}\tau^{él} + C_L s_L + C_I s_I - kC_L \ln C_L - kC_I \ln\frac{C_I}{z_I} \right. \tag{7.16}$$

$$\begin{cases} \mu_L = \dfrac{\partial f}{\partial C_L} = \varepsilon_L - Ts_L + kT\left(\ln C_L + 1\right) \\ \mu_I = \dfrac{\partial f}{\partial C_I} = \varepsilon_I - Ts_I + kT\left(\ln\dfrac{C_I}{z_I} + 1\right) \end{cases} \tag{7.17}$$

Ces équations d'état sont très simples. Entre autre, les contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$ et $\vec{s}_i^{cons}$ dépendent linéairement des tenseurs de cisaillement $\vec{\alpha}_i^{él}$ et $\vec{\alpha}_i^{an}$. Il est une autre remarque à faire. La pression p au sein du réseau dépend d'un terme $k_0(T)$ associé à la température et d'un terme $-2k_1\tau^{él}$ linéaire en l'expansion volumique du réseau.

7.2 - Modules élastiques des solides isotropes

Les coefficients de Lamé μ et λ aux faibles distorsions du solide

En général, les équations d'état de l'élasticité d'un solide isotrope parfait sont données dans la représentation $\left\{\vec{\varepsilon}_i, \vec{\sigma}_i\right\}$. Il est très simple de passer à cette représentation en utilisant la relation $\vec{\sigma}_i = \vec{s}_i - p\vec{e}_i$, ainsi que la pression $p = nk_0(T) - 2nk_1\tau^{él}$

$$\vec{\sigma}_i = n\left(2k_2\,\vec{\alpha}_i - k_0(T)\vec{e}_i + 2k_1\tau\vec{e}_i\right) \tag{7.18}$$

Avec les relations $\vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \tau\vec{e}_i / 3$ et $\tau = \sum \varepsilon_{kk}$, il vient encore

$$\vec{\sigma}_i = n\left[2k_2\,\vec{\varepsilon}_i + 2\left(k_1 - \frac{k_2}{3}\right)\sum_k \varepsilon_{kk}\vec{e}_i - k_0(T)\vec{e}_i\right] \tag{7.19}$$

Il est possible d'introduire de nouveaux coefficients élastiques par les relations

$$\begin{cases} \mu = nk_2(T) \\ \lambda = 2n\left(k_1(T) - \dfrac{k_2(T)}{3}\right) \end{cases} \tag{7.20}$$

Ces coefficients μ et λ sont appelés les *coefficients de Lamé* du solide isotrope parfait, et ils permettent d'écrire l'équation d'état de l'élasticité sous la forme

$$\vec{\sigma}_i = 2\mu\,\vec{\varepsilon}_i + \vec{e}_i\left(\lambda\sum_k \varepsilon_{kk} - nk_0(T)\right) \tag{7.21}$$

Cette écriture présente l'intérêt indéniable de pouvoir inverser l'équation d'état pour exprimer le

tenseur $\vec{\varepsilon}_i$ en fonction du tenseur $\vec{\sigma}_i$

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{1}{2\mu}\vec{\sigma}_i + \vec{e}_i \frac{1}{2\mu+3\lambda}\left(nk_0(T) - \frac{\lambda}{2\mu}\sum_k \sigma_{kk} \right) \qquad (7.22)$$

Le module de Young E et le module de Poisson ν en traction simple

Imaginons qu'un solide parallélépipédique soit soumis à une *traction uniaxiale* (figure 7.1): une contrainte normale σ_{33} de traction, différente de zéro, lui est imposée sur ses faces perpendiculaires à l'axe Ox_3, alors que ses faces perpendiculaires aux axes Ox_1 et Ox_2 sont libres de contrainte ($\sigma_{11}=0$ et $\sigma_{22}=0$). L'équation d'état *(7.22)* permet alors de calculer les composantes ε_{ii} du tenseur de déformation

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\frac{1}{2\mu+3\lambda}\left(nk_0(T) - \frac{\lambda}{2\mu}\sigma_{33} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33}=\frac{1}{2\mu+3\lambda}\left(nk_0(T) + \frac{\mu+\lambda}{\mu}\sigma_{33} \right) \qquad (7.23)$$

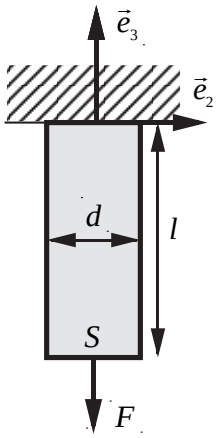


Figure 7.1 *- traction uniaxiale*

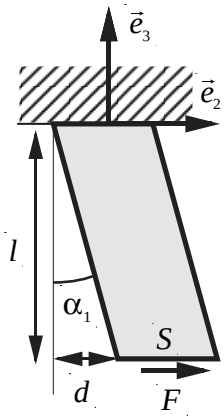


Figure 7.2 *- cisaillement pur*

Par définition, le *module de Young* E est défini par *traction uniaxiale* (figure 7.1) comme le rapport entre l'accroissement de contrainte $\Delta\sigma_{33}$ selon l'axe de traction et l'accroissement de déformation $\Delta\varepsilon_{33}$ selon ce même axe, à la température donnée T

$$E = \frac{\Delta\sigma_{33}}{\Delta\varepsilon_{33}} = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} = n\frac{18k_1(T)k_2(T)}{6k_1(T)+k_2(T)} \qquad (7.24)$$

Quant au *module de Poisson* ν, il est défini comme le rapport entre le rétrécissement $-\Delta\varepsilon_{11}$ ou $-\Delta\varepsilon_{22}$ selon les axes transverses Ox_1 et Ox_2 et l'allongement $\Delta\varepsilon_{33}$ selon l'axe Ox_3 de traction, à la température donnée T

$$\nu = -\frac{\Delta\varepsilon_{11}}{\Delta\varepsilon_{33}} = -\frac{\Delta\varepsilon_{22}}{\Delta\varepsilon_{33}} = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} = \frac{3k_1(T)-k_2(T)}{6k_1(T)+k_2(T)} \qquad (7.25)$$

Le module de cisaillement G en cisaillement pur

Dans le cas d'une déformation du solide en *cisaillement pur*, un solide parallélépipédique est déformé par cisaillement dans le plan i et j en lui appliquant les contraintes tangentielles

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ sur les plans perpendiculaires aux axes Ox_i et Ox_j (figure 7.2). L'équation d'état *(7.30)* permet de calculer les composantes $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ du tenseur de déformation comme

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = G\varepsilon_{ij} \qquad (7.26)$$

Le module G apparaissant ici est appelé *module de cisaillement* du solide isotrope et vaut

$$G = 2\mu = 2nk_2 \qquad (7.27)$$

Les relations entre les modules élastiques

Ce sont en général les modules E, ν et G qui sont répertoriés dans les tables de modules élastiques des matériaux isotropes. A partir de la connaissance de E, ν et G pour un matériau donné, on retrouve les coefficients de Lamé μ et λ de ce matériau

$$\mu = \frac{E}{2(1-\nu)} = \frac{G}{2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (7.28)$$

Quant aux modules élastiques k_1 et k_2 d'un matériau rigide, ils sont déductibles, soit des coefficients μ et λ, soit des modules E, ν et G

$$K_1 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} = \frac{E}{6(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (7.29)$$

Le module de Poisson ν d'un matériau isotrope est très intéressant, car il permet de faire le lien entre le module k_1 associé à la compressibilité du milieu et le module k_2 lié à la cisaillabilité de ce milieu. En effet

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \qquad (7.30)$$

Par exemple, dans les métaux, le module de Poisson est en général assez voisin de 1/3, ce qui implique que le rapport k_1 / k_2 y vaut approximativement 4/3.

7.3 - Comportements thermiques des solides isotropes

En général, l'expérience montre que, dans les solides *à haute température*, le module $k_0(T)$ ainsi que le terme thermique $f_0(T)$ de la fonction d'état sont des fonctions simples de la température. En effet, dans les solides usuels, on observe que la *chaleur spécifique* c_V *mesurée par site de réseau*, à haute température, est approximativement une constante valant $c_V = 3k$ *(loi de Dulong et Petit),* où k est la *constante de Boltzman*

$$c_V = T\frac{\partial s}{\partial T} = T\left[-\frac{\partial^2 f_0(T)}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 k_0(T)}{\partial T^2}\tau^{él}\right] \cong cste \qquad (7.31)$$

Cette relation peut être facilement satisfaite si on émet l'hypothèse que la dépendance en température du module élastique $k_0(T)$ est linéaire, en écrivant

$$T\frac{\partial^2 k_0(T)}{\partial T^2}\tau^{él} \cong 0 \;\Rightarrow\; k_0(T) \cong \gamma_0 c_V T \qquad (7.32)$$

Cette hypothèse implique alors pour $f_0(T)$ que

$$-T\frac{\partial^2 f_0(T)}{\partial T^2} \cong c_V \;\Rightarrow\; f_0(T) \cong u_0 - Ts_0 + c_V T(1-\ln T) \qquad (7.33)$$

Le module $k_0(T)$ dépend *grosso modo* linéairement de T via une constante $\gamma_0 c_V$, où γ_0 est appelée *constante de Grünheisen*, dont la valeur se situe entre 1,2 et 2,6 pour la plupart des solides usuels isotropes. On observe aussi dans les solides usuels que les modules k_1 et k_2 ne dépendent que très peu de la température, et peuvent donc être considérés comme des constantes. Ces comportements thermiques peuvent être obtenus à partir de la physique statistique, qui permet notamment de montrer que l'existence de la constante de Grüheisen γ_0 est liée aux *propriétés anharmoniques du réseau*.

A pression constante ou à expansion volumique constante, dans le cas de faibles distorsions du réseau, l'introduction de *(7.32)* dans *(7.15)* montre que le module $k_0(T)$ est directement lié au *phénomène d'expansion volumique thermique* du réseau

$$\tau^{él}(T)\Big|_{p_{cste}} \cong \frac{1}{2nk_1}\left(\gamma_0 nc_V T - p_{cste}\right) \quad ou \quad p(T)\Big|_{\tau^{él}_{cste}} \cong n\left(\gamma_0 c_V T - 2k_1\tau^{él}_{cste}\right) \tag{7.34}$$

Imaginons aussi qu'un solide parallélépipédique ne soit soumis à aucune traction uniaxiale, de sorte que $\sigma_{ii} = 0$, et qu'on change sa température. A cause du module $k_0(T) \cong \gamma_0 c_V T$, les déformations uniaxiales ε_{ii} *(7.23)* deviennent alors dépendantes de la température, phénomène qu'on nomme *dilatation thermique linéaire du solide*

$$\varepsilon_{11}(T)\Big|_{\sigma_{33}=0} = \varepsilon_{22}(T)\Big|_{\sigma_{33}=0} = \varepsilon_{33}(T)\Big|_{\sigma_{33}=0} = \frac{\gamma_0 nc_V T}{2\mu + 3\lambda} \tag{7.35}$$

7.4 - Phénomènes de transport dans les solides isotropes

Considérons les équations phénoménologiques dissipatives de thermoconduction et d'auto-diffusion *(6.41).* Dans le cas où le solide est isotrope et n'est pas trop éloigné de l'équilibre thermodynamique, et si de plus les concentrations de défauts ponctuels restent faibles, on peut linéariser la dépendance vectorielle de $\vec{J}_q$, $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ en les forces thermodynamiques $\vec{X}_q$, $\vec{X}_L$ et $\vec{X}_I$ en introduisant des *coefficients cinétiques* de type $L_{qL}(\tau, T, C_L, C_I)$, ce qui permet d'écrire les équations de transport de la chaleur et des espèces chimiques sous la forme

$$\begin{cases} \vec{J}_q = L_{qq}\vec{X}_q + L_{qL}\vec{X}_L + L_{qI}\vec{X}_I \\ \vec{J}_L = L_{Lq}\vec{X}_q + L_{LL}\vec{X}_L + L_{LI}\vec{X}_I \\ \vec{J}_I = L_{Iq}\vec{X}_q + L_{IL}\vec{X}_L + L_{II}\vec{X}_I \end{cases} \tag{7.36}$$

La source d'entropie $S_e^{transport}$ associée aux transports s'écrit alors

$$S_e^{transport} = \sum_x \vec{X}_x \vec{J}_x \tag{7.37}$$

qui peut se développer sous la forme

$$\begin{aligned} S_e^{transport} = {} & L_{qq}\vec{X}_q^2 + L_{LL}\vec{X}_L^2 + L_{II}\vec{X}_I^2 \\ & + \left(L_{qL} + L_{Lq}\right)\vec{X}_q\vec{X}_L + \left(L_{qI} + L_{Iq}\right)\vec{X}_q\vec{X}_I + \left(L_{LI} + L_{IL}\right)\vec{X}_L\vec{X}_I \end{aligned} \tag{7.38}$$

et qui peut encore se transformer en exprimant les produits scalaires en les produits des composantes des vecteurs

$$S_e^{transport} = \sum_{k=1}^{3}\left[L_{qq}X_{qk}^2 + L_{LL}X_{Lk}^2 + L_{II}X_{Ik}^2 + \left(L_{qL} + L_{Lq}\right)X_{qk}X_{Lk} + \left(L_{qI} + L_{Iq}\right)X_{qk}X_{Ik} + \left(L_{LI} + L_{IL}\right)X_{Lk}X_{Ik}\right] \tag{7.39}$$

La source d'entropie est donc constituée de la somme de trois fonctions quadratiques en les X_{qi}, X_{Li} et X_{Ii}. Pour assurer, quelles que soient les valeurs des X_{qi}, X_{Li} et X_{Ii}, la positivité de la source d'entropie exigée par le deuxième principe, il faut que ces trois fonctions soient individuellement des formes quadratiques définies positives dans l'espace à 3 dimensions des X_{qi}, X_{Li} et X_{Ii}, de sorte que ces trois fonctions quadratiques puissent être transformées en somme de carrés à coefficients positifs par une transformation orthogonale des variables dans l'espace à 3 dimensions. Mathématiquement, cela n'est possible que si la matrice suivante des coefficients cinétiques, composées de nombres réels

$$\begin{pmatrix} L_{qq} & L_{qL} & L_{qI} \\ L_{Lq} & L_{LL} & L_{LI} \\ L_{Iq} & L_{IL} & L_{II} \end{pmatrix} \qquad (7.40)$$

est une matrice symétrique, diagonalisable avec des valeurs propres positives. Il faut entre autre que les conditions suivantes, qui portent le nom de *relations d'Onsager*, soient satisfaites

$$L_{qL} = L_{Lq} \quad ; \quad L_{qI} = L_{Iq} \quad ; \quad L_{LI} = L_{IL} \qquad (7.41)$$

Les coefficients de conductibilité thermique et de diffusion

Dans le cas d'un solide isotrope ne présentant pas de couplages entre les flux de transport de particules et de chaleur, ou si ces couplages sont négligeables, les équations de transport peuvent être réécrites en introduisant un *coefficient de conductibilité thermique* χ et deux *coefficients de diffusion* D_L et D_I pour les lacunes et les interstitiels respectivement

$$\begin{cases} \vec{J}_q = L_{qq}\vec{X}_q = L_{qq}\ \overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{1}{T} = -\dfrac{L_{qq}}{T^2}\ \overrightarrow{\text{grad}}T = -\chi\ \overrightarrow{\text{grad}}T \\ \vec{J}_L = L_{LL}\vec{X}_L = nC_L\dfrac{D_L}{k}\vec{X}_L \\ \vec{J}_I = L_{II}\vec{X}_I = nC_I\dfrac{D_I}{k}\vec{X}_I \end{cases} \qquad (7.42)$$

Si C_L et C_I sont assez faibles, les coefficients précédents n'en dépendent sûrement pas, de sorte qu'on doit assurément présenter une dépendance en l'expansion volumique et la température (de type Boltzman pour les coefficients de diffusion)

$$\chi \cong \chi(\tau,T) \quad ; \quad D_L \cong D_{L0}\exp\left[-E_L^{diff}(\tau)/kT\right] \quad ; \quad D_I \cong D_{I0}\exp\left[-E_I^{diff}(\tau)/kT\right] \qquad (7.43)$$

7.5 - Propagation d'ondes et relaxation thermoélastique

Les équations thermoélastiques du solide parfait

Le calcul exacte de l'évolution spatio-temporelle d'un solide parfait est un problème assez complexe, car à toute perturbation locale des déformations du réseau est associée une perturbation locale de la température du réseau. Ce couplage entre déformations et température provient de l'expression de l'entropie du solide. En négligeant l'effet du champ de gravitation $\rho\vec{g}$, en supposant qu'il n'y a ni défauts ponctuels, ni d'anélasticté, ni de plasticité au sein du réseau, et en

utilisant les relations *(3.5)* et *(3.10)* qui donnent, pour un solide compatible

$$\begin{cases} \sum_k \vec{e}_k \operatorname{div}\vec{\alpha}_k = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\omega} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau - \cancel{\sum_k \left(\vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_k\right)} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\omega} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau \\ \sum_k \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau\ \vec{\alpha}_k\right)\vec{e}_k = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau \wedge \cancel{\sum_k \left(\vec{e}_k \wedge \vec{\alpha}_k\right)} + \sum_k \left(\vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k = \sum_k \left(\vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k \end{cases} \qquad (7.44)$$

l'équation de Newton *(6.11)* peut s'écrire en utilisant les équations d'état *(7.15)* pour $\vec{\alpha}_i$ et τ et en utilisant le fait que $k_0(T) \cong \gamma_0 c_V T$ sous la forme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2 \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\omega} - 2k_2 \sum_k \left(\vec{e}_k \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k + \left[\gamma_0 c_V T + \frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau)\right]\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau - \gamma_0 c_V \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T \qquad (7.45)$$

En utilisant la relation *(7.15)* de l'entropie et en y introduisant les expressions $k_0(T) \cong \gamma_0 c_V T$ et $f_0(T) \cong u_0 - Ts_0 + c_V T(1 - \ln T)$, on obtient l'expression de l'entropie à haute température au sein du réseau parfait

$$s = s_0 + c_V \ln T + \gamma_0 c_V \tau^{él} \qquad (7.46)$$

En introduisant cette expression de l'entropie ainsi que le flux de chaleur $\vec{J}_q = -\chi\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T$ dans l'équation de la chaleur *(6.22),* on obtient l'équation suivante d'*évolution de la température*

$$\frac{dT}{dt} = -\gamma_0 T \frac{d\tau}{dt} + \frac{\chi}{nc_V} \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T = -\gamma_0 T \frac{d\tau}{dt} + \frac{\chi}{nc_V} \Delta T \qquad (7.47)$$

Les équations *(7.45)* et *(7.47)* sont appelées *équations thermoélastiques* du solide.

La propagation d'ondes longitudinales thermoélastiques

Dans un réseau isotrope parfait sans défauts ponctuels et sans anélasticité, initialement homogène en l'expansion volumique ($\tau = \tau_0$), isotherme ($T = T_0$), non cisaillé et immobile, on introduit une *perturbation longitudinale* dans un référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ sous la forme d'un champ de vitesse $\vec{\phi} = \vec{\phi}^{(p)} = \phi_j^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j$ parallèle à l'axe $\boldsymbol{O}x_j$ et variant le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$. Via les équations géométrocinétiques pour τ et $\vec{\alpha}_i$, cette perturbation du champ de vitesse implique des perturbations $\tau^{(p)}$, $\vec{\omega}^{(p)}$ et $\vec{\alpha}_i^{(p)}$ des distorsions le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau^{(p)}}{dt} = \operatorname{div}\vec{\phi}^{(p)} & \Rightarrow \quad \tau = \tau_0 + \tau^{(p)}(x_j,t) \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\phi}^{(p)} = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\omega}^{(p)} = 0 \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{(p)}}{dt} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_i \operatorname{div}\vec{\phi}^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{d\tau^{(p)}}{dt}\vec{e}_i & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_i^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_i\tau^{(p)}(x_j,t) \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_j^{(p)}}{dt} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi_j^{(p)} - \dfrac{1}{3}\vec{e}_j \operatorname{div}\vec{\phi}^{(p)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{d\tau^{(p)}}{dt}\vec{e}_j & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_j^{(p)} = +\dfrac{2}{3}\vec{e}_j\tau^{(p)}(x_j,t) \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_k^{(p)}}{dt} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_k \operatorname{div}\vec{\phi}^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{d\tau^{(p)}}{dt}\vec{e}_k & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_k^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_k\tau^{(p)}(x_j,t) \end{cases} \qquad (7.48)$$

En considérant l'équation de la chaleur *(7.56)*, il est clair qu'il existe aussi une perturbation du champ de température le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$

$$T = T_0 + T^{(p)}(x_j,t) \qquad (7.49)$$

En introduisant ces perturbations dans les équations *(7.45)* et *(7.47)*, et en tenant compte de la première relation *(7.48)*, on obtient le set d'équations suivantes, linéarisées pour de faibles perturbations longitudinales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong \dfrac{1}{m}\left[\gamma_0 c_V T_0 + \dfrac{4}{3}k_2 + 2k_1\left(1-\tau_0\right)\right]\Delta\tau^{(p)} - \dfrac{\gamma_0 c_V}{m}\Delta T^{(p)} \\ \dfrac{\partial T^{(p)}}{\partial t} \cong -\gamma_0 T_0 \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial t} + \dfrac{\chi}{n c_V}\Delta T^{(p)} \qquad \left(n = n_0 e^{-\tau_0}\right) \end{cases} \tag{7.50}$$

Ce set d'équations admet pour solution des ***ondes longitudinales isothermes amorties à haute fréquence***, et des *ondes adiabatiques non amorties à basse fréquence*, de célérités de phase c_{iso} et c_{adia} valant respectivement

$$\begin{cases} c_{iso} = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left[\gamma_0 c_V T_0 + \dfrac{4}{3}k_2 + 2k_1\left(1-\tau_0\right)\right]} \\ c_{adia} = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left[\gamma_0 c_V T_0 + \dfrac{4}{3}k_2 + 2k_1\left(1-\tau_0\right)\right] + \dfrac{\gamma_0^2 T_0 c_V}{m}} \end{cases} \tag{7.51}$$

La présence du terme $2k_1\left(1-\tau_0\right)$ implique que la célérité de propagation dépend de l'état d'expansion volumique τ_0 du réseau.

Le décrément logarithmique et la relaxation de Debye dus à la thermoélasticité

L'onde longitudinale décrite par les équations *(7.50)* présente un *décrément logarithmique spatial* Δ_{log}, défini comme le logarithme du rapport de deux amplitudes de l'onde mesurées à un intervalle de distance Δx_j égal à une longueur d'onde $\lambda = c_\varphi / f$, qui peut se calculer

$$\Delta_{log} = \delta = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\tau^{(p)}(x_j,t)}{\tau^{(p)}(x_j+\lambda,t)} = \Delta_{rel}\,\frac{\omega\tau_{rel}}{1+\left(\omega\tau_{rel}\right)^2} \tag{7.52}$$

avec $\Delta_{rel} = \dfrac{\gamma_0^2 T_0 c_V}{m c_{iso} c_{adia}}$ et $\tau_{rel} = \dfrac{\chi}{n c_V c_{iso} c_{adia}}$ *(7.53)*

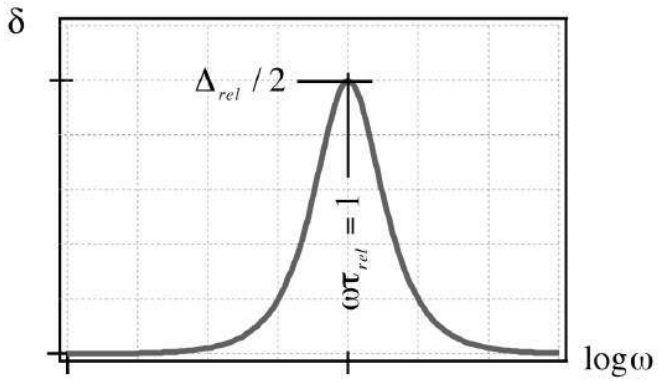


Figure 7.3 *- facteur de perte et relaxation de Debye due à la thermoélasticité*

La dépendance en fréquence du décrément logarithmique spatial Δ_{log}, aussi appelé *facteur de*

perte δ du réseau, est typique d'un *phénomène de relaxation*. Il apparaît un temps caractéristique τ_{rel}, appelé *temps de relaxation thermoélastique*. Le décrément logarithmique spatial Δ_{log} présente donc un *pic de relaxation de Debye* (figure 7.3) qui a pour origine commune l'effet d'expansion thermique *et* le processus de thermoconduction. En effet, l'*amplitude de la relaxation* $\Delta_{rel} = \gamma_0^2 T_0 c_V / (m c_{iso} c_{adia})$ est proportionnelle à γ_0^2 et dépend par conséquent directement de l'expansion thermique du solide, alors que le temps de relaxation $\tau_{rel} = \chi / (n c_V c_{iso} c_{adia})$ est proportionnel à χ et dépend donc essentiellement du processus de thermoconduction.

La propagation d'ondes transversales invariantes

Si on considère des déformations de ce même solide par purs cisaillements, à expansion volumique constante τ_0, l'équation de Newton *(7.45)* se simplifie sous la forme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} \qquad (7.54)$$

En introduisant des perturbations transversales du champ de vitesse $\vec{\phi}^{(p)}$ sous la forme d'un champ de vitesse $\vec{\phi}^{(p)} = \phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k$ variant le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, on montre avec les équations géométrocinétiques que cette perturbation du champ de vitesse implique les perturbations suivantes pour l'expansion volumique et le vecteur de rotation le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau^{(p)}}{dt} = \mathrm{div}\,\vec{\phi}^{(p)} = 0 & \Rightarrow \quad \tau = \tau_0 = cste \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}^{(p)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi_k^{(p)}}{\partial x_j}\vec{e}_i & \Rightarrow \quad \vec{\omega}^{(p)} = \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_i \end{cases} \qquad (7.55)$$

ainsi que les perturbations suivantes pour le tenseur de cisaillements le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, qui sont directement reliées aux perturbations de rotation

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{(p)}}{dt} = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_i^{(p)} = 0 \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_j^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi_k^{(p)}}{\partial x_j}\vec{e}_k & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_j^{(p)} = \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k \\ \dfrac{d\vec{\alpha}_k^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi_k^{(p)}}{\partial x_j}\vec{e}_j & \Rightarrow \quad \vec{\alpha}_k^{(p)} = \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j \end{cases} \qquad (7.56)$$

La quantité de mouvement est liée au champ de vitesse $\vec{\phi}^{(p)}$ par le relation $\vec{p}^{(p)} = m\vec{\phi}^{(p)}$ et l'équation de Newton peut s'écrire

$$\frac{d\vec{p}^{(p)}}{dt} = -2k_2 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} = -2\frac{k_2}{m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(p)} \qquad (7.57)$$

Comme les perturbations $\vec{\phi}^{(p)}(\vec{r},t) = \phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k$ n'ont qu'une seule composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, et comme toutes les grandeurs de propagation ne varient que le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, la dérivé particulaire d/dt peut être remplacée par la dérivé partielle $\partial/\partial t$ par rapport au temps dans tout le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Ceci permet d'obtenir le couple suivant d'équations différentielles scalaires qui régit les perturbations transversales dans le repère local du solide parfait

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial x_j}\\[2ex]\dfrac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial t}=2\dfrac{k_2}{m}\dfrac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial t^2}=\dfrac{k_2}{m}\dfrac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial x_j^2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2\phi_k^{(p)}}{\partial t^2}=\dfrac{k_2}{m}\dfrac{\partial^2\phi_k^{(p)}}{\partial x_j^2}\end{array}\right. \tag{7.58}$$

Ainsi, quelle que soit l'amplitude d'une onde transversale se propageant dans le solide parfait, celle-ci se déplace par rapport au référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ avec une *célérité d'onde* égale à

$$c_t=\sqrt{\frac{k_2}{m}} \tag{7.59}$$

Ainsi, dans le solide isotrope parfait, la célérité intrinsèque des ondes transversales est une «*grandeur invariante*», c'est-à-dire une grandeur qui ne dépend pas de l'expansion volumique τ_0 du réseau, à condition que celle-ci soit homogène et constante. Il faut remarquer aussi que, si l'expansion volumique statique τ du solide n'est pas homogène, c'est-à-dire si $\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau\neq 0$, la propagation des perturbations transversales est alors affectée par la présence du terme de couplage $-2k_2\sum\left(\vec{e}_k\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k$ entre les champs τ et $\vec{\alpha}_i$ dans l'équation de Newton *(7.45)*. La propagation d'ondes transversales dépend en ce cas des gradients de l'expansion volumique τ, et la résolution de ce problème de propagation ne peut plus se passer de l'utilisation explicite du champ de cisaillement $\vec{\alpha}_i$!

7.6 - Equations de transport et relaxations inertielles

Les équations de transport des défauts ponctuels *(7.42)* peuvent être transformées en introduisant les valeurs des flux $\vec{J}_L$ et $\vec{J}_I$ *(5.78)* et des forces $\vec{X}_L$ et $\vec{X}_I$ *(6.42)*

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\vec{\varphi}_L=\vec{\phi}_L-\vec{\phi}=\dfrac{D_L(\tau,T)}{kT}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\;\mu_L^*+m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L-2\Delta\vec{\varphi}_L\right)-m\vec{g}\right)\\[2ex]\Delta\vec{\varphi}_I=\vec{\phi}_I-\vec{\phi}=\dfrac{D_I(\tau,T)}{kT}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\;\mu_I^*-m\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right)+m\vec{g}\right)\end{array}\right. \tag{7.60}$$

Ces nouvelles équations relient les vitesses relatives des défauts ponctuels par rapport au réseau aux forces chimiques et mécaniques, via des coefficients D/kT. De telles équations portent le nom de *relations de diffusion d'Einstein*. Il est encore possible de transformer ces équations pour faire apparaître les *équations de mouvement* des lacunes et des interstitiels par rapport au réseau, le long de la trajectoire du réseau, en décomposant la vitesse absolue des lacunes, et en regroupant les termes de manière différente. Il vient

$$\left\{\begin{array}{l}m\dfrac{d\Delta\vec{\varphi}_L}{dt}+B_L(\tau,T)\Delta\vec{\varphi}_L=+m\dfrac{d\vec{\phi}}{dt}-m\vec{g}-\overrightarrow{\text{grad}}\;\mu_L^*\\[2ex]m\dfrac{d\Delta\vec{\varphi}_I}{dt}+B_I(\tau,T)\Delta\vec{\varphi}_I=-m\dfrac{d\vec{\phi}}{dt}+m\vec{g}-\overrightarrow{\text{grad}}\;\mu_I^*\end{array}\right. \tag{7.61}$$

dans lesquelles $B_L(\tau,T)$ et $B_I(\tau,T)$ sont les *coefficients de frottement visqueux* des lacunes et des interstitiels respectivement, qui sont reliés aux coefficients de diffusion par

$$B_L(\tau,T)=\frac{kT}{D_L(\tau,T)}\quad\textit{et}\quad B_I(\tau,T)=\frac{kT}{D_I(\tau,T)} \tag{7.62}$$

Dans les équations de mouvement *(7.61)*, le mouvement relatif amorti des défauts ponctuels par rapport au réseau est contrôlé par trois forces appliquées différentes: une force d'entraînement due à l'accélération $md\vec{\phi}/dt$ du réseau, une force $m\vec{g}$ due à la gravité et une force chimique et cinétique égale au gradient de μ_L^* ou de μ_I^*.

Les processus de relaxations inertielles des défauts ponctuels

Si un réseau solide dont les défauts ponctuels sont à l'équilibre thermodynamique est soumis à une vibration, caractérisée par un champ de vitesse absolue $\vec{\phi}$ oscillant, le mouvement des défauts ponctuels au sein de ce solide est décrit par les équations de mouvement *(7.61)*, dans lesquelles les termes $-\overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_L^*$ et $-\overrightarrow{\text{grad}}\ \mu_I^*$ peuvent être considérés comme nuls puisque les défauts ponctuels sont à l'équilibre thermodynamique. En négligeant aussi le champ gravifique, et en imposant dans une direction $\vec{\boldsymbol{n}}$ une vibration $\vec{\phi}(t) = \vec{\boldsymbol{n}}\phi_0 \cos\omega t$ de fréquence angulaire ω au réseau isotrope, le champ de vitesse absolue du solide peut s'écrire par commodité en utilisant le formalisme des *vecteurs tournants dans le plan complexe* (on indiquera les grandeurs complexes en les soulignant)

$$\underline{\vec{\phi}}(t) = \vec{\boldsymbol{n}}\phi_0\, \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (7.63)$$

D'après les équations *(7.61)*, les défauts ponctuels vont se mettre à osciller, mais avec des amplitudes et des angles de déphasage δ_L et δ_I, différents pour les lacunes et les interstitiels

$$\begin{cases} \underline{\Delta\vec{\varphi}_L}(t) = \vec{\boldsymbol{n}}\Delta\varphi_{L0}\phi_0\, \mathrm{e}^{i(\omega t-\delta_L)} = \underline{\alpha_L}\ \underline{\vec{\phi}}(t) \\ \underline{\Delta\vec{\varphi}_I}(t) = \vec{\boldsymbol{n}}\Delta\varphi_{I0}\phi_0\, \mathrm{e}^{i(\omega t-\delta_I)} = \underline{\alpha_I}\ \underline{\vec{\phi}}(t) \end{cases} \qquad (7.64)$$

En introduisant des coefficients complexes $\underline{\alpha_L}$ et $\underline{\alpha_I}$, les équations de mouvement *(7.61)* permettent de déduire les valeurs de ces coefficients associés aux mouvements oscillatoires des lacunes et des interstitiels, sous la forme des relations suivantes

$$\underline{\alpha_L} = -\frac{m\omega}{iB_L - m\omega} = \frac{(\tau_L\omega)^2 + i\tau_L\omega}{1+(\tau_L\omega)^2} \quad \textit{et} \quad \underline{\alpha_I} = \frac{m\omega}{iB_I - m\omega} = -\frac{(\tau_I\omega)^2 + i\tau_I\omega}{1+(\tau_I\omega)^2} \qquad (7.65)$$

dans lesquelles τ_L et τ_I sont les *temps de relaxation des lacunes et des interstitiels*

$$\tau_L = \frac{m}{B_L} = \frac{mD_L}{kT} \quad \textit{et} \quad \tau_I = \frac{m}{B_I} = \frac{mD_I}{kT} \qquad (7.66)$$

Les champs réels des vitesses relatives des défauts ponctuels par rapport au réseau se déduisent alors immédiatement comme les parties réelles de $\underline{\Delta\vec{\varphi}_L}(t)$ et $\underline{\Delta\vec{\varphi}_I}(t)$. La quantité de mouvement moyenne $\vec{p} = m(\vec{\phi} - C_L\vec{\phi}_L + C_I\vec{\phi}_I)$ par site de réseau s'en déduit aussi dans la représentation complexe, ce qui fait apparaître une *masse apparente complexe* $\underline{m}$

$$\underline{\vec{p}}(t) = m\left[1 - C_L\frac{1+2(\tau_L\omega)^2 + i\tau_L\omega}{1+(\tau_L\omega)^2} + C_I\frac{1-i\tau_I\omega}{1+(\tau_I\omega)^2}\right]\underline{\vec{\phi}}(t) = \underline{m}\,\underline{\vec{\phi}}(t) \qquad (7.67)$$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ moyenne réelle par site de réseau en présence d'un mouvement oscillatoire du réseau présente alors deux contributions: une contribution en phase avec le mouvement du réseau et une contribution déphasée de $\pi/2$. Il apparaît en fait deux *phénomènes de relaxation* sur la quantité de mouvement moyenne $\vec{p}(t)$ par site de réseau, dus respectivement au mouvement des lacunes et des interstitiels au sein du réseau. Ces processus

de relaxation dépendent fortement de la fréquence ω du mouvement oscillatoire et se traduisent par l'existence de cycles ouverts si on reporte $\vec{p}\vec{n}$ en fonction de $\vec{\phi}\vec{n}$, comme le montre la figure 7.4, dans laquelle les effets selon l'axe vertical y ont été très fortement exagérés.

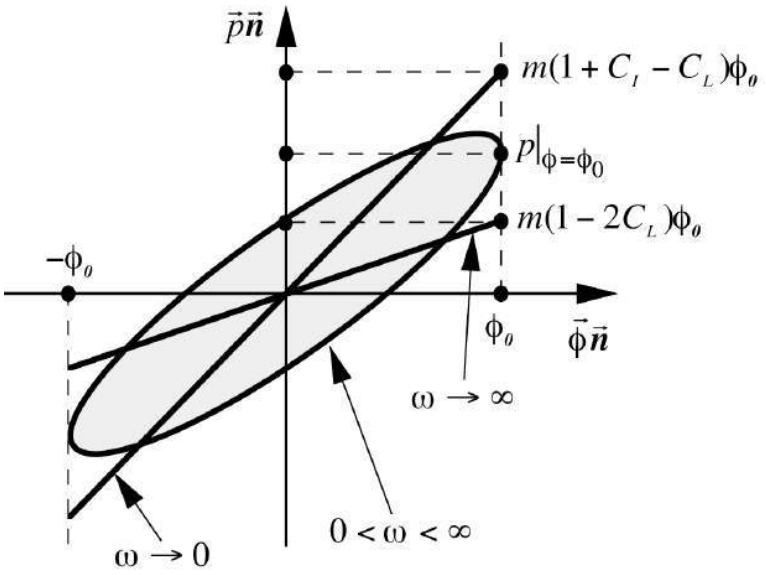


Figure 7.4 *- cycle de relaxation de* $\vec{p}\vec{n}$ en fonction de $\vec{\phi}\vec{n}$

7.7 - Création-annihilation de paires lacune-interstitiel

L'équation phénoménologique *(6.50)* donnant la source volumique S_{I-L} de paires de lacunes et d'interstitiels au sein du réseau peut être déduite à l'aide d'un modèle très simplifié de mécanisme de création-annihilation. Il faut supposer que le diagramme énergétique en fonction de la distance d séparant une lacune d'un interstitiel présente un maximum pour une distance qui sera appelée la *distance d'activation* d^{act} (figure 7.5). Pour des distances d différentes de zéro, mais inférieures à d^{act}, la lacune et l'interstitiel n'ont en fait pas d'existence propre. Il s'agit simplement de fluctuations thermiques de la position de la particule autour de la position du site de réseau qu'elle occupe. Pour des distances d supérieures à d^{act}, la lacune et l'interstitiel acquièrent une identité propre et deviennent de réels défauts ponctuels du réseau, qui possèdent en commun un accroissement d'énergie de paire $\Delta\varepsilon_0$ par rapport à l'énergie de la particule initiale sur son site de réseau. Le passage par la position de col énergétique $\Delta\varepsilon^{act}$ lors de la création d'une paire ne peut donc être induit que par l'apparition d'une fluctuation thermique momentanée d'une particule du réseau, d'énergie supérieure ou égale à $\Delta\varepsilon^{act}$. C'est pourquoi $\Delta\varepsilon^{act}$ sera appelée l'*énergie d'activation de création* d'une paire lacune-interstitiel. L'annihilation d'une paire lacune-interstitiel, c'est-à-dire le chemin inverse dans le diagramme énergétique, nécessite lui aussi une fluctuation thermique, mais d'énergie supérieure ou égale à $\Delta\varepsilon^{act} - \Delta\varepsilon_0$. L'annihilation est donc aussi un processus activé thermiquement, avec une *énergie d'activation d'annihilation* valant $\Delta\varepsilon^{act} - \Delta\varepsilon_0$.

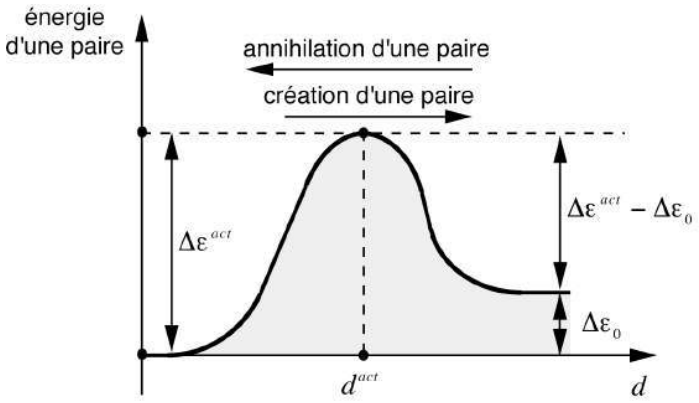


Figure 7.5 *- énergie de création-annihilation d'une paire lacune-interstitiel en fonction de la distance* d

La valeur de l'énergie d'activation $\Delta\varepsilon^{act}$ de création d'une paire lacune-interstitiel est évidemment liée à la nature du réseau solide considéré, mais doit aussi dépendre fortement de la pression hydrostatique p ou de l'expansion volumique locale τ du réseau, de sorte que

$$\Delta\varepsilon^{act} = \Delta\varepsilon^{act}(\tau) \qquad (7.68)$$

Quant à l'énergie d'activation $\Delta\varepsilon^{act} - \Delta\varepsilon_0$ d'annihilation d'une paire lacune-interstitiel, elle dépend de $\Delta\varepsilon^{act}(\tau)$, mais aussi de l'accroissement $\Delta\varepsilon_0$ de l'énergie de la paire lacune-interstitiel par rapport à l'énergie de la particule initiale sur son site de réseau. Or cet accroissement d'énergie $\Delta\varepsilon_0$ n'est rien d'autre que la somme des *énergies potentielles* $\varepsilon_L(\tau)$ et $\varepsilon_I(\tau)$ de la lacune et de l'interstitiel, introduites précédemment dans la fonction d'état Δf^{dp}, et de l'*accroissement d'énergie cinétique* Δe_{cin}^{I-L} défini par la relation *(6.48)*

$$\Delta\varepsilon_0 = \varepsilon_L(\tau) + \varepsilon_I(\tau) + \Delta e_{cin}^{I-L} \qquad (7.69)$$

Les termes de création et d'annihilation de paires peuvent par conséquent s'écrire

$$S_{I-L}^{création} = n(1-C_L)\nu_c \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon^{act}}{kT}\right) \qquad (7.70)$$

$$S_{I-L}^{annihilation} = nC_L C_I \nu_a \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon^{act} - \Delta\varepsilon_0}{kT}\right) \qquad (7.71)$$

En effet, comme S_{I-L} représente un terme de source volumique, S_{I-L} doit être proportionnel à la densité volumique de sites n. Dans le cas de la création, seuls les sites substitutionnels occupés peuvent contribuer à la formation d'une paire, d'où la proportionnalité en $(1-C_L)$. Dans le cas de l'annihilation, il est clair que le nombre d'annihilation doit être proportionnel à la fois aux concentrations C_L et C_I de lacunes et d'interstitiels, donc au produit $C_L C_I$.

Dans les deux expressions apparaît une *fréquence d'attaque*, $\nu_c(\tau)$ ou $\nu_a(\tau)$, qui correspond à la fréquence d'occurrence de conditions favorables à la création ou à l'annihilation d'une paire, fréquence essentiellement liée aux fluctuations thermiques locales, et qui doit assurément dépendre de τ.

Finalement, chacune des expressions est multipliée par un *terme de Boltzmann* correspondant à la probabilité d'apparition d'une fluctuation thermique d'énergie égale ou supérieure à $\Delta\varepsilon^{act}$ ou $\Delta\varepsilon^{act} - \Delta\varepsilon_0$, permettant d'effectuer le saut par-dessus le col d'énergie reporté à la figure 7.5. Avec ce modèle élémentaire, le terme S_{I-L} global de source ou de puits de paires s'écrit,

en se souvenant que la concentration C_L est supposée faible

$$S_{I-L} = S_{I-L}^{création} - S_{I-L}^{annihilation} = n\left[\left(1-C_L\right)\nu_c - C_L C_I \nu_a \exp\left(\frac{\Delta\varepsilon_0}{kT}\right)\right]\exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon^{act}}{kT}\right)$$
$$\cong n\left[\nu_c - C_L C_I \nu_a \exp\left(\frac{\varepsilon_L(\tau)+\varepsilon_I(\tau)+\Delta e_{cin}^{I-L}}{kT}\right)\right]\exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon^{act}}{kT}\right) \qquad (7.72)$$

Le terme global de source S_{I-L} s'annule lorsque l'argument entre crochet s'annule, c'est-à-dire lorsque le produit $C_L C_I$ est approximativement égal à

$$C_L C_I \cong \frac{\nu_c}{\nu_a}\exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_0}{kT}\right) = \frac{\nu_c}{\nu_a}\exp\left(-\frac{\varepsilon_L(\tau)+\varepsilon_I(\tau)}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\Delta e_{cin}^{I-L}}{kT}\right) \qquad (7.73)$$

Cette condition n'est rien d'autre que la *relation d'équilibre cinétique* du mécanisme de création-annihilation de paires lacune-interstitiel. Pour une température T et une expansion volumique τ donnée du solide à l'équilibre thermodynamique, il est possible de calculer les *concentrations d'équilibre thermodynamique* des lacunes et des interstitiels à partir de la fonction d'état f, simplement en cherchant les valeurs de C_L et C_I qui minimise f. Il vient par conséquent les valeurs suivantes de $C_L^{équilibre}$ et $C_I^{équilibre}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial C_L} = \mu_L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_L^{équilibre} = \exp\left(\dfrac{s_L(\tau)}{k}-1\right)\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_L(\tau)}{kT}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial C_I} = \mu_I = 0 \quad \Rightarrow \quad C_I^{équilibre} = z_I \exp\left(\dfrac{s_I(\tau)}{k}-1\right)\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_I(\tau)}{kT}\right) \end{cases} \qquad (7.74)$$

Ces deux conditions d'équilibre thermodynamique permettent de calculer la *relation d'équilibre thermodynamique* du mécanisme de création-annihilation de paires, sous la forme

$$C_L^{équilibre} C_I^{équilibre} = z_I \exp\left(\frac{s_L(\tau)+s_I(\tau)}{k}-2\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_L(\tau)+\varepsilon_I(\tau)}{kT}\right) \qquad (7.75)$$

Comme les relations d'*équilibre cinétique (7.73)* et d'*équilibre thermodynamique (7.75)* doivent être égales à l'équilibre thermodynamique du solide, il est nécessaire que les deux équations suivantes soient satisfaites à l'équilibre thermodynamique

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_c}{\nu_a} = z_I \exp\left(\dfrac{s_L(\tau)+s_I(\tau)}{k}-2\right) \\ \dfrac{\Delta e_{cin}^{I-L}}{kT} = 0 \end{cases} \qquad (7.76)$$

La deuxième relation implique qu'à l'équilibre thermodynamique, les énergies cinétiques des lacunes et des interstitiels se thermalisent, ce qui s'exprime par le fait que, d'après *(6.48)*

$$\Delta e_{cin}^{I-L} = \Delta e_{cin}^{L} + \Delta e_{cin}^{I} = e_{cin}^{L} + e_{cin}^{I} = 0 \qquad (7.77)$$

et qui se traduit en terme des vitesses relatives des lacunes et des interstitiels par la relation

$$\Delta e_{cin}^{I-L} = m\vec{\phi}\left(\Delta\vec{\varphi}_I - \Delta\vec{\varphi}_L\right) + \frac{1}{2}m\left(\Delta\vec{\varphi}_I^2 + \Delta\vec{\varphi}_L^2\right) = 0 \quad \textit{(à l'équilibre thermodynamique)} \qquad (7.78)$$

Quant à la première équation, elle implique l'existence d'une relation étroite entre les fré-

quences d'attaque $\nu_c(\tau)$ et $\nu_a(\tau)$ et les entropies $s_L(\tau)$ et $s_I(\tau)$ des lacunes et des interstitiels

$$s_L(\tau)+s_I(\tau)=k\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2\,\nu_c(\tau)}{z_I\nu_a(\tau)}\right)=k\ln\Omega^{vibration} \qquad (7.79)$$

qui montre que les entropies $s_L(\tau)$ et $s_I(\tau)$ mesurent en fait les variations de $\Omega^{vibration}$, le nombre des configurations microscopiques de vibration du réseau au voisinage des lacunes et des interstitiels. De cette relation est déduite, grâce aux équations d'état *(7.15)* pour μ_L et μ_I, une autre relation donnant $\nu_a(\tau)$ en fonction de $\nu_c(\tau)$ et des potentiels chimiques

$$\nu_a(\tau)=\frac{\nu_c(\tau)}{z_I}\exp\left(2-\frac{s_L(\tau)+s_I(\tau)}{k}\right)=\frac{\nu_c(\tau)}{C_LC_I}\exp\left(\frac{\mu_L+\mu_I}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_L(\tau)+\varepsilon_I(\tau)}{kT}\right) \qquad (7.80)$$

Cette dernière relation permet d'exprimer le terme S_{I-L} globale de source ou de puits de paires *(7.72)* sous la forme finale suivante

$$S_{I-L}\cong n\nu_c\exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon^{act}(\tau)}{kT}\right)\left[1-\exp\left(\frac{\mu_L^*+\mu_I^*}{kT}\right)\right] \qquad (7.81)$$

qui correspond parfaitement à la forme *(6.50)* supposée précédemment pour l'équation phénoménologique de création-annihilation de paires lacune-interstitiel.

7.8 - Phénoménologie de l'anélasticité

Les équations phénoménologiques d'anélasticité

Les cisaillements globaux $\vec{\alpha}_i$ d'un solide anélastique sont donnés par la somme des cisaillements élastiques et anélastiques du réseau

$$\vec{\alpha}_i=\vec{\alpha}_i^{\,él}+\vec{\alpha}_i^{\,an} \qquad (7.82)$$

Dans cette relation constitutive, le tenseur de contrainte des cisaillements élastiques et la partie conservative du tenseur de contrainte des cisaillements anélastiques se déduisent de *(7.15)*

$$\begin{cases} \vec{s}_i=2nk_2(T)\vec{\alpha}_i^{\,él}=K_{él}\vec{\alpha}_i^{\,él} & \Rightarrow \quad K_{él}=K_{él}(n,T)=2nk_2(T) \\ \vec{s}_i^{\,cons}=nk_{an}(T,\tau^{él})\vec{\alpha}_i^{\,an}=K_{an}\vec{\alpha}_i^{\,an} & \Rightarrow \quad K_{an}=K_{an}(n,T)=nk_{an}(T,\tau^{él}) \end{cases} \qquad (7.83)$$

C'est la partie dissipative de l'équation phénoménologique d'anélasticité *(6.58)* qui doit essentiellement traduire la dynamique des défauts de structure responsables de l'anélasticité, et qui prend par conséquent différentes formes suivant la nature des obstacles et des interactions s'opposant au mouvement des défauts de structure. Quatre cas typiques simples de dynamique vont être envisagés maintenant.

Le processus de frottement visqueux et le phénomène de relaxation anélastique

Comme la partie dissipative de l'équation phénoménologique d'anélasticité doit essentiellement dépendre de la vitesse des distorsions anélastiques, la forme la plus simple qu'il soit possible d'imaginer pour cette partie est une relation de proportionnalité entre $\vec{s}_i^{\,dis}$ et $d\vec{\alpha}_i^{\,an}/dt$. Il suffit donc d'introduire un *coefficient de frottement visqueux* $B_{an}(n,T)$ qui relie $\vec{s}_i^{\,dis}$ à $d\vec{\alpha}_i^{\,an}/dt$ et

qui peut dépendre de la température T et de la densité de site du réseau

$$\vec{s}_i^{dis} = B_{an}(n,T)\frac{d\vec{\alpha}_i^{an}}{dt} \qquad (7.84)$$

De la sorte, l'équation phénoménologique dissipative d'anélasticité *(6.58)* devient une équation différentielle de premier ordre en $\vec{\alpha}_i^{an}$, permettant de relier le comportement des cisaillements anélastiques $\vec{\alpha}_i^{an}$ à l'évolution spatio-temporelle du champ de contrainte élastique $\vec{s}_i$

$$\vec{s}_i = \vec{s}_i^{cons} + \vec{s}_i^{dis} = K_{an}(n,T)\,\vec{\alpha}_i^{an} + B_{an}(n,T)\,\frac{d\vec{\alpha}_i^{an}}{dt} \qquad (7.85)$$

Les cisaillements élastiques et anélastiques du réseau peuvent alors être représentés par un *modèle rhéologique* (figure 7.6a). En effet, le modèle rhéologique du solide anélastique décrit ci-dessus correspond à mettre en parallèle un ressort de constante K_{an} avec un amortisseur visqueux de constante B_{an} pour représenter la partie anélastique des cisaillements décrite par l'équation d'anélasticité, et de rajouter en série, pour décrire l'équation constitutive *(15.4)*, un ressort de constante K_2 pour représenter la partie élastique des cisaillements décrite par l'équation d'état *(15.5)*. En ce cas, il est clair que la dynamique des défauts de structure responsables de l'anélasticité est contrôlée par un mécanisme conduisant à un *frottement visqueux.*

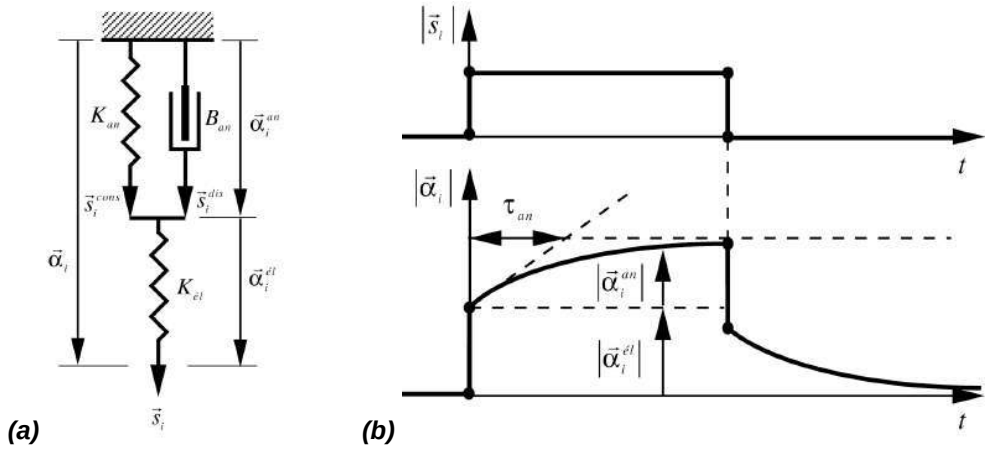


Figure 7.6 *- **(a)** modèle rhéologique de frottement visqueux et*
(b) *réponse élastique instantanée et relaxation*

Avec un tel modèle rhéologique, la réponse du cisaillement total $\vec{\alpha}_i$ à une sollicitation par saut de la contrainte de cisaillement $\vec{s}_i$ présente une partie élastique instantanée et une partie anélastique retardée (figure 7.6b), avec *un temps de relaxation* $\boldsymbol{\tau}_{an}$ égal à

$$\boldsymbol{\tau}_{an} = \frac{B_{an}}{K_{an}} \qquad (7.86)$$

Si le réseau est sollicité par un champ de contrainte de cisaillement $\vec{s}_i(t) = \vec{\boldsymbol{n}} s_{i0}\cos\omega t$ oscillatoire dans une certaine direction $\vec{\boldsymbol{n}}$, sa réponse anélastique va alors présenter un *phénomène de relaxation* à la fréquence $\omega = 1/\boldsymbol{\tau}_{an}$, similaire à celui reporté à la figure 7.3. La réponse temporelle du champs de cisaillement global $\vec{\alpha}_i(t)$ à cette sollicitation de contrainte de cisaillement $\vec{s}_i(t)$ cyclique présente alors un cycle dont l'ouverture et l'amplitude dépendent de la

fréquence de la sollicitation (fig. 7.7).

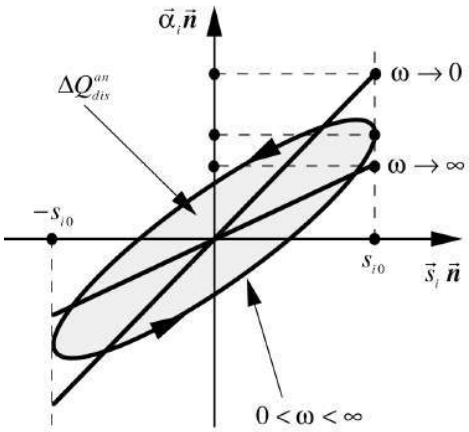


Figure 7.7 *- cycle d'hystérèse en présence d'un frottement visqueux*

Si la température T et l'expansion volumique $\tau^{él}$ du milieu peuvent être considérées comme des constantes dans le temps et l'espace, et seulement dans ce cas, les équations *(7.83)* et *(7.85)* peuvent être combinées de sorte à écrire une seule relation différentielle directe entre le tenseur de cisaillement global $\vec{\alpha}_i$ et le tenseur des contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$, relation dans laquelle les deux composantes $\vec{\alpha}_i^{él}$ et $\vec{\alpha}_i^{an}$ du tenseur de cisaillement n'apparaissent plus

$$B_{an}\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} + K_{an}\vec{\alpha}_i = \frac{B_{an}}{K_{él}}\frac{d\vec{s}_i}{dt} + \left(1 + \frac{K_{an}}{K_{él}}\right)\vec{s}_i \qquad (7.87)$$

L'existence d'un terme inertiel et le phénomène de résonance anélastique

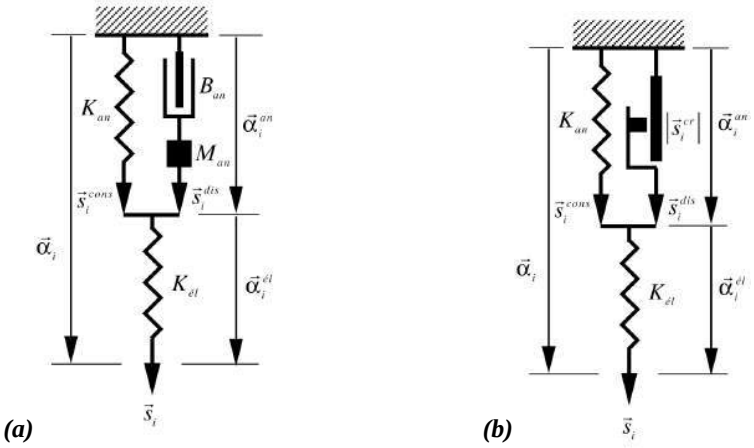


Figure 7.8 *- modèles rhéologiques* ***(a)*** *avec frottement visqueux et masse d'inertie et* ***(b)*** *avec patin de frottement sec*

Il se peut encore que les défauts de structure responsables de l'anélasticité possèdent une masse d'inertie propre dont l'effet est non négligeable vis-à-vis des forces de frottement visqueux. En ce cas, la partie dissipative de l'équation phénoménologique d'anélasticité doit

contenir cet effet d'inertie sous la forme d'un terme proportionnel à la dérivée seconde en le tenseur des cisaillements anélastiques, multiplié par un *coefficient d'inertie* $M_{an}(n,T)$ représentant la masse d'inertie impliquée et qui pourrait aussi dépendre de la densité de site du réseau

$$\vec{s}_i^{\,dis} = M_{an}(n,T)\,\frac{d^2\vec{\alpha}_i^{\,an}}{dt^2} + B_{an}(n,T)\,\frac{d\vec{\alpha}_i^{\,an}}{dt} \qquad (7.88)$$

La présence de la masse d'inertie transforme l'équation phénoménologique dissipative d'anélasticité *(6.58)* en une équation différentielle de second ordre en $\vec{\alpha}_i^{\,an}$, qui peut être représentée par un modèle rhéologique de solide anélastique contenant une masse d'inertie (fig. 7.8a)

$$\vec{s}_i = \vec{s}_i^{\,cons} + \vec{s}_i^{\,dis} = K_{an}(n,T)\,\vec{\alpha}_i^{\,an} + B_{an}(n,T)\,\frac{d\vec{\alpha}_i^{\,an}}{dt} + M_{an}(n,T)\,\frac{d^2\vec{\alpha}_i^{\,an}}{dt^2} \qquad (7.89)$$

L'équation d'anélasticité du réseau *(7.89)* fait intervenir un *temps de relaxation anélastique* $\boldsymbol{\tau}_{an}$ et une *fréquence de résonance* ω_0, donnés par les expressions

$$\boldsymbol{\tau}_{an} = \frac{B_{an}}{K_{an}} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{an}}{M_{an}}} \qquad (7.90)$$

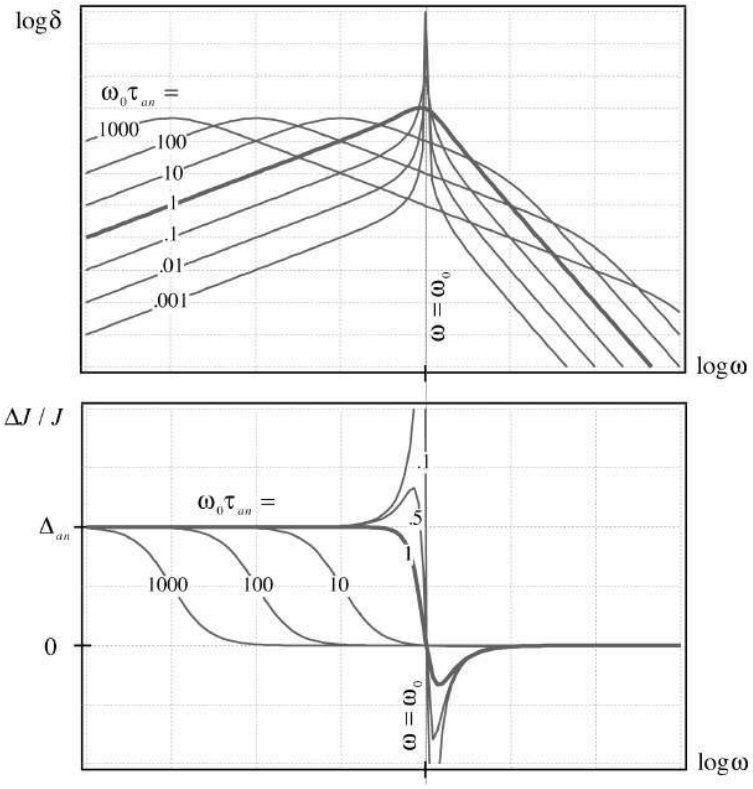


Figure 7.9 *- relaxation ou résonance observées suivant la valeur de* $\omega_0\boldsymbol{\tau}_{an}$

Si le réseau est sollicité par un champ de contrainte de cisaillement $\vec{s}_i\,(t) = \vec{\boldsymbol{n}}s_{i0}\cos\omega t$ oscillatoire dans une certaine direction $\vec{\boldsymbol{n}}$, sa réponse anélastique peut présenter (fig. 7.9):

- un *phénomène de relaxation* à la fréquence $\omega = 1/\boldsymbol{\tau}_{an}$ si $\omega_0\boldsymbol{\tau}_{an} > 1$, car la fréquence de résonance ω_0 est en ce cas plus élevée que la fréquence de relaxation $1/\boldsymbol{\tau}_{an}$,

- un *phénomène de résonance à la fréquence* $\omega = \omega_0$ si $\omega_0 \tau_{an} \leq 1$, car la fréquence de résonance ω_0 est alors plus basse que la fréquence de relaxation $1/\tau_{an}$.

Dans le cas où la température T et l'expansion volumique $\tau^{él}$ du milieu peuvent être considérées comme des constantes dans le temps et l'espace, les équations *(7.83)* et *(7.86)* peuvent être combinées en une seule relation différentielle entre $\vec{\alpha}_i$ et $\vec{s}_i$

$$M_{an}\frac{d^2\vec{\alpha}_i}{dt^2} + B_{an}\frac{d\vec{\alpha}_i}{dt} + K_{an}\vec{\alpha}_i = \frac{M_{an}}{K_{él}}\frac{d^2\vec{s}_i}{dt^2} + \frac{B_{an}}{K_{él}}\frac{d\vec{s}_i}{dt} + \left(1 + \frac{K_{an}}{K_{él}}\right)\vec{s}_i \qquad (7.91)$$

Le processus de frottement sec et le phénomène d'hystérèse anélastique

Les deux exemples de dynamique présentés précédemment font intervenir des phénomènes linéaires, notamment une force de rappel linéaire de coefficient K_{an} et un amortisseur visqueux linéaire de coefficient B_{an}. La relation phénoménologique d'anélasticité est par conséquent une équation différentielle linéaire de premier ou second ordre suivant qu'il existe ou non une masse d'inertie M_{an}. Mais rien n'interdit à priori l'existence de mécanismes d'anélasticité fortement non-linéaires. Par exemple, la relation décrivant le terme dissipatif d'anélasticité pourrait présenter un comportement de *frottement sec*. La façon la plus simple d'envisager un tel comportement est de remplacer, dans le modèle rhéologique de la figure 7.6a, l'amortisseur visqueux par un *patin de frottement sec* (fig. 7.8b) dont la propriété est d'être bloqué tant que la valeur absolue $\left|\vec{s}_i^{dis}\right|$ de la contrainte $\vec{s}_i^{dis}$ est inférieure à une certaine *contrainte critique* $\left|\vec{s}_i^{cr}\right| = s_i^{cr}$, pouvant dépendre de la température T et de la fréquence ω de la contrainte $\vec{s}_i$, et de devenir infiniment souple dès que la valeur absolue $\left|\vec{s}_i^{dis}\right|$ de la contrainte $\vec{s}_i^{dis}$ devient égale à la contrainte critique $\vec{s}_i^{cr}$. Mathématiquement, l'équation phénoménologique dissipative d'anélasticité *(6.58)* est alors remplacée par un système d'équations et d'inéquations

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\alpha}_i^{an}}{dt} = 0 & si \quad \left|\vec{s}_i^{dis}\right| < \left|\vec{s}_i^{cr}\right| \\ K_{an}(n,T)\,\vec{\alpha}_i^{an} = \vec{s}_i - \vec{s}_i^{cr} & si \quad \vec{s}_i^{dis} = \vec{s}_i^{cr} \\ K_{an}(n,T)\,\vec{\alpha}_i^{an} = \vec{s}_i + \vec{s}_i^{cr} & si \quad \vec{s}_i^{dis} = -\vec{s}_i^{cr} \end{cases} \qquad (7.93)$$

En ce cas, la réponse anélastique à un champ de contrainte de cisaillement oscillatoire $\vec{s}_i(t) = \vec{n} s_{i0} \cos\omega t$ dans la direction $\vec{n}$ ne dépend plus de la fréquence ω, mais uniquement de l'amplitude s_{i0} du champ de contrainte de cisaillement. Cette réponse peut se déduire des équations *(7.93)* et est représentée dans la figure 7.10. Si l'amplitude s_{i0} est plus petite que la contrainte critique de désancrage $s_i^{cr} = \left|\vec{s}_i^{cr}\right|$, il n'y a pas de réponse anélastique de cisaillement ($\vec{\alpha}_i^{an} = 0$). Par contre, lorsque l'amplitude s_{i0} excède la contrainte critique de désancrage s_i^{cr}, il apparaît un cycle d'hystérèse comme celui représenté dans la figure de droite.

Ainsi, lorsque l'anélasticité du solide est contrôlée par un frottement sec, le comportement du tenseur des cisaillements anélastiques $\vec{\alpha}_i^{an}$ ne dépend explicitement que de l'amplitude s_{i0} du tenseur des contraintes de cisaillement.

Il faut remarquer que, si la contrainte de cisaillement $\vec{s}_i(t)$ est annulée après un cycle dont l'amplitude s_{i0} a dépassé la contrainte critique s_i^{cr}, il apparaît une *valeur rémanente non nulle* du tenseur de cisaillement anélastique $\vec{\alpha}_i^{an}$. On parle parfois en ce cas d'un phénomène de

"micro-plasticité". Cependant, si le frottement sec envisagé ici n'est en fait qu'une approximation d'une fonction fortement non-linéaire, ce qui sera d'ailleurs toujours le cas si le processus anélastique est activé thermiquement, cette valeur rémanente va progressivement disparaître en fonction du temps sous l'effet de la force de rappel anélastique, de sorte que, à plus ou moins long terme, la déformation anélastique sera finalement entièrement récupérée.

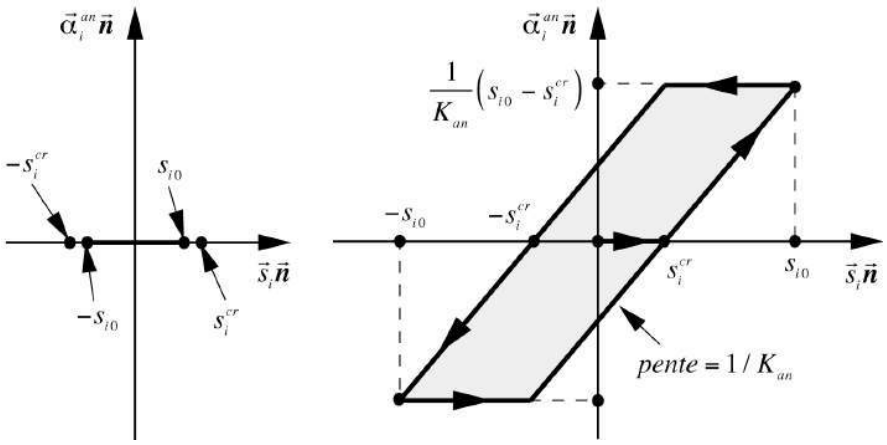


Figure 7.10 *- cycles d'hytérèse de* $\vec{\alpha}_i^{an}$ *en présence d'un frottement sec*

7.9 - Transitions structurales displacives de 2ème et de 1ère espèce

L'existence de phénomènes de transitions de phase du réseau de nature structurale, notamment les *transitions de phase martensitiques*[1], sont sources d'anélasticité au sein du solide. Dans cette section, on va développer à titre d'exemple deux modèles très simples pour des transformations displacives de type martensitique de deuxième et première espèce, c'est-à-dire des transformations structurales sans diffusion conduisant à une déformation homogène du réseau cristallographique telle qu'il en résulte une déformation par cisaillement à l'échelle macroscopique si le milieu est soumis à une contrainte externe.

Un exemple de transition displacive de type martensitique de seconde espèce

On peut élaborer un modèle imaginaire très simplifié de transition de phase de type martensitique, en supposant un réseau présentant une maille légèrement déformée par un cisaillement local d'angle ψ_0 défini, représentant un cisaillement local $\alpha_{ij}^{(0)}$. Dans une direction donnée, les plans atomiques successifs peuvent présenter un angle de cisaillement ψ_0 positif, et on parle de *variante* ***A***, ou un angle de cisaillement $-\psi_0$ négatif, et on parle de *variante* ***B*** (fig. 7.11).
Deux plans successifs du réseau dans une direction donnée ont alors deux possibilités d'arrangements, à savoir deux plans présentant le même cisaillement local $\alpha_{ij}^{(0)}$, qu'on appellera liaison ***A-A***, ou $-\alpha_{ij}^{(0)}$ qu'on appellera liaison ***B-B***, ou bien deux plans présentant des cisaille-

[1] *J. Van Humbeeck, section 5.3, dans «Mechanical Spectroscopy with Applications to Materials Sciences», ed. R. Schaller, G. Fantozzi, G. Gremaud, Trans Tech Publications, Uetikon-Zürich, 2001*

ments opposés $\alpha_{ij}^{(0)}$ et $-\alpha_{ij}^{(0)}$, qu'on appellera liaison ***A-B*** ou ***B-A***. La figure 7.11 illustre bien une telle séquence de variantes successives.

Si on considère maintenant N plans successifs dans une direction donnée du réseau, on peut énumérer le nombre n_A de couches de variante ***A*** et le nombre n_B de couches de variante ***B***, avec

$$n_B = N - n_A \tag{7.94}$$

Sur la base de cette énumération, on peut alors trouver l'angle ψ de cisaillement macroscopique du réseau solide

$$\tan\psi = \frac{l}{L} = \frac{\Delta a}{a}\frac{2n_A - N}{N} = \tan\psi_0\left(\frac{2n_A}{N} - 1\right) \tag{7.95}$$

Le cisaillement macroscopique α_{ij}^{an} du solide associé à cet angle ψ peut être considéré comme un *cisaillement anélastique* puisqu'il n'est pas lié à proprement parler à l'élasticité du réseau

$$\alpha_{ij}^{an} = \alpha_{ij}^{(0)}\frac{\tan\psi}{\tan\psi_0} = \alpha_{ij}^{(0)}\left(\frac{2n_A}{N} - 1\right) \tag{7.96}$$

Supposons que les énergies de liaison entre plans atomiques sont légèrement différentes suivant qu'on a une liaison ***A-A***, ***B-B***, ***A-B*** ou ***B-A***, et que les liaisons ***A-A*** et ***B-B*** sont plus fortes que les liaisons ***A-B*** et ***B-A***. En ce cas, il est clair que les énergies de liaison par maille, qui sont évidemment négatives, sont plus petites pour les paires ***A-A*** et ***B-B*** que pour les paires ***A-B*** et ***B-A*** , de sorte que

$$\varepsilon_{A-A} = \varepsilon_{B-B} < \varepsilon_{A-B} = \varepsilon_{B-A} < 0 \tag{7.97}$$

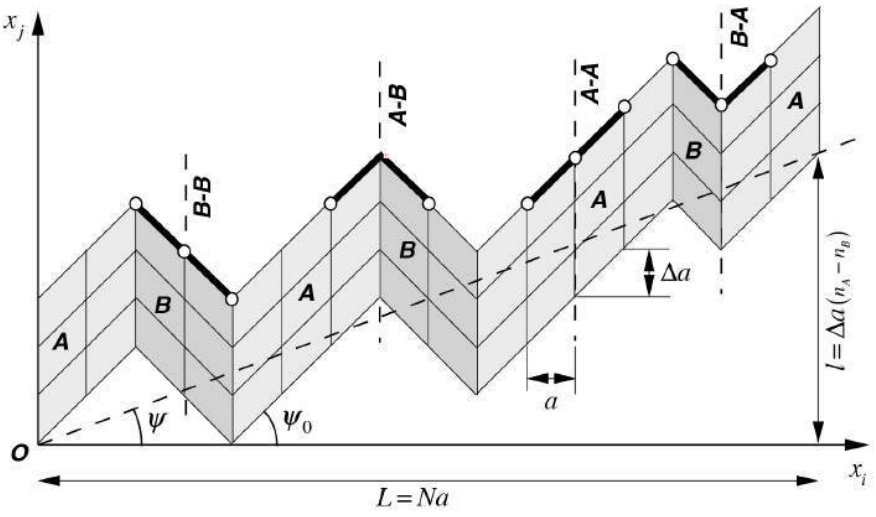


Figure 7.11 *- succession des plans de réseau dans une direction donnée, avec des liaisons* ***A-A*** *,* ***B-B*** *et* ***A-B***

L'énergie interne $U^{liaison}$ associée aux liaisons des N plans atomiques successifs dans une direction donnée s'écrit en énumérant les paires de liaison

$$U^{liaison} = \varepsilon_{A-A}n_A\frac{n_A}{N} + \varepsilon_{B-B}n_B\frac{n_B}{N} + \varepsilon_{A-B}n_A\frac{n_B}{N} + \varepsilon_{B-A}n_B\frac{n_a}{N} < 0 \tag{7.98}$$

Quant à l'entropie $S^{liaison}$ de configuration associée aux liaisons des N plans atomiques successifs dans une direction donnée, elle se déduit à partir du nombre de configurations possibles des paires de liaison par

$$S^{liaison} = k \ln \Omega = k \ln \frac{N!}{n_A! n_B!} \tag{7.99}$$

On en déduit l'énergie libre de liaison des N plans atomiques successifs grâce à la relation $F^{liaison} = U^{liaison} - TS^{liaison}$, dans laquelle on développe $U^{liaison}$ et $S^{liaison}$

$$F^{liaison} = N\varepsilon_{A-A}\left[\left(\frac{n_A}{N}\right)^2 + \left(\frac{n_B}{N}\right)^2\right] + 2N\varepsilon_{A-B}\left(\frac{n_A}{N}\right)\left(\frac{n_B}{N}\right) - kT \ln \frac{N!}{n_A! n_B!} \tag{7.100}$$

En utilisant la relation *(7.94)* et la formule de Stirling, on obtient après quelques calculs l'énergie libre moyenne de liaison $f^{liaison} = F^{liaison} / N$ par maille du réseau dans la direction considérée

$$f^{liaison} = 2\left(\varepsilon_{A-A} - \varepsilon_{A-B}\right)\frac{n_A}{N}\left(\frac{n_A}{N} - 1\right) + \varepsilon_{A-A} + kT\left[\frac{n_A}{N}\ln\left(\frac{n_A}{N}\right) + \left(1 - \frac{n_A}{N}\right)\ln\left(1 - \frac{n_A}{N}\right)\right] \tag{7.101}$$

Cette énergie libre moyenne de liaison par maille du réseau peut être exprimée en introduisant *le paramètre d'ordre* $\alpha_{ij}^{an} / \alpha_{ij}^{(0)}$ associé au cisaillement macroscopique du réseau solide, dont les valeurs peuvent être comprises entre -1 et +1. On alors

$$\frac{n_A}{N} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) \quad et \quad 1 - \frac{n_A}{N} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) \tag{7.102}$$

Avec ce paramètre d'ordre, l'énergie libre moyenne de liaison par maille du réseau peut s'écrire

$$\begin{aligned} f^{liaison} = {} & \varepsilon_{A-A} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{A-A} - \varepsilon_{A-B}\right)\left[\left(\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2 - 1\right] \\ & + kT\left[\left(1 + \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1 + \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) - 2\ln 2\right] \end{aligned} \tag{7.103}$$

A température nulle, l'énergie libre présente un minimum pour $\alpha_{ij}^{an} / \alpha_{ij}^{(0)} = \pm 1$. Ce sont donc les configurations ***A-A*** ou ***B-B*** qui sont favorisées à très basse température, et l'énergie libre par maille y vaut $\varepsilon_{A-A} < 0$.

En introduisant la différence d'énergie $\Delta\varepsilon$ entre les configurations ***A-B*** et ***A-A***

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{A-B} - \varepsilon_{A-A} > 0 \tag{7.104}$$

il est possible de définir l'accroissement de l'énergie libre anélastique Δf^{an}

$$\Delta f^{an} = f^{liaison} - \varepsilon_{A-A} \tag{7.105}$$

qui est associé à l'état de cisaillement α_{ij}^{an} macroscopique du réseau. On obtient alors

$$\Delta f^{an} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2 - 1\right] + \frac{kT}{2}\left[\left(1 + \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1 + \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) - 2\ln 2\right] \tag{7.106}$$

On peut reporter la fonction d'état Δf^{an} en fonction du cisaillement α_{ij}^{an} macroscopique pour différentes températures (fig. 7.12), et on constate un comportement de transition de phase de deuxième espèce, qui présente une *température critique* T_c de transition.

Pour les températures $T > T_c$, le paramètre d'ordre vaut 0 et le cisaillement $\alpha_{ij}^{an} = 0$. Ce sont

les liaisons de type ***A-B*** et ***B-A*** qui sont favorisées par effet entropique. Autrement dit, la *phase haute température* correspond à une succession de plans atomiques ***A-B-A-B-A-B-...***
Pour les températures $T < T_c$, il apparaît deux valeurs $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_1^{st}$ ou $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_2^{st}$ de cisaillement macroscopique correspondant aux minima locaux de Δf^{an}, et deux valeurs $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_1^{inst}$ ou $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_2^{inst}$ de cisaillement macroscopique correspondant aux points d'inflexion de Δf^{an}. Pour une température donnée, les variantes ***A*** et ***B*** tendent à se regrouper, avec, à l'équilibre, une phase contenant une proportion $\left|\alpha_{ij}^{an}\right|_1^{st} / \alpha_{ij}^{(0)}$ de variante ***B*** et présentant un cisaillement $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_1^{st} < 0$ et une phase contenant une proportion $\left|\alpha_{ij}^{an}\right|_2^{st} / \alpha_{ij}^{(0)}$ de variante ***A*** et présentant un cisaillement $\left(\alpha_{ij}^{an}\right)_2^{st} > 0$. Sous contrainte nulle, la proportion de ces deux phases, qui sont séparées par des parois d'anti-phase, sont égales, de sorte que le cisaillement macroscopique global ne peut être que nul. Au fur et à mesure que la température baisse, les proportions à l'équilibre $\left|\alpha_{ij}^{an}\right|_1^{st} / \alpha_{ij}^{(0)}$ et $\left|\alpha_{ij}^{an}\right|_2^{st} / \alpha_{ij}^{(0)}$ tendent vers 1, de sorte qu'il doit apparaître à température nulle une *phase basse température* correspondant aux deux variantes pures ***A-A-A-A-A-...*** et ***B-B-B-B-...*** séparées par des parois d'anti-phase.

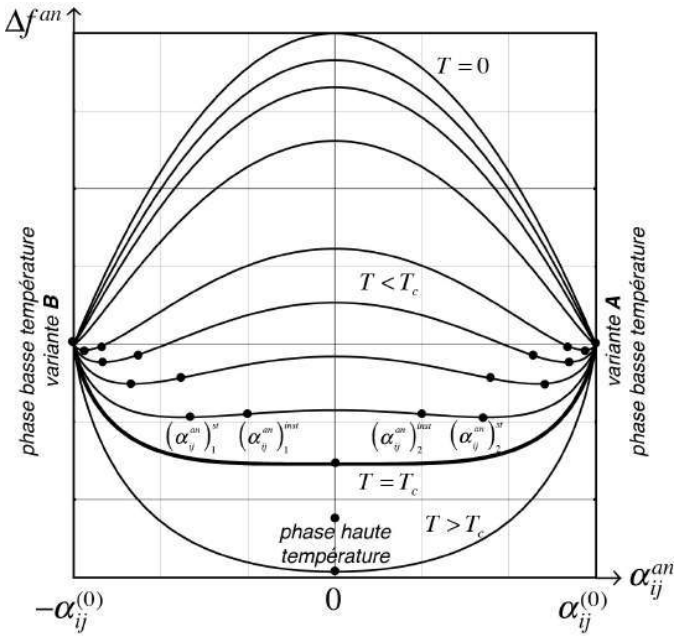


Figure 7.12 *- l'énergie libre anélastique en fonction du cisaillement anélastique, pour différentes valeurs de la température*

Le *diagramme de bifurcation* (fig. 7.13) montre l'évolution des diverses phases avec la température, et l'aspect structural de ces phases.
Cette transformation displacive de deuxième ordre présente un comportement singulier de la chaleur spécifique à la *température critique* T_c de transition. En effet, l'accroissement Δc_v^{tr} de la chaleur spécifique par maille due à la transition de phase peut se déduire à partir de l'énergie interne $u^{liaison}$ exprimée en fonction de α_{ij}^{an} à l'aide de la relation *(B.34)*

$$\Delta c_v^{tr} = \left.\frac{du^{liaison}}{dT}\right|_{v,\alpha_{ij}^{an}} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2}\frac{d}{dT}\left(\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2_{v,\alpha_{ij}^{an}} \qquad (7.107)$$

On déduit immédiatement de cette relation qu'il existe une singularité de la chaleur spécifique Δc_v^{tr} lors de la transition, puisque Δc_v^{tr} est proportionnelle à la dérivé du carré de α_{ij}^{an} dans le diagramme de bifurcation de la figure 7.13.

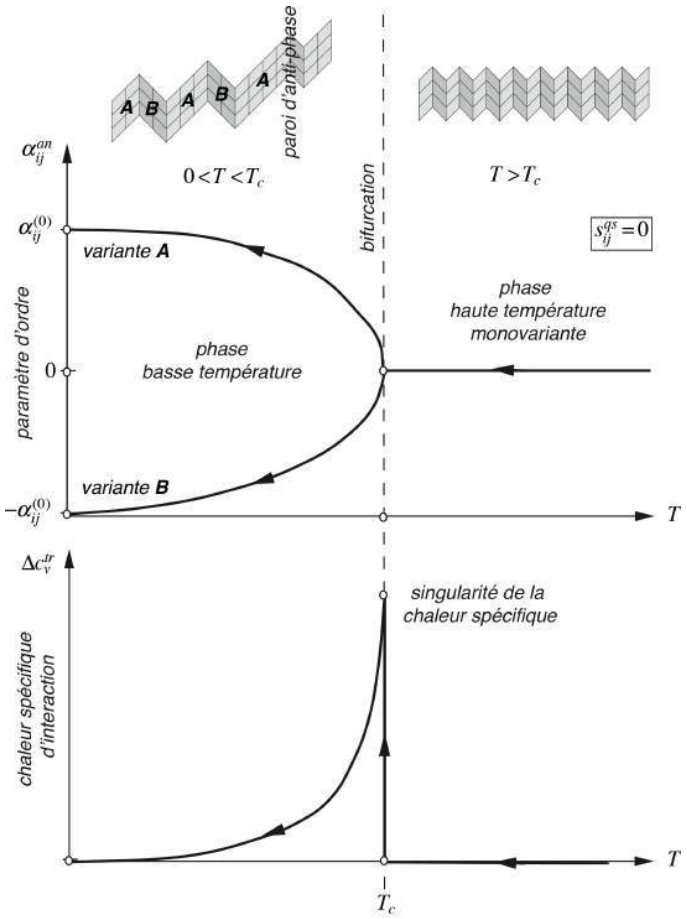


Figure 7.13 *- le diagramme de bifurcation de la transition de phase, et l'aspect structural des phases aux différentes températures*

L'effet de la contrainte appliquée sur la transformation displacive de deuxième ordre

A partir de la fonction d'état *(7.106)* d'anélasticité, on peut déduire les équations d'état de ce réseau pour la contrainte de cisaillement quasi-statique s_{ij}^{qs} et pour l'entropie s^{an}

$$\begin{cases} s_{ij}^{qs} = n\dfrac{\partial \Delta f^{an}}{\partial \alpha_{ij}^{an}} = \dfrac{n}{\alpha_{ij}^{(0)}}\left\{-\Delta\varepsilon\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}} + \dfrac{kT}{2}\left[\ln\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) - \ln\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\right]\right\} \\ s^{an} = -\dfrac{\partial \Delta f^{an}}{\partial T} = -\dfrac{k}{2}\left[\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) + \left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right) - 2\ln 2\right] \end{cases} \quad (7.108)$$

Le diagramme contrainte-déformation $s_{ij}^{qs} - \alpha_{ij}^{an}$ d'anélasticité de transition peut être dessiné pour différentes températures (fig. 7.14).

Dans ce diagramme, les valeurs de cisaillement situées dans le domaine $\left[(\alpha_{ij}^{an})_1^{inst}, (\alpha_{ij}^{an})_2^{inst}\right]$

de pente négative correspondent à des valeurs instables dans le diagramme de l'énergie libre de la figure 7.12, et ne peuvent donc pas être atteintes.

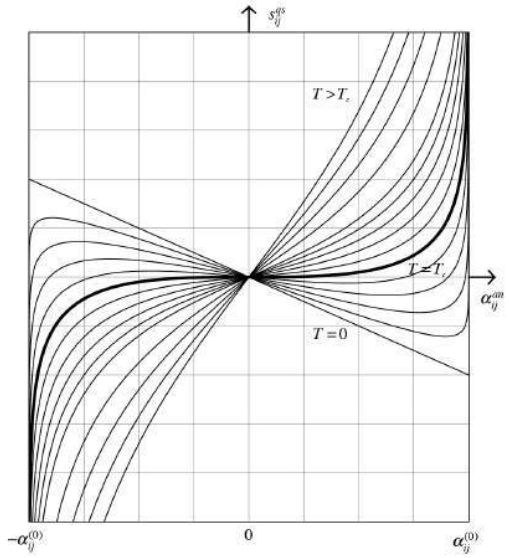


Figure 7.14 *- le diagramme contrainte-déformation* $s_{ij}^{qs} - \alpha_{ij}^{an}$ *d'anélasticité de transition*

Ceci implique que, si une contrainte croissante ou décroissante est appliquée au solide dans le domaine $T < T_c$, il apparaîtra une hystérèse dans le diagramme $s_{ij} - \alpha_{ij}^{an}$, correspondant à une brusque transformation d'une variante vers l'autre variante, induite par l'effet de la contrainte extérieure (fig. 7.15). Au cours de la transformation, la contrainte s_{ij} appliquée peut se décomposer en la contrainte quasi-statique s_{ij}^{qs} déduite de la fonction d'état énergie libre, et une contrainte dissipative s_{ij}^{dis}

$$s_{ij} = s_{ij}^{qs} + s_{ij}^{dis} \qquad (7.109)$$

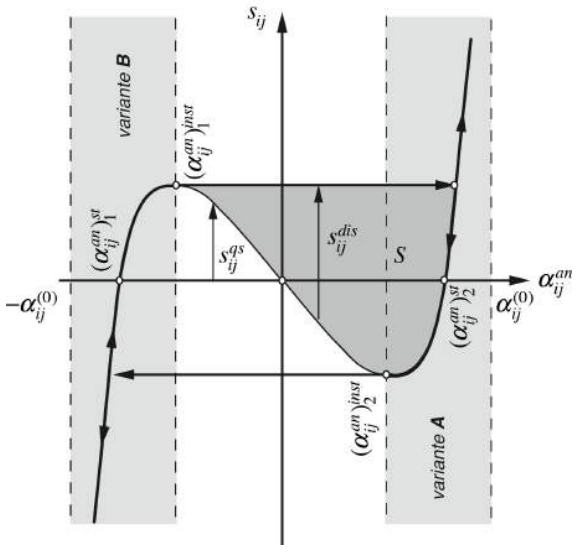


Figure 7.15 *- le cycle d'hystérèse* $s_{ij} - \alpha_{ij}^{an}$ *dans le domaine de température* $T < T_c$

La contrainte dissipative s_{ij}^{dis} est alors source d'une dissipation d'énergie au cours de la trans-

formation, égale à l'aire S reportée dans la figure 7.15. Cet effet d'hystérèse aura pour conséquence l'apparition d'un phénomène dissipatif de frottement intérieur aux températures inférieures à T_c, dépendant à la fois de la température et de l'amplitude de la contrainte s_{ij} appliquée.

La pseudo-plasticité et l'effet mémoire de forme irréversible

La combinaison d'effets de contrainte et de température peut faire apparaître des comportements assez surprenants de ce type de solide.
Si la contrainte est augmentée jusqu'à une valeur $s_{ij(\max)}$ à une température $T < T_c$ donnée, la variante ***B*** va se transformer en variante ***A*** et il apparaîtra un cisaillement macroscopique non nulle du solide (point $(\alpha_{ij}^{an})_1^{inst}$ dans la figure 7.15). Si la contrainte est alors relâchée, le solide conservera un cisaillement macroscopique non nul, comme s'il avait été déformé plastiquement (point $(\alpha_{ij}^{an})_2^{st}$ dans la figure 7.15). Si on chauffe ensuite ce solide au-dessus de la température critique, cette déformation macroscopique disparaît lors de la formation de la phase haute température. Si ce même solide est alors refroidi depuis la phase haute température, sans être soumis à une contrainte, le passage de la température critique fera apparaître en proportion égale les variantes ***A*** et ***B*** au sein du solide, de sorte qu'il n'existera plus de cisaillement macroscopique du solide. C'est pourquoi on qualifie ce phénomène de déformation macroscopique dans la phase basse température de *pseudo-plasticité*.
Par contre, si ce solide est refroidi à partir de la phase haute température sous une contrainte de cisaillement fixée, le passage de la transition fera apparaître un cisaillement macroscopique dû à ce qu'une des variantes sera favorisée par rapport à l'autre. Et ce cisaillement macroscopique sera à nouveau conservé dans la phase basse température si on relâche la contrainte. Mais l'état de cisaillement macroscopique nul initial est à nouveau récupéré si on réchauffe le solide dans sa phase haute température. Cet effet étonnant est appelé *effet mémoire de forme irréversible.*

Un exemple de transformation displacive de type martensitique de première espèce

Reprenons le modèle imaginaire très simplifié de transition de phase de type martensitique décrit à la section précédente (fig. 7.11), mais supposons cette fois que les énergies de liaison entre plans atomiques dépendent non seulement des plans plus proches voisins, mais aussi des plans deuxièmes plus proches voisins. En ce cas, il existe 16 configurations différentes des quatre plans plus proches voisins d'un plan donné, qui sont représentées dans la figure 7.16.
Sur un ensemble de N plans atomiques successifs, la probabilité pour un des plans d'être dans l'une des configurations possibles, par exemple la probabilité P_{AABA} d'être dans la configuration ***AABA***, se calcule facilement

$$P_{AABA} = \frac{n_A}{N}\frac{n_A}{N}\frac{n_B}{N}\frac{n_A}{N} = \frac{n_A^3 n_B}{N^4} \qquad (7.110)$$

On vérifie facilement que la somme des probabilités de toutes les configurations vaut bien 1

$$\sum P_{XXX} = \frac{1}{N^4}\left(n_A^4 + n_B^4 + 6n_A^2 n_B^2 + 4n_A n_B^3 + 4n_A^3 n_B\right) = \frac{1}{N^4}\left(n_A + n_B\right)^4 = 1 \qquad (7.111)$$

Imaginons encore que les deux configurations ***AAAA*** et ***BBBB*** soient très stables, avec une

énergie de liaison $\varepsilon_{AAAA} = \varepsilon_{BBBB} = \varepsilon_1$, que les deux configurations ***ABAB*** et ***BABA*** soient elles aussi très stables, avec une énergie de liaison $\varepsilon_{ABAB} = \varepsilon_{BABA} = \varepsilon_2$, et que les 12 autres configurations soient moins stables que les précédentes, avec, pour simplifier le problème, une énergie identique de liaison ε_3 .

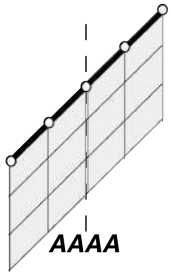
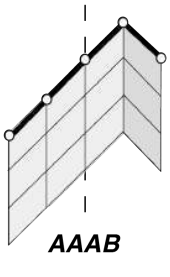
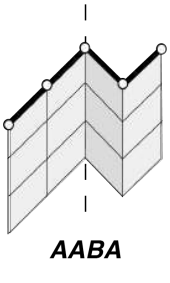
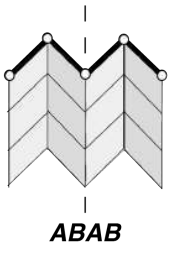
	0 liaison ***A-B***	*1 liaison* ***A-B***	*2 liaisons* ***A-B***	*3 liaisons* ***A-B***
Exemples	 ***AAAA***	 ***AAAB***	 ***AABA***	 ***ABAB***
Configurations	***AAAA*** ***BBBB***	***AAAB*** ***BAAA*** ***BBBA*** ***ABBB*** ***AABB*** ***BBAA***	***AABA*** ***ABAA*** ***BBAB*** ***BABB*** ***ABBA*** ***BAAB***	***ABAB*** ***BABA***
	ε_1	ε_3		ε_2

Figure 7.16 *- les 16 configurations différentes de 4 plans atomiques successifs*

On a alors

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_3 < 0 \quad et \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < 0 \tag{7.112}$$

L'énergie interne moyenne $u^{liaison}$ par maille dans une direction donnée s'écrit en utilisant les probabilités des différentes configurations possibles de liaison. Il vient

$$u^{liaison} = \left[\varepsilon_1 \left(n_A^4 + n_B^4 \right) + \varepsilon_2 \left(2 n_A^2 n_B^2 \right) + \varepsilon_3 \left(N^4 - n_A^4 - n_B^4 - 2 n_A^2 n_B^2 \right) \right] / N^4 \tag{7.113}$$

Quant à l'entropie moyenne $s^{liaison}$ de configuration par maille du réseau dans la direction donnée, elle se déduit à partir du nombre des configurations possibles comme

$$s^{liaison} = \frac{k}{N} \ln \Omega = \frac{k}{N} \ln \frac{N!}{n_A! n_B!} = -k \left[\frac{n_A}{N} \ln \frac{n_A}{N} + \left(1 - \frac{n_A}{N} \right) \ln \left(1 - \frac{n_A}{N} \right) \right] \tag{7.114}$$

On en déduit l'énergie libre moyenne par maille du réseau dans la direction donnée

$$\begin{aligned} f^{liaison} = u^{liaison} - T s^{liaison} = \varepsilon_3 + \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right) \left[\left(\frac{n_A}{N} \right)^4 + \left(\frac{n_B}{N} \right)^4 \right] + 2 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right) \left(\frac{n_A}{N} \right)^2 \left(\frac{n_B}{N} \right)^2 \\ + kT \left[\frac{n_A}{N} \ln \frac{n_A}{N} + \left(1 - \frac{n_A}{N} \right) \ln \left(1 - \frac{n_A}{N} \right) \right] \end{aligned} \tag{7.115}$$

En introduisant les différences d'énergie de liaison suivantes

$$\Delta \varepsilon_I = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 > 0 \quad et \quad \Delta \varepsilon_{II} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 > 0 \tag{7.116}$$

il est possible de définir l'accroissement de l'énergie libre anélastique Δf^{an} par la relation

$$\Delta f^{an} = f^{liaison} - \varepsilon_3 \qquad (7.117)$$

qui est associé à l'état de cisaillement α_{ij}^{an} macroscopique du réseau via *le paramètre d'ordre* $\alpha_{ij}^{an} / \alpha_{ij}^{(0)}$ grâce aux relations *(7.94)*. On obtient

$$\Delta f^{an} = -\frac{\Delta\varepsilon_I}{16}\left[\left(1+\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^4+\left(1-\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^4\right]-\frac{\Delta\varepsilon_{II}}{8}\left(1+\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2\left(1-\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2 + \frac{kT}{2}\left[\left(1+\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1+\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)+\left(1-\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1-\frac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)-2\ln 2\right] \qquad (7.118)$$

On peut reporter la fonction d'état Δf^{an} en fonction du cisaillement α_{ij}^{an} macroscopique pour différentes températures (fig. 7.17). On constate un comportement nouveau par rapport à la transition displacive de deuxième espèce décrite à la section précédente.

A très basse température, pour $T < T_1$, la fonction d'état Δf^{an} présente deux minima situés au voisinage de $\pm\alpha_{ij}^{(0)}$. On appellera *phase I* cette phase basse température, qui présente une *variante* ***A*** dans le voisinage de $+\alpha_{ij}^{(0)}$ et une *variante* ***B*** dans le voisinage de $-\alpha_{ij}^{(0)}$.

A haute température, pour $T > T_2$, la fonction d'état Δf^{an} ne présente plus qu'un seul minimum pour $\alpha_{ij}^{an} = 0$. On appellera *phase II* cette phase haute température monovariante.

Dans le domaine de température $[T_1, T_2]$, la fonction d'état Δf^{an} présente deux minima situés au voisinage de $\pm\alpha_{ij}^{(0)}$ et un minimum situé en $\alpha_{ij}^{an} = 0$. Ceci implique que, dans ce domaine de température, il y a coexistence des phases I et II.

La transition de phase n'intervient donc plus à une température fixe comme précédemment, mais s'effectue progressivement entre les deux *températures critiques* T_1 *et* T_2, ce qui est une des caractéristiques d'une *transition de phase de première espèce*.

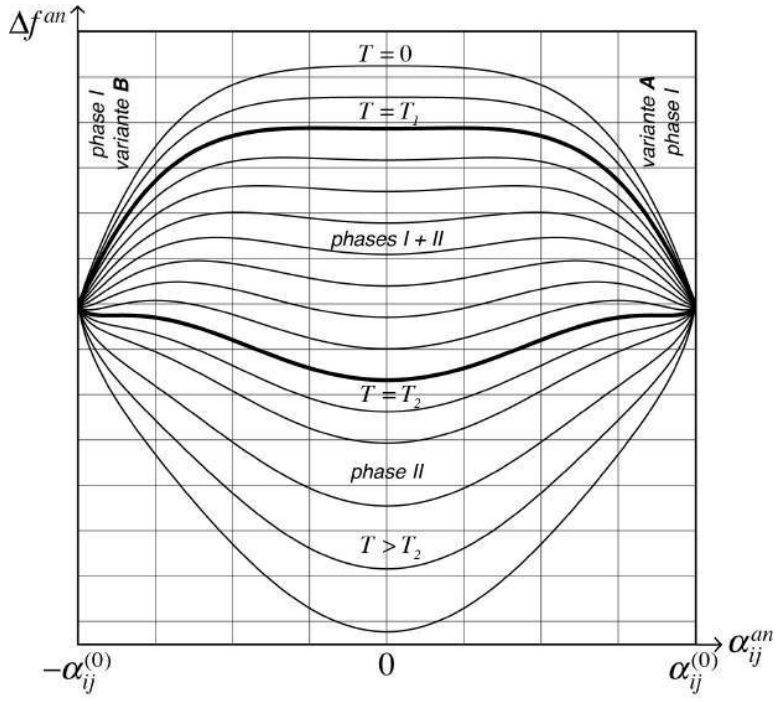


Figure 7.17 *- l'énergie libre anélastique en fonction du cisaillement anélastique, pour différentes valeurs de la température*

L'effet de la contrainte appliquée sur la transformation displacive de premier ordre

A partir de la fonction d'état *(7.118)* de l'anélasticité du réseau, on peut déduire les équations d'état d'anélasticité de ce réseau dans la direction choisie, à savoir la contrainte de cisaillement quasi-statique s_{ij}^{qs} et l'entropie s^{an}

$$\begin{cases} s_{ij}^{qs} = n\dfrac{\partial \Delta f^{an}}{\partial \alpha_{ij}^{an}} = \dfrac{n}{\alpha_{ij}^{(0)}}\left\{-\dfrac{\Delta\varepsilon_I}{4}\left[\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^3-\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^3\right]+\dfrac{\Delta\varepsilon_{II}}{2}\left[1-\left(\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)^2\right]\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{kT}{2}\left[\ln\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)-\ln\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\right] \\ s^{an} = -\dfrac{\partial \Delta f^{an}}{\partial T} = -\dfrac{k}{2}\left[\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1+\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)+\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)\ln\left(1-\dfrac{\alpha_{ij}^{an}}{\alpha_{ij}^{(0)}}\right)-2\ln 2\right] \end{cases} \qquad (7.119)$$

Le diagramme contrainte-déformation $s_{ij}^{qs}-\alpha_{ij}^{an}$ d'anélasticité de transition peut être dessiné pour différentes températures (fig. 7.18).

Dans ce diagramme, les valeurs de cisaillement situées dans les domaines de pente négative correspondent à des valeurs instables dans le diagramme de l'énergie libre de la figure 7.17, et ne peuvent donc pas être atteintes. En observant ce diagramme dans les détails, on constate qu'il apparaît en fait quatre températures caractéristiques T_1, T_1', T_2' et T_2 au cours de la transformation de phase, illustrées par les quatre diagrammes $s_{ij}^{qs}-\alpha_{ij}^{an}$ reportées à la figure 7.19.

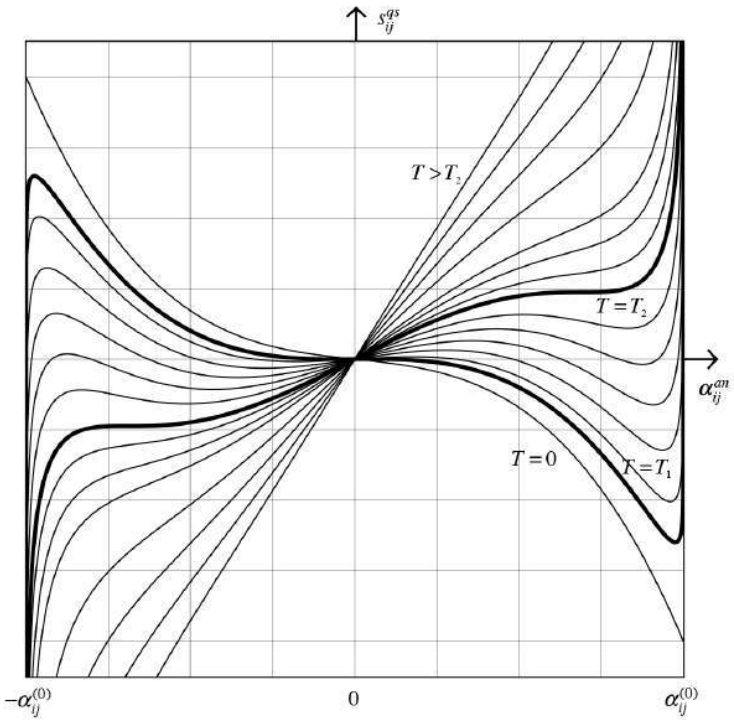


Figure 7.18 *- le diagramme contrainte-déformation $s_{ij}^{qs}-\alpha_{ij}^{an}$ d'anélasticité de transition, avec les températures de transition T_1 et T_2.*

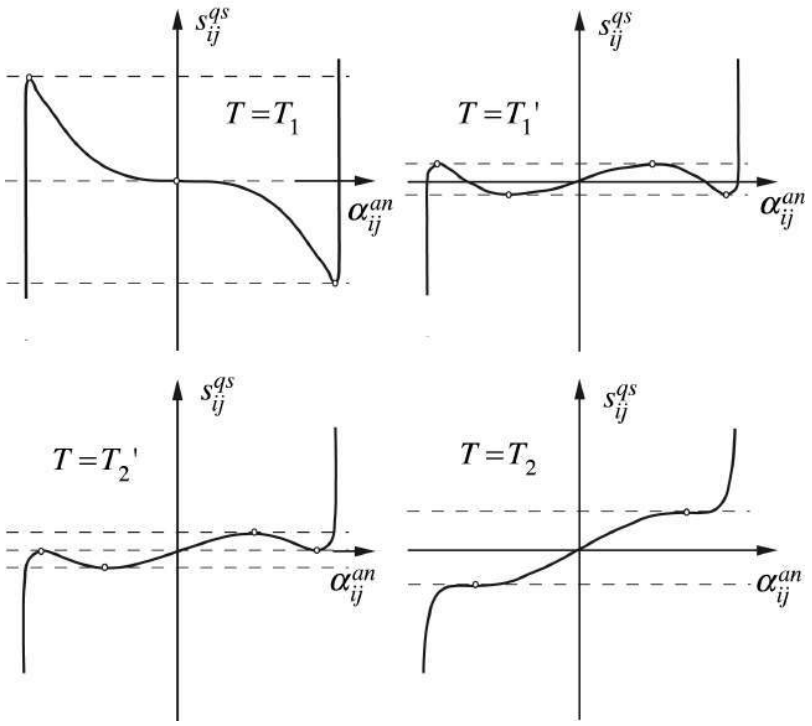


Figure 7.19 *- les diagrammes* $s_{ij}^{qs} - \alpha_{ij}^{an}$ *pour les températures caractéristiques* T_1, T_1', T_2' *et* T_2.

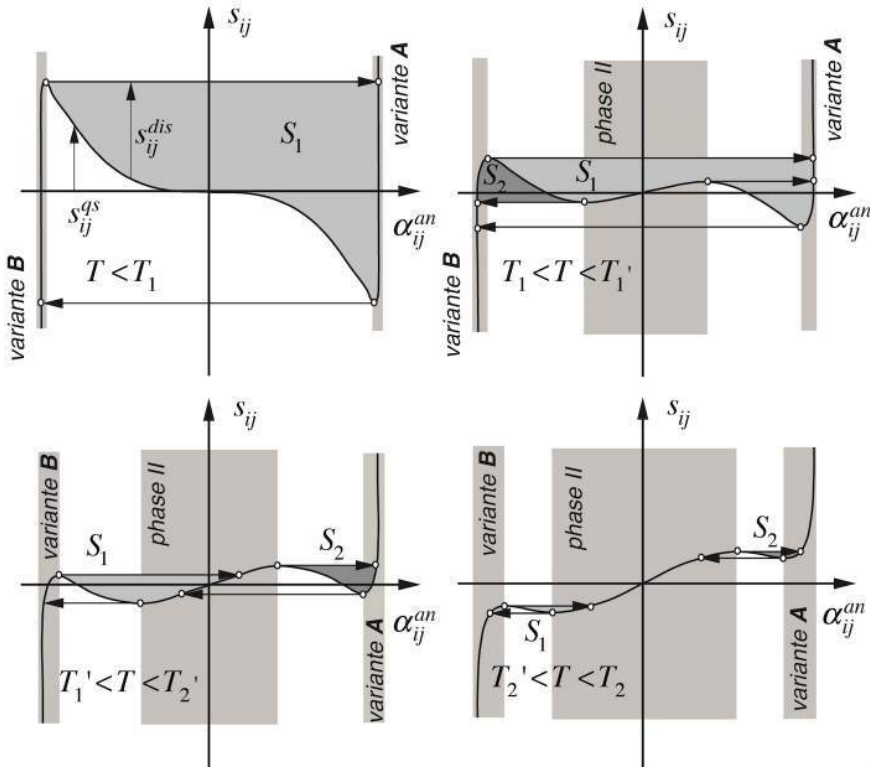


Figure 7.20 *- les cycle d'hystérèse* $s_{ij} - \alpha_{ij}^{an}$ *dans les quatre domaines de température*

Ces quatre températures caractéristiques T_1, T_1', T_2' et T_2 permettent de définir quatre domaines dans lesquels les comportements dissipatifs d'anélasticité de transformation sont différents si on soumet le solide à une contrainte de cisaillement extérieur s_{ij} (fig. 7.20).
En effet, si une contrainte croissante ou décroissante est appliquée au solide dans ces différents domaines de température, il apparaît des phénomènes d'hystérèses dans le diagramme $s_{ij} - \alpha_{ij}^{an}$, correspondant à de brusques transformations entre les deux variantes de la phase I et la phase II. Dans le domaine $T < T_1$, seules les deux variantes de la phase I existent, et il apparaît des transformations entre ces deux variantes. Dans le domaine $\left[T_1, T_1'\right]$, les deux varaintes de la phase I sont stables, et la phase II est métastable. Il apparaît alors des transformations entre les deux variantes de la phase I, mais aussi des transformations irrécupérables entre la phase II métastable et les deux variantes de la phase I. Dans les domaine $\left[T_1', T_2'\right]$ et $\left[T_2', T_2\right]$, les phases I et II sont stables, et il apparaît exclusivement des transformations entre les variantes de la phase I et la phase II. Au cours de ces transformations, la contrainte s_{ij} appliquée peut se décomposer en la contrainte quasi-statique s_{ij}^{qs} déduite de la fonction d'état énergie libre, et une contrainte dissipative s_{ij}^{dis}, selon la relation *(7.109)*. La contrainte dissipative s_{ij}^{dis} est alors à nouveau source d'une dissipation d'énergie au cours de la transformation, égale aux aires S_1 et S_2 reportées en hachuré dans la figure 7.20. Ces effets d'hystérèse ont pour conséquence l'apparition de phénomènes dissipatifs de frottement intérieur dans les différents domaines de température, dépendant à la fois de la température et de l'amplitude de la contrainte s_{ij} appliquée.

La pseudo-plasticité, la super-élasticité et l'effet mémoire de forme irréversible

Dans ce cas plus compliqué de solide présentant une transition de type martensitique de premier ordre, la combinaison d'effets de contrainte et de température va faire apparaître de nombreux comportements assez surprenants du solide, dont on va discuter ici très brièvement quelques aspects.
Dans les domaines de température $T < T_2'$, si la contrainte est augmentée jusqu'à une valeur $s_{ij(\max)}$ suffisante, le solide ne contiendra plus que de la variante ***A*** et il apparaîtra un cisaillement macroscopique non nulle du solide. Si la contrainte est alors relâchée, le solide conservera un cisaillement macroscopique non nul, comme s'il avait été déformé plastiquement . Si on chauffe ensuite ce solide au-dessus de la température critique T_2', le solide se transforme dans la phase II et cette déformation macroscopique disparaît. Si ce même solide est alors refroidi sans être soumis à une contrainte en-dessous de la température critique T_1, le passage de la température critique fera apparaître en proportion égale les variantes ***A*** et ***B*** de la phase I au sein du solide, de sorte qu'il n'existera plus de cisaillement macroscopique du solide. Ce phénomène de déformation macroscopique associé aux deux variantes de la phase I basse température est qualifié de *pseudo-plasticité*.
Dans le domaine $\left[T_2', T_2\right]$, le solide se trouve dans la phase II sans contrainte appliquée. Si on lui applique une contrainte suffisante, le solide présentera une soudain une très importante déformation par cisaillement pour une faible variation de la contrainte appliquée, comme si le solide se déformait plastiquement, dû au fait que la phase II se transforme en la variante ***A*** de la phase I. Et cette déformation intense est parfaitement réversible si on abaisse à nouveau la contrainte. On parle alors d'un phénomène de *super-élasticité*.

Si un tel solide est refroidi à partir de la phase II haute température sous une contrainte de cisaillement suffisante, le passage de la transition à la température T_2 fera apparaître un cisaillement macroscopique dû à ce qu'une des variantes de la phase I sera favorisée par rapport à l'autre. Et ce cisaillement macroscopique sera conservé si on relâche la contrainte, à condition que $T < T_2'$. L'état de cisaillement macroscopique nul initial est à nouveau récupéré si on réchauffe le solide au-dessus de la température T_2'. Ce phénomène est appelé *effet mémoire de forme irréversible.*

Des matériaux présentant une transition de phase de type martensitique de premier ordre, et des phénoménologies comme la pseudo-plasticité, la super-élasticité et l'effet mémoire de forme irréversible, ainsi que d'autres phénomènes plus complexes, mais relevant aussi de la transformation de type martensitique, comme *l'effet mémoire de forme réversible,* sont bien connus et très étudiés. On peut notamment citer parmi les plus connus les alliages de cuivre-aluminium-zinc et les alliages de titane-nickel.

7.10 - Phénoménologie de la plasticité

La plasticité d'un réseau solide de particules est essentiellement contrôlée par des mouvements à longue distance de défauts de structure du réseau, comme les dislocations, qui se déplacent sous l'effet des champs de contrainte ou de déformation.

A l'échelle macroscopique de la description continue du solide, la manifestation statistique des mouvements des défauts de structure impliqués se traduit par les équations phénoménologiques dissipatives de plasticité *(6.53)* et *(6.55)*. Comme la dynamique des défauts de structure microscopiques dépend essentiellement des obstacles qu'ils rencontrent au sein du réseau et de la nature des interactions qu'ils peuvent avoir avec ces obstacles, la forme des équations phénoménologiques dissipatives de plasticité doit par conséquent refléter cette dynamique et peut donc présenter de nombreux comportements différents.

L'approche phénoménologique de la plasticité

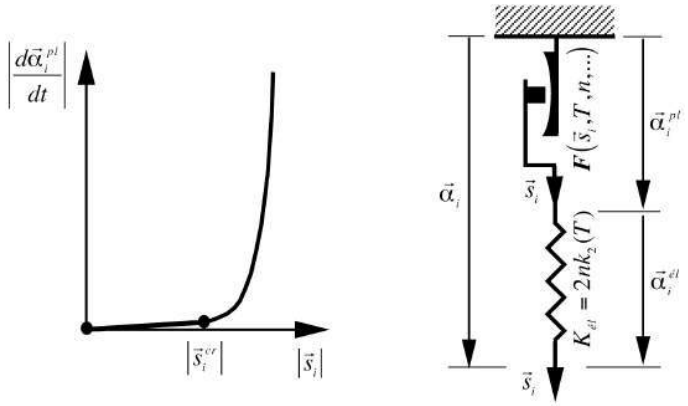
En règle générale, les mécanismes de plasticité sont par nature fortement non-linéaires. Cette non-linéarité intrinsèque de la plasticité doit évidemment se refléter sur les relations phénoménologiques dissipatives de plasticité *(6.53)* et *(6.55)*.

En ne considérant ici, pour l'exemple, que le comportement plastique d'un solide en cisaillement, l'approche phénoménologique de la plasticité de ce solide consiste à trouver une expression de la relation *(6.55)*, de sorte à ce que celle-ci traduise au mieux l'ensemble des comportements plastiques de cisaillement observés sur ce solide. Autrement dit, il s'agit, à l'aide de différents essais mécaniques tels qu'un essai de fluage, un essai de traction, un essai de fatigue, etc., de déterminer la fonction $\boldsymbol{F}$ dans la relation suivante

$$\frac{d\vec{\alpha}_i^{pl}}{dt} = \boldsymbol{F}\left(\vec{s}_i, T, n, ...\right) \qquad (7.120)$$

Cette fonction $\boldsymbol{F}$ sera toujours fortement non-linéaire, et souvent brutalement croissante à partir d'une certaine valeur critique $\vec{s}_i^{cr}$ de la contrainte $\vec{s}_i$ (fig. 7.21a). $\boldsymbol{F}$ dépendra aussi habituellement très fortement de la température T, car les phénomènes de plasticité sont en général

activés thermiquement, et pourra aussi dépendre de la densité volumique n du réseau. Un solide présentant un tel comportement plastique peut être représenté par un modèle rhéologique correspondant à la mise en série d'un *patin de frottement non-linéaire*, représentant la déformation plastique et caractérisé par la fonction $\boldsymbol{F}\left(\vec{s}_i, T, n, ...\right)$, et un ressort représentant la déformation élastique et caractérisé par le module élastique K_2 (fig. 7.21b).



(a) ***(b)***

Figure 7.21 *- **(a)** comportement typique de la vitesse de déformation plastique avec la contrainte et **(b)** modèle rhéologique pour la déformation plastique*

Une telle approche peut parfois permettre de décrire plus ou moins convenablement le comportement plastique d'un solide, notamment dans certains cas d'essais mécaniques simples, comme l'essai de fluage, l'essai de traction ou l'essai de fatigue.

Les limites de l'approche phénoménologique de la plasticité

L'approche phénoménologique continue de la plasticité sur la base de relations phénoménologiques dissipatives de plasticité comme les relations *(6.53), (6.55)* et (*7.120)* est très limitée, car elle se heurte en général à plusieurs difficultés inhérentes au processus de déformation plastique.

Tout d'abord, il est très rare que des essais mécaniques comme un essai de fluage ou un essai de traction puissent se traduire convenablement par une relation aussi simple que la relations *(7.120)*. En général, les comportements observés au cours d'essais mécaniques sont *très complexes* (fluage non-linéaire, plateau et crochet de traction, instabilités de Portevin-Lechâtellier, effets d'écrouissage, etc.) et dépendent de nombreux paramètres, comme la nature du réseau solide, sa cristallinité, sa pureté, les traitements thermomécaniques qu'il a subis, etc. Ces comportements reflètent en fait la complexité des mécanismes microscopiques mis en jeu lors de la déformation plastique.

D'autre part, la présence nécessaire des conditions de géométrocompatibilité implique aussi que la déformation, notamment la déformation plastique, ne peut pas présenter de *localisation spatiale*, ce qui n'est pas toujours le cas dans les réseaux solides réels comme les métaux, dans lesquels il peut apparaître des déformations plastiques extrêmement localisées, comme des lignes de glissement par exemple.

Finalement, ce qui distingue essentiellement la phénoménologie des solides doués d'anélasticité et de plasticité de celle des solides purement élastiques est la non-réversibilité thermodynamique des réponses anélastiques et plastiques, qui se traduit par l'existence de sources d'entropie associées à l'anélasticité et à la plasticité. Dans le cas de l'anélasticité, l'irréversibilité thermodynamique conduit à une réponse récupérable mais non-instantanée de la déformation anélastique. Autrement dit, le champ de déplacement $\vec{u}$ associé à l'anélasticité est en retard sur le champ de contrainte appliqué au solide, mais il peut être récupéré si le champ de contrainte est annulé. L'anélasticité est par conséquent un processus markovien qui peut assez aisément se traduire par une équation phénoménologique comme l'équation *(6.58)*. Par contre, dans le cas de la déformation plastique, la réponse de la déformation plastique à un champ de contrainte est irrécupérable: après déformation plastique, il apparaît forcément un champ de déplacement plastique rémanent, qui ne peut être annulé que par une autre déformation plastique. Ce comportement de la déformation plastique, dû à l'absence d'une énergie potentielle stockée au sein du réseau solide par la déformation plastique, conduit souvent à des *comportements non-markoviens* de la plasticité. Autrement dit, la déformation plastique est un processus dissipatif qui peut aussi dépendre de l'histoire du solide, c'est-à-dire de l'ensemble des processus plastiques antérieurs. En première approximation, l'existence de cette "mémoire" du solide pourrait être introduite dans la relation *(7.120)* en postulant une dépendance explicite de la fonction $\boldsymbol{F}$ en l'état local de déformation plastique $\vec{\alpha}_i^{pl}$ du solide, sous la forme

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\left(\vec{s}_i, T, n, \vec{\alpha}_i^{pl}, ...\right) \qquad (7.121)$$

En réalité, le comportement non-markovien de la plasticité des solides est extrêmement difficile, si ce n'est impossible, à traduire, pour la bonne et simple raison qu'il est à associer directement à la structure microscopique du solide, et notamment aux comportements des défauts de cette structure (comme les dislocations par exemple). Or, il n'existe pas de relation univoque entre l'état local de déformation plastique, caractérisé par la valeur du tenseur de déformation plastique, et l'état microscopique du réseau des défauts de structure responsables de cette déformation plastique. Autrement dit, il existe une multitude d'arrangements de défauts de structure conduisant à une valeur locale donnée de la déformation plastique, mais qui peuvent évoluer différemment sous l'effet d'une contrainte $\vec{s}_i(t)$ donnée.

On en conclue que seule une approche microscopique peut être capable de décrire convenablement la complexité du comportement plastique des réseaux solides. C’est l’approche microscopique des singularités topologiques d’un réseau, responsables de sa plasticité, qui va être entreprise dans les prochains chapitres.

PARTIE I

C

Charges de dislocation et charges de désinclinaison dans les réseaux eulériens

Densité et flux de charges de dislocation et de désinclinaison

Singularités topologiques associées aux charges

Flux de charges de dislocation et relations d'Orowan

Equations d'évolution et force de Peach et Koehler

Chapitre 8

Densité et flux de charges de dislocation et de désinclinaison

La description de la plasticité des réseaux solides par un tenseur de distorsion plastique est très limitée, notamment par le fait qu'il n'existe pas de relation univoque entre l'état local $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ de déformation plastique et l'état microscopique du réseau de défauts de structure responsable de cette déformation plastique. C'est la raison pour laquelle la façon d'exprimer la présence de distorsions plastiques dans un réseau doit être modifiée de sorte à ce qu'il soit possible de tenir compte de l'état microscopique du réseau des défauts de structure. Une façon très élégante de procéder à cette modification est d'introduire les concepts de *densités et flux de charges de dislocation,* responsables des *distorsions plastiques du solide,* ainsi que de *densités de charges de désinclinaison,* responsables des *contorsions plastiques du solide*.

8.1 - Concept macroscopique de charges de distorsion plastique

La notion intuitive de charges plastiques

Le concept de *charges de distorsions plastiques du solide*, qui seront dorénavant appelées simplement *charges de dislocation* par raccourcis de langage, est intuitivement simple à saisir, surtout en s'aidant des fameux *"tuyaux de Volterra"*[1] (1907) et d'une analogie avec les charges électriques.

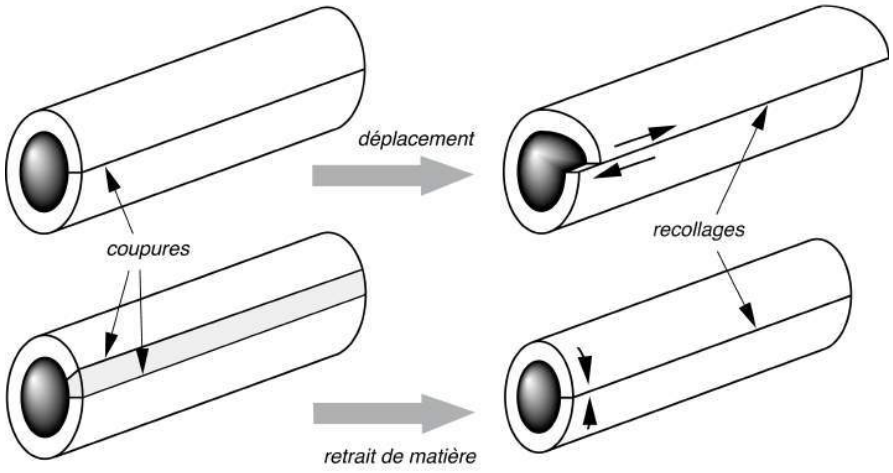


Figure 8.1 *- «tuyaux de Volterra»*

[1] *V. Volterra, L'équilibre des corps élastiques, Ann. Ec. Norm. (3), XXIV, Paris, 1907*

En effet, il suffit d'imaginer, soit qu'on découpe un milieu solide macroscopiquement continu et qu'on lui fasse subir une certaine distorsion avant de le recoller, soit qu'on enlève une partie du milieu et qu'on procède à nouveau à un recollage, comme représenté par les exemples de la figure 8.1. Dans ces deux exemples, les déformations subies par le solide après recollage sont irréversibles et irrécupérables, donc de nature plastique. D'autre part, il est intuitivement clair que des forces internes se sont développées à l'intérieur du solide après recollage. Celles-ci sont apparues au cours de la déformation élastique qui a été imposée au reste du solide pour faire coïncider les deux mâchoires à recoller.

En fait, tout se passe exactement comme si une discontinuité topologique localisée était apparue au centre du tuyau après recollage, discontinuité qui serait source d'un *champ de distorsion élastique* dans le milieu macroscopiquement continu qui compose le tuyau. Et ce champ de distorsion, de par sa présence, est lui-même source d'un champ de contraintes conjuguées, qui peut être appelé *champ de contraintes internes*.

Mathématiquement, la discontinuité due au recollage devrait pouvoir se traduire en terme d'une densité locale de *«charges plastiques»*, sources du champ de distorsion élastique, et donc du champ de contraintes internes, de la même façon qu'en électromagnétisme, la présence d'une densité locale ρ de charges électriques est responsable de l'apparition d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$, comme le montre l'équation de Maxwell

$$\rho = \mathrm{div}\,\vec{D} \qquad (8.1)$$

et par conséquent d'un champ électrique $\vec{E}$ conjugué, puisque $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Le but de ce chapitre sera donc de traduire mathématiquement les phénomènes de plasticité à l'intérieur d'un solide, non seulement en introduisant des densités de charges plastiques, mais aussi des flux de charges plastiques, par analogie avec le flux de charges électriques $\vec{j}$ apparaissant dans l'équation suivante de l'électromagnétisme (dans laquelle $\vec{H}$ représente le champ magnétique)

$$\vec{j} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H} \qquad (8.2)$$

La densité et le flux tensoriels de charges de distorsions plastiques du solide

En reprenant la définition du tenseur de distorsion, telle qu'elle avait été obtenue au chapitre 5, les distorsions sont la somme de distorsions élastiques, anélastiques et plastiques

$$\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an} + \vec{\beta}_i^{\,pl} \qquad (8.3)$$

Une nouvelle notation de ces distorsions peut être introduite, qui permet de séparer les contributions de déformation plastique des contributions de déformation élastique et anélastique

$$\vec{\beta}_i \rightarrow \vec{\beta}_i + \vec{\beta}_i^{\,pl} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an} \qquad (8.4)$$

Les équations topologiques pour les distorsions par déformation, qui s'écrivaient

$$\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0 \qquad (8.5)$$

peuvent maintenant s'écrire, avec la notation qui vient d'être introduite, sous la forme

$$\frac{d\vec{\beta}_i^{pl}}{dt} = -\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i \qquad \text{et} \qquad -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i^{\,pl} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i \tag{8.6}$$

Ceci permet d'introduire, par analogie avec les équations de l'électromagnétisme, le concept de *densité tensorielle* $\vec{\lambda}_i$ *de charges,* responsable des distorsions plastiques, en supposant *à priori* la relation suivante de définition de $\vec{\lambda}_i$ à partir du tenseur de distorsion plastique $\vec{\beta}_i^{\,pl}$

$$\vec{\lambda}_i = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i^{\,pl} \tag{8.7}$$

ainsi que le concept de *flux tensoriel* $\vec{J}_i$ *de charges,* responsable de la variation temporelle des distorsions plastiques, en supposant *à priori* la relation suivante de définition de $\vec{J}_i$ à partir de la dérivé temporelle $d\vec{\beta}_i^{pl} / dt$ du tenseur de distorsion plastique $\vec{\beta}_i^{\,pl}$

$$\vec{J}_i = \frac{d\vec{\beta}_i^{pl}}{dt} \tag{8.8}$$

Il faut noter ici que le concept de flux de charges est défini comme *un flux par rapport au réseau*, car $\vec{J}_i$ est déduit de la dérivé particulaire de $\vec{\beta}_i^{\,pl}$, c'est-à-dire de la dérivé temporelle de $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ prise *le long de la trajectoire du réseau solide*.

L'introduction de ces nouveaux tenseurs de densité et de flux de charges n'est pas gratuite, car ceux-ci répondent au mieux à l'exigence de trouver une façon d'exprimer la présence de distorsions plastiques dans un solide de sorte à ce qu'il soit possible de tenir compte de l'état microscopique du réseau des défauts de structure du solide. Il se vérifiera d'ailleurs *à posteriori*, lors de l'interprétation de ces tenseurs au prochain chapitre, que cette manière de procéder est effectivement judicieuse. Avec cette approche des phénomènes de plasticité par les tenseurs $\vec{J}_i$ et $\vec{\lambda}_i$, les équations topologiques décrivant la géométrocinétique et la géométrocompatibilité d'un solide élastique, anélastique et plastique s'écrivent maintenant

$$\begin{cases} \vec{J}_i = -\dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i \\ \vec{\lambda}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i \end{cases} \tag{8.9}$$

dans lesquelles le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an}$ représente à la fois les distorsions par élasticité et par anélasticité.

A partir de ce nouveau tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$, on peut déduire les autres tenseurs de distorsions en admettant toujours l'hypothèse $\tau^{an} \equiv 0$ *(5.55)* et les relations de décomposition *(5.60)*

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{él} + \vec{\beta}_i^{an} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) \\ \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = \vec{\omega}^{(\delta)} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) \\ \tau = \sum_k \vec{\beta}_k \vec{e}_k = \sum_k \vec{\beta}_k^{(\delta)} \vec{e}_k = \tau^{él} \qquad (\tau^{an} \equiv 0 \ \textit{par hypothèse}) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\varepsilon}_i^{él} + \vec{\varepsilon}_i^{an} \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau \vec{e}_i = \vec{\alpha}_i^{él} + \vec{\alpha}_i^{an} \end{cases} \tag{8.10}$$

Cette nouvelle version des tenseurs topologiques de distorsion et des équations géométrocinétiques n'est en fait rien d'autre qu'un simple changement de terminologie pour les distorsions plastiques, basé sur une analogie avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Trou-

ver toutes les potentialités que contient cette formulation des équations topologiques fera donc l'objet de la suite de ce chapitre.

La densité tensorielle de charges de dislocation

En reprenant les relations *(3.35)* et *(3.36)* en présence de charges plastiques $\vec{\lambda}_i$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{u}_B - \vec{u}_A = \oint_{\boldsymbol{C}} \delta\vec{u} = -\sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\beta}_k \, d\vec{S} = -\sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_k \, d\vec{S} \neq 0 \qquad (8.11)$$

il apparaît un vecteur $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{u}_B - \vec{u}_A \neq 0$ de défaut de fermeture du champ de déplacement pris sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du milieu (figure 3.5). La différentielle $\delta\vec{u}$ n'est donc plus une différentielle totale, mais *une forme différentielle de Pfaff*, qui n'a de signification que sous forme locale et différentielle, où elle représente une translation élémentaire associée aux déformations et rotations élastiques et anélastiques.

L'intégrale sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$ a comme résultat l'existence d'une grandeur $\vec{\boldsymbol{B}}$, qu'on appelle *vecteur de Burgers*[2] *macroscopique* défini sur le contour $\boldsymbol{C}$, et qui correspond à la translation macroscopique nécessaire à accommoder le milieu à la présence des charges de densité $\vec{\lambda}_i$, afin d'assurer la compatibilité des déformations et rotations totales (l'absence de vides et de recouvrements de matière au sein du solide).

La discontinuité $\vec{\boldsymbol{B}}$ est appelée une *dislocation macroscopique* du solide, au sens de Volterra, et on nommera par conséquent *densité de charges de dislocation* la densité tensorielle de charges $\vec{\lambda}_i$ responsables des distorsions plastiques.

La réalisation de dislocations macroscopiques

On réalise une telle dislocation macroscopique dans un solide continu en coupant localement ce solide et en déplaçant parallèlement l'une par rapport à l'autre les deux mâchoires de la coupure, avant de les recoller. Ce processus est illustré schématiquement à la figure 8.2a à l'aide d'un tuyau de matière qu'on coupe selon le plan $\boldsymbol{abcd}$ et qu'on recolle après glissement parallèle des interfaces dans la direction de la coupure. Il apparaît alors une *singularité topologique unidimensionnelle* du champ de distorsion localisée sur l'axe $\boldsymbol{cd}$. Cette singularité macroscopique, caractérisée par un vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ de translation parallèle à la ligne de singularité, est appelée *dislocation vis*.

Par contre, si on recolle les deux mâchoires par translation parallèle des mâchoires, perpendiculairement au plan de la coupure, et avec addition ou soustraction d'un parallélépipède de matière (figure 8.2b), il apparaît une autre singularité topologique unidimensionnelle du champ de distorsion, localisée sur l'axe $\boldsymbol{cd}$. Cette singularité macroscopique, caractérisée par un vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ de translation perpendiculaire à la ligne de singularité, est appelée *dislocation coin*. Une autre façon de procéder pour réaliser une dislocation de type coin, mais sans addition ou soustraction de matière, est de recoller les deux mâchoires après translation parallèle des mâchoires dans le plan de la coupure, perpendiculairement à la direction de la coupure, comme le montre la figure 8.3. Sous la condition *sine qua non* que l'expansion volumique élastique τ du milieu soit restée nulle au cours du processus de déformation plastique, le vecteur de Burgers

---

[2] *J. M. Burgers, Proc. Kon. Ned. Akad. Weten, vol.42, p. 293, 378, 1939*

$\vec{B}$, obtenu par l'intégrale *(8.11)* sur un contour C entourant la singularité correspond exactement à la translation macroscopique qu'a subie la mâchoire $abcd$.

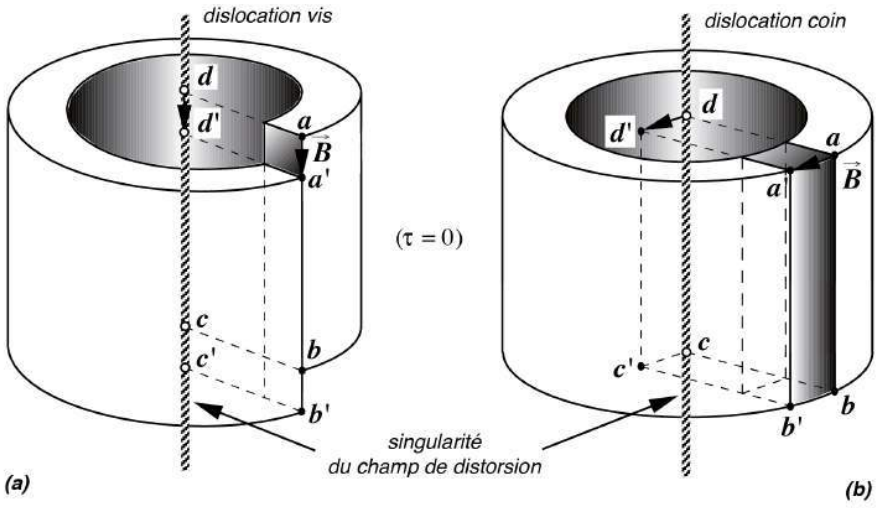


Figure 8.2 - *réalisation de dislocations vis* ***(a)*** *et coin* ***(b)*** *par découpage et recollage*

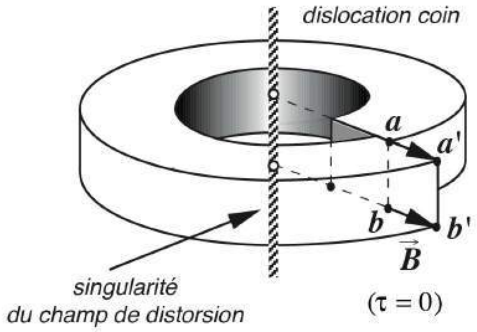


Figure 8.3 - *autre réalisation dune dislocation coin par découpage et recollage*

On peut aussi imaginer qu'au sein d'un continu solide on découpe un vide de matière en forme de tore, comme illustré par la coupe représentée à la figure 8.4a, puis qu'on coupe le plan médian situé au centre du tore. Les deux mâchoires ab et $a'b'$ ainsi formées peuvent alors être déplacées l'une par rapport à l'autre, puis recollées.

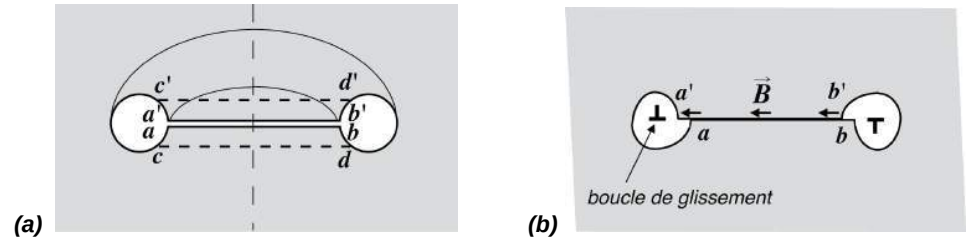


Figure 8.4 - *découpage initial d'un tore et de son plan médian pour former des boucles* ***(a)*** *et réalisation d'une boucle de dislocation par glissement des mâchoires* ***(b)***

Le premier cas possible est de déplacer les deux mâchoires parallèlement au plan de coupure d'une distance $\vec{B}$ comme illustré à la figure 8.4b. Après recollage, le milieu se trouve déformé par des cisaillements et le tore contient une *dislocation macroscopique de type boucle de glissement*, composée de portions de dislocation coin, vis et mixte.
On peut aussi insérer de la matière additionnelle sous forme d'un disque mince d'épaisseur $\vec{B}$ entre les deux mâchoires et souder ce disque aux deux mâchoires (figure 8.5a). On obtient alors une déformation du milieu responsable de toute évidence d'une courbure du milieu de part et d'autre du tore. Quant au tore, il est le siège d'une *dislocation macroscopique, de type boucle prismatique*. Dans ce cas, la boucle prismatique est dite *interstitielle*, car elle contient de la matière additionnelle, et elle est composée d'une seule dislocation coin qui se referme sur elle-même.

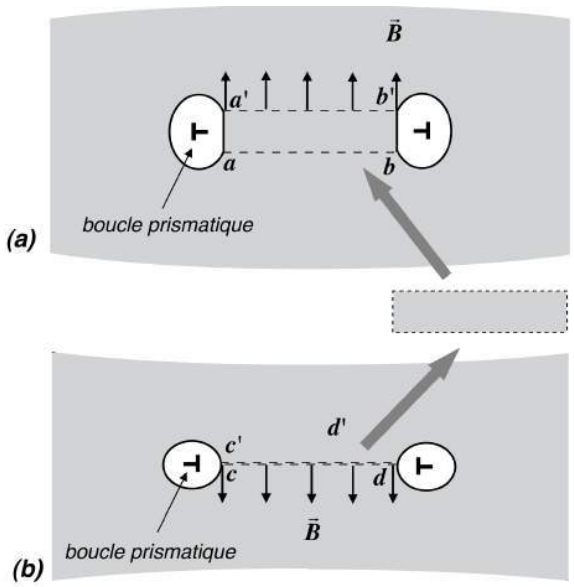


Figure 8.5 - *réalisation de boucles prismatiques de dislocation par addition* ***(a)*** *ou soustraction* ***(b)*** *de morceaux de milieu*

Un cas très similaire est obtenu si, au lieu d'ajouter un disque de matière, on soustrait un disque de matière d'épaisseur $\vec{B}$, comme illustré à la figure 8.5b. On obtient aussi une *dislocation macroscopique, de type boucle prismatique*, mais cette boucle est dite *lacunaire*, car il y manque une certaine quantité de matière. Au sein du tore, on retrouve aussi une seule dislocation coin qui se referme sur elle-même.
Toutes les singularités ainsi obtenues sont évidemment responsables d'un champ de distorsion au sein du solide. Par conséquent, elles nécessitent une énergie de formation non nulle. Elles sont stabilisées au sein du solide par le recollage des deux mâchoires de la coupure, donc par les liaisons au sein du solide.

L'équation de conservation de la densité de charges de dislocation

On remarquera que la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation est liée au rotationnel de $\vec{\beta}_i$, de sorte qu'elle satisfait la relation

$$\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i = 0 \qquad (8.12)$$

que nous appellerons *l'équation de conservation des charges de dislocation*, équation qui sera appelée par la suite à jouer un rôle considérable dans l'interprétation topologique des charges de dislocation.

L'équation de continuité reliant la densité au flux de charges de dislocation

Les équations topologiques *(8.9)* peuvent encore être modifiées en prenant le rotationnel de l'équation géométrocinétique et la dérivé temporelle de l'équation de géométrocompatibilité

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{J}_i = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} \qquad \textit{et} \qquad \frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right) \qquad (8.13)$$

De ces deux relations, on obtient

$$\frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}\right)\right] - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{J}_i \qquad (8.14)$$

qui n'est rien d'autre que *l'équation de continuité* pour la densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation. En effet, le terme entre crochet, à savoir le commutateur spatio-temporel de $\vec{\beta}_i$, y représente un terme de *source de charges de dislocation*. Dans le cas où ce commutateur est nul, l'équation *(8.14)* relie alors directement la variation de la densité de charges $\vec{\lambda}_i$ le long de la trajectoire du solide au rotationnel du flux de charges $\vec{J}_i$ par rapport au réseau, ce qui est bien la caractéristique d'une équation de continuité, dans le cas d'une *densité tensorielle* de charges. On en conclue que le flux tensoriel $\vec{J}_i$ n'est rien d'autre que le *flux de charges de dislocation*.

La densité scalaire de charges de rotation

L'équation *(8.9)* de compatibilité pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$, à savoir $\vec{\lambda}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i$ permet de déduire immédiatement, en calculant sa trace, une équation de compatibilité pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$

$$\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\vec{\lambda}_k = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k = \mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (8.15)$$

En introduisant une *densité scalaire* λ *de charges,* responsable des rotations plastiques au sein du solide et définie à partir de la trace du tenseur de densité de charges de dislocation $\vec{\lambda}_i$

$$\lambda = -\mathrm{div}\,\vec{\omega}^{pl} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\vec{\lambda}_k \qquad (8.16)$$

l'équation de compatibilité pour le vecteur $\vec{\omega}$ des rotations élastique et anélastique devient

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\vec{\lambda}_k = \mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (8.17)$$

On constate que cette densité scalaire de charges nous permet d'écrire

$$\oiint_S \omega_\perp\, dS = \oiint_S \vec{\omega}\, d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\omega}\, dV = \iiint_V \lambda\, dV \neq 0 \qquad (8.18)$$

Ainsi, la présence localisée d'une densité scalaire λ de charges fait apparaître une divergence du champ de rotation autour de cette charge. C'est pourquoi nous donnerons au scalaire λ le patronyme de *densité de charges de rotation.*
A noter que l'équation reliant le vecteur rotation $\vec{\omega}$ à la densité λ de charges de rotation est du même ordre tensoriel et présente une forte analogie avec l'équation de Maxwell $\rho = \mathrm{div}\,\vec{D}$ reliant le champ de déplacement électrique $\vec{D}$ à la densité de charge électrique ρ.

Le flux vectoriel des charges de torsion

Les propriétés de décomposition des tenseurs de distorsion peuvent aussi être utilisées pour déduire l'équation géométrocinétique pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$. L'opération consistant à ne prendre que la partie anti-symétrique de l'équation géométrocinétique *(8.9)* conduit à la relation

$$-\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \left(-\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_k \right) = -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (8.19)$$

En introduisant dans cette relation un *flux vectoriel* $\vec{J}$ *de charges,* responsable de la variation temporelle des distorsions plastiques par rotation, ou tout simplement un *flux de charges de rotation,* défini par rapport au réseau et à partir de la partie antisymétrique du tenseur de flux de charges de dislocation par la relation

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\omega}^{pl}}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k \qquad (8.20)$$

l'équation géométrocinétique pour le vecteur des rotations élastique et anélastique $\vec{\omega}$ en présence de charges de rotation devient

$$\vec{J} = -\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \qquad (8.21)$$

Cette équation reliant le vecteur $\vec{\omega}$ au vecteur de flux $\vec{J}$ de charges de rotation est du même ordre tensoriel et présente une forte analogie avec l'équation de Maxwell $\vec{j} = -\partial\vec{D}/\partial t + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H}$ reliant le champ de déplacement électrique $\vec{D}$ au flux de charge électrique $\vec{j}$.

L'équation de continuité des charges de rotation

Quant à l'*équation de continuité des charges de rotation*, il suffit de combiner la divergence de l'équation *(8.21)* avec la dérivé particulaire de l'équation *(8.17)* pour l'obtenir

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\mathrm{div}\,\vec{\omega}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \right] - \mathrm{div}\,\vec{J} \qquad (8.22)$$

dans laquelle, comme précédemment, il apparaît une *source de charges de rotation* égale au commutateur spatio-temporel de $\vec{\omega}$.
On peut vérifier que cette équation de continuité représente aussi la moitié de la trace de l'équation de continuité *(8.14)* pour les charges de dislocation, à savoir

$$\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \frac{d\vec{\lambda}_k}{dt} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_k\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} \right) \right] - \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{J}_k \qquad (8.23)$$

Tableau 8.1 - Distorsions et charges de dislocation dans un solide

Tenseurs de distorsions élastique et anélastique

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{\acute{e}l} + \vec{\beta}_i^{an} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) & (1) \\ \vec{\omega} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = \vec{\omega}^{(\delta)} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{\acute{e}l} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) & (2) \\ \tau = \sum_k \vec{\beta}_k \vec{e}_k = \sum_k \vec{\beta}_k^{(\delta)} \vec{e}_k = \tau^{\acute{e}l} \quad (\tau^{an} \equiv 0 \text{ par hypothèse}) & (3) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\varepsilon}_i^{\acute{e}l} + \vec{\varepsilon}_i^{an} & (4) \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\tau \vec{e}_i = \vec{\alpha}_i^{\acute{e}l} + \vec{\alpha}_i^{an} & (5) \end{cases}$$

Géométrocinétique des distorsions,
flux de charges de dislocation, flux de charges de rotation, et source de sites de réseau

$$\begin{cases} \vec{J}_i = -\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i & (6) \\ \vec{J} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = -\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\phi} & (7) \\ \frac{S_n}{n} = \sum_k \vec{e}_k \vec{J}_k = -\frac{d\tau}{dt} + \text{div}\,\vec{\phi} & (8) \end{cases}$$

Géométrocompatibilité des distorsions
et densités de charges de dislocation, de flexion et de rotation

$$\begin{cases} \vec{\lambda}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i & (9) \\ \vec{\lambda} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\beta}_k & (10) \\ \lambda = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{\lambda}_k = \text{div}\,\vec{\omega} & (11) \end{cases}$$

Equations de conservation et de continuité des charges de dislocation et de rotation

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{\lambda}_i = 0 & (12) \\ \frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}\right)\right] - \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{J}_i & (13) \\ \frac{d\lambda}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\text{div}\,\vec{\omega}\right) - \text{div}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\right] - \text{div}\,\vec{J} & (14) \end{cases}$$

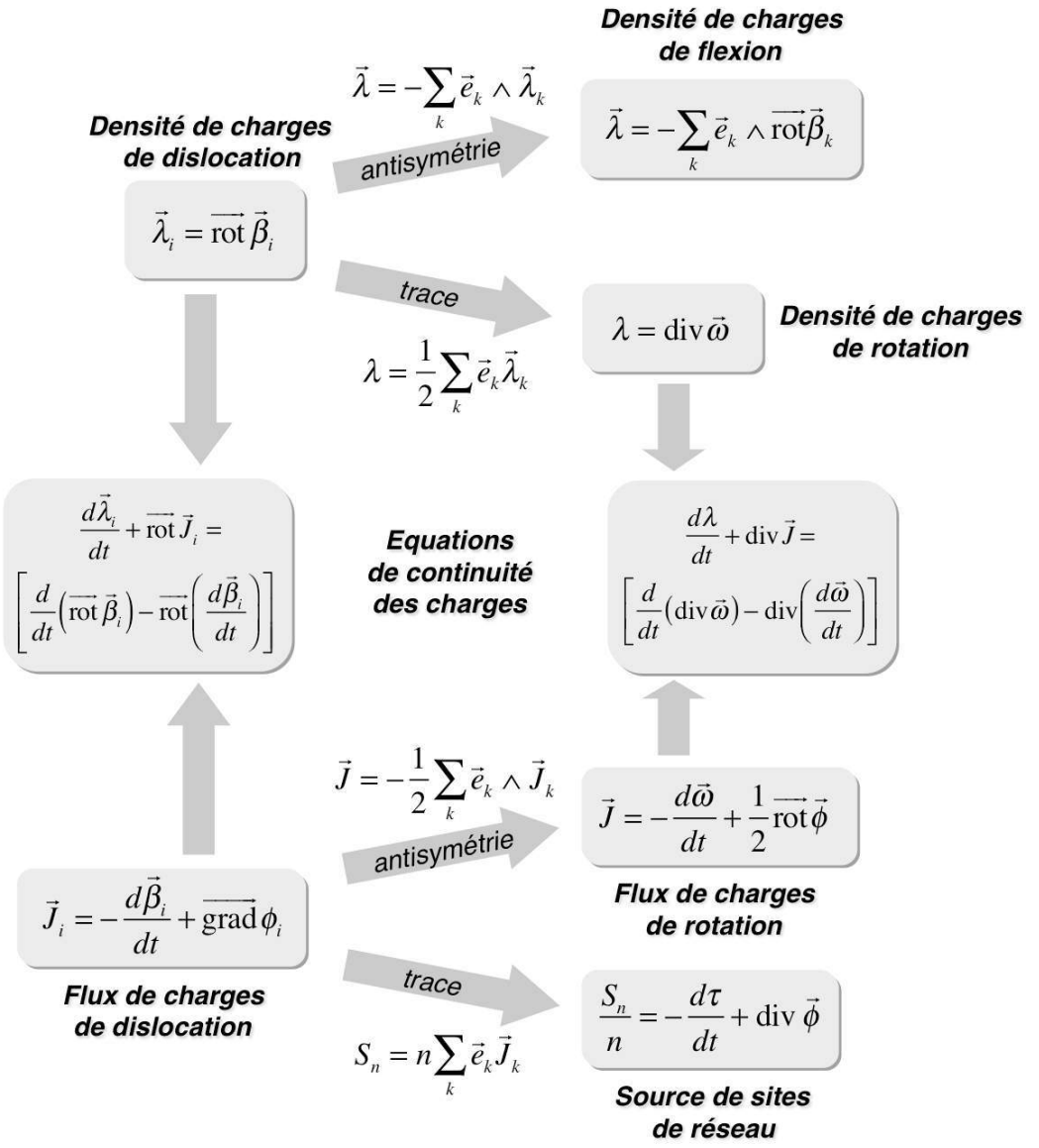


Figure 8.6 *- décompositions des densités et flux de charges et équations de continuité*

La source scalaire de sites de réseau

L' opération consistant à prendre la trace de l'équation géométrocinétique *(8.9)*

$$\sum_k \vec{e}_k \vec{J}_k = \sum_k \vec{e}_k \left(-\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_k \right) = -\frac{d\tau}{dt} + \text{div}\,\vec{\phi} \qquad (8.24)$$

fait apparaître un scalaire correspondant à la *trace du flux* $\vec{J}_i$ *de charges de dislocation*.
En utilisant la relation *(5.64)*, ce scalaire apparaît explicitement comme la *source volumique* S_n *de sites de réseau*, liée à la trace du tenseur de flux de charges de dislocation par la relation

$$S_n = n\frac{d\tau^{pl}}{dt} = n\sum_k \vec{e}_k \vec{J}_k \qquad (8.25)$$

Tout se passe en fait comme si le flux $\vec{J}_i$ de charges de dislocation laissait effectivement *«une*

trace» de son passage au sein du solide sous la forme de création ou d'annihilation de sites de réseau. On écrira donc l'équation géométrocinétique pour le scalaire d'expansion volumique élastique $\tau = \tau^{él}$ (par hypothèse $\tau^{an} \equiv 0$) sous la forme

$$\frac{S_n}{n} = -\frac{d\tau}{dt} + \operatorname{div} \vec{\phi} \qquad (8.26)$$

Dans le tableau 8.1, on a reporté l'ensemble des relations concernant les distorsions et les densités et flux de charges de dislocation (ou charges de distorsions plastiques) dans un solide, et à la figure 8.6, on schématise l'ensemble des opérations qui permettent, à partir de la géométrocompatibilité et de la géométrocinétique de $\vec{\beta}_i$, de déduire cet ensemble d'équations de compatibilité, de géométrocinétique et de continuité des charges de dislocation.

8.2 - Concept macroscopique de charges de contorsion plastique

Dans un milieu déformé élastiquement et anélastiquement, avec des charges de dislocation, on peut aussi exprimer les tenseurs des contorsions élastiques et anélastiques $\vec{\chi}_i$.

La densité tensorielle de charges de contorsions plastiques du solide

Les relations du tableau 3.1 montrent que les expressions du tenseur $\vec{\chi}_i$ à partir du champ de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ ou à partir des champs de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ et d'expansion volumique τ ne sont pas modifiées, mais que, par contre, son expression à partir du champ des rotations élastiques et anélastiques $\vec{\omega}$ doit faire appel aux tenseurs de densité de charges $\vec{\lambda}_i$ et λ. Il vient donc pour $\vec{\chi}_i$ en présence de charges de dislocation

$$\vec{\chi}_i = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega_i + \left[\vec{\lambda}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\lambda \qquad (8.27)$$

La *densité tensorielle* $\left[\vec{\lambda}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\lambda$ *de charges* qui apparaît ici est donc responsable des contorsions plastiques du solide, de sorte que nous l'appellerons *densité de charges de contorsion.* Elle peut s'écrire sous les formes suivantes

$$\left[\vec{\lambda}_i\right]^{\mathrm{T}} - \vec{e}_i\lambda = \vec{\lambda}_i + \vec{e}_i \wedge \left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) - \vec{e}_i\lambda = \vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda \qquad (8.28)$$

Le tenseur de contorsion dans un solide chargé peut donc s'écrire

$$\vec{\chi}_i = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\tau = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega_i + \left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) \qquad (8.29)$$

La densité tensorielle de charges de désinclinaison

L'équation de compatibilité du tableau 8.5 pour les contorsions élastiques et anélastiques est elle aussi modifiée en présence de charges plastiques, et s'écrit

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{e}_i\tau\right) \qquad (8.30)$$

qui se présente sous une forme analogue à l'équation de compatibilité obtenue pour les distorsions élastiques et anélastiques.

Cette relation fait apparaître une nouvelle *densité tensorielle de charges* $\vec{\theta}_i$

$$\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{\lambda} + \left(\vec{e}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} + \vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\lambda \qquad (8.31)$$

Comme cette densité de charges est égale au rotationnel de $\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda$, elle satisfait évidemment la relation

$$\mathrm{div}\vec{\theta}_i = \mathrm{div}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right)\right] \equiv 0 \qquad (8.32)$$

que nous appellerons *équation de conservation* de ces charges tensorielles.

En reprenant les relations *(3.38)* et *(3.40)* en présence de ces charges

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \oint_{\boldsymbol{C}} \delta\vec{\omega}^{\varepsilon} = \sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\chi}_k\, d\vec{S} = \sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\theta}_i\, d\vec{S} = \sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_k - \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_k\lambda\right) d\vec{S} \neq 0 \qquad (8.33)$$

il apparaît un vecteur $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \vec{\omega}_B^{\varepsilon} - \vec{\omega}_A^{\varepsilon} \neq 0$ de défaut de fermeture du champ de rotation par déformation pris sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$ au sein du milieu (fig. 3.7). La différentielle $\delta\vec{\omega}^{\varepsilon}$ n'est plus une différentielle totale, mais *une forme différentielle de Pfaff*, qui n'a de signification que sous forme locale et différentielle, où elle représente une rotation élémentaire associée aux déformations et rotations élastiques et anélastiques.

Il est encore possible de transformer l'intégrale sur la surface $\boldsymbol{S}$ en une intégrale sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$, sous la forme

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \oint_{\boldsymbol{C}} \delta\vec{\omega}^{\varepsilon} = \sum_k \vec{e}_k \iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\chi}_k\, d\vec{S} = \sum_k \vec{e}_k \oint_{\boldsymbol{C}} \left(\vec{\lambda}_k - \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_k\lambda\right) d\vec{r} \neq 0 \qquad (8.34)$$

Ainsi, l'intégrale de la *densité* $\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right)$ *de charges de contorsion* sur un contour fermé $\boldsymbol{C}$ a comme résultat l'existence d'une grandeur angulaire macroscopique $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ non nulle, qu'on appelle un *vecteur de Frank* [3] *macroscopique* défini sur le contour $\boldsymbol{C}$, et qui correspond à la rotation macroscopique nécessaire à accommoder le milieu à la présence des charges plastiques.

Cette discontinuité $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ est appelée une *désinclinaison macroscopique* du solide (*disclination* [3] en anglais*)*, au sens des défauts macroscopiques de Volterra. A partir de la relation *(18.33)* , il est maintenant possible de donner une interprétation à la densité tensorielle de charges $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right)$. En effet, comme l'intégrale sur la surface $\boldsymbol{S}$ de cette densité de charge fournit le vecteur de Frank macroscopique d'une désinclinaison, on l'appellera la *densité* $\vec{\theta}_i$ *de charges de désinclinaison*.

La réalisation de désinclinaisons macroscopiques

Il est simple d'imaginer la réalisation d'une désinclinaison à l'échelle macroscopique dans un milieu continu solide en coupant localement ce solide et en tournant l'une par rapport à l'autre les deux mâchoires de la coupure, avant de les recoller ensemble. Ce processus est illustré schématiquement à la figure 8.7 à l'aide d'un tuyau de matière qu'on coupe selon le $\boldsymbol{abcd}$ et qu'on recolle de deux manières différentes:

- soit par cisaillement du plan $\boldsymbol{a'b'cd}$ d'une des mâchoires sans addition ou soustraction de matière (figure 19.3a), ce qui conduit à une *singularité topologique unidimensionnelle* située sur l'axe $\boldsymbol{cd}$, appelée *désinclinaison vis (*en anglais *twist disclination* [3]*)*,
- soit par rotation d'une des interfaces autour de l'arrête $\boldsymbol{cd}$ avec addition ou soustraction de

[3] *R. DeWit, «Theory of disclinations II, III and IV», J. of the Nat. Bureau of Standards A, vol. 77A, p. 49-100, p. 359-368, and p. 607-658, 1973*

matière (figure 19.3b), ce qui conduit à une singularité topologique unidimensionnelle située sur l'axe cd , appelée *désinclinaison coin (*en anglais *wedge disclination [3])*.

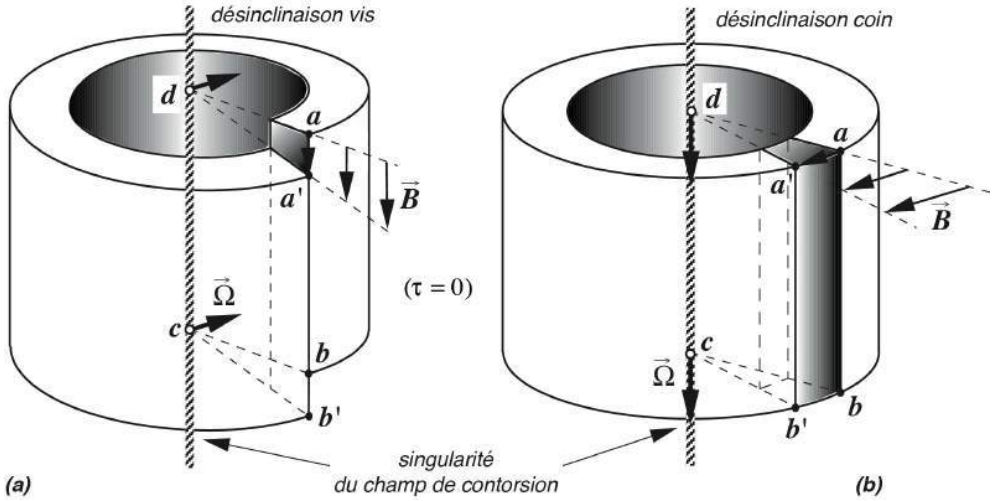


Figure 8.7 - *réalisation de désinclinaisons vis* ***(a)*** *et coin* ***(b)*** *par découpage et recollage*

Sous la condition que l'expansion volumique élastique τ du milieu soit restée nulle au cours du processus de déformation plastique, le vecteur $\vec{\Omega}$, obtenu par l'intégrale *(8.34)* sur un contour C entourant la singularité, correspond alors exactement à la rotation macroscopique qu'a subie la mâchoire $a'b'cd$. Comme le vecteur $\vec{\Omega}$ doit rester constant si on varie le diamètre du contour d'intégration C ou si on déplace ce contour verticalement, on déduit que les charges de désinclinaison doivent se trouver confiner au voisinage immédiat de l'axe cd du tuyau, et que leur densité tensorielle doit être une constante le long de cet axe.

Les singularités topologiques ainsi obtenues sont responsables d'un champ de distorsion au sein du solide. Par conséquent, elles nécessitent une énergie de formation non nulle. Elles sont stabilisées au sein du solide par le recollage des deux mâchoires de la coupure, donc par les liaisons au sein du solide.

En comparant les figures 8.2 et 8.7, on constate une ressemblance étonnante entre dislocations et désinclinaisons vis, ainsi qu'entre dislocations et désinclinaisons coins. Cette ressemblance n'est pas fortuite, puisque les opérations utilisées pour générer ces discontinuités sont très semblables. Il est intéressant de constater notamment que les désinclinaisons macroscopiques présentent aussi un vecteur déplacement $\vec{B}$ allant de a à a' (fig. 8.7), tout comme les dislocations macroscopiques (fig. 8.2). Cependant, ce vecteur $\vec{B}$, dans le cas des désinclinaisons, augmente linéairement avec le diamètre de la boucle d'intégration C qu'on utilise pour le calculer. Ceci signifie qu'en présence d'une désinclinaison macroscopique, associée à une densité de charges de désinclinaison répartie le long de l'axe cd du tuyau, il doit aussi exister une densité de charges de dislocation, comme le montre d'ailleurs bien le dernier terme de l'équation *(8.34)*. Mais celle-ci, au lieu d'être localisée sur l'axe cd du tuyau comme c'est le cas pour une dislocation macroscopique, va se trouver répartie de manière homogène sur une *surface* située dans le plan de coupure $abcd$ (fig. 8.7), de telle sorte que le vecteur de Burgers $\vec{B}$ augmente linéairement avec le diamètre de la boucle d'intégration C .

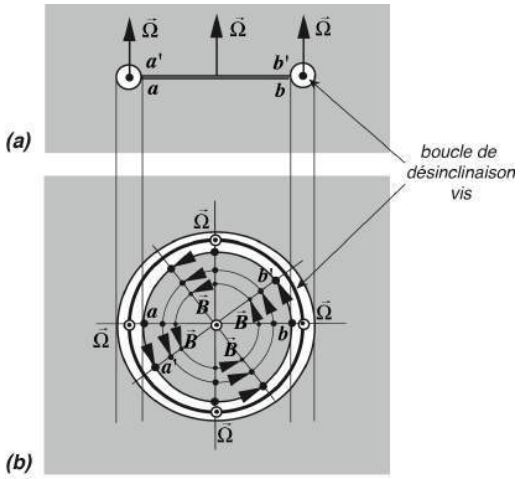


Figure 8.8 - *réalisation d'une boucle de désinclinaison vis par rotation des mâchoires*

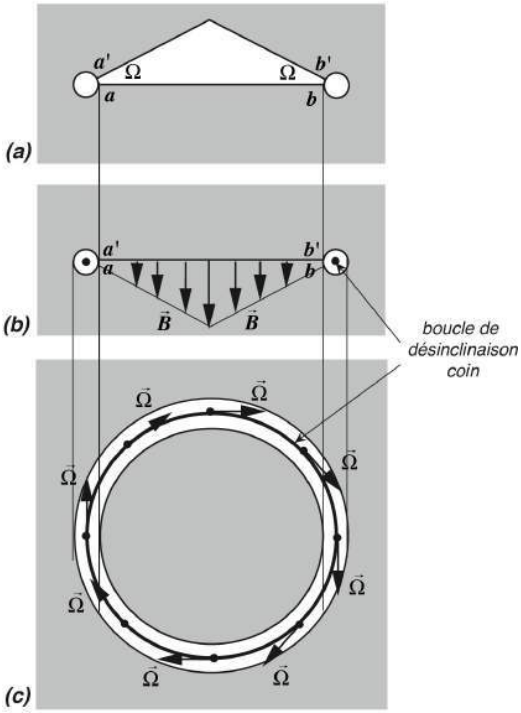


Figure 8.9 - *réalisation d'une boucle de désinclinaison coin par retrait (ou ajout) d'un morceau de milieu de forme conique*

On peut aussi procéder comme à la figure 8.4a, et déplacer les deux mâchoires parallèlement par une rotation $\vec{\Omega}$ de l'une par rapport à l'autre dans le plan de coupure, comme illustré à la figure 8.8a. Après recollage, le milieu se trouve déformé par la rotation $\vec{\Omega}$ et le tore contient alors une *boucle de désinclinaison macroscopique de type vis*.

A noter ici que le champ de déplacement du milieu de part et d'autre du plan de coupure est tangentiel à ce plan et que le vecteur curviligne de déplacement $\vec{B}$ sur le plan de coupure croît d'une valeur nulle au centre jusqu'à une valeur maximum sur les bords du tore. Au niveau du

tore, le champ de déplacement local $\vec{\boldsymbol{B}}$ ressemble à s'y méprendre au champ de déplacement d'une dislocation vis refermée sur elle-même, mais c'est en fait une *pseudo-dislocation* car le *vecteur de Burgers curviligne*, tangentiel à la ligne de dislocation, est non conservé [4] (fig. 8.8b). On pourrait aussi enlever un morceau de milieu au centre du tore, de forme lenticulaire ou conique et d'angle Ω à la base, comme illustré à la figure 8.9a. En ce cas, le plan de recollage présente un champ de déplacement local $\vec{\boldsymbol{B}}$ correspondant à des vecteurs de Burgers perpendiculaires dont les longueurs présentent une symétrie circulaire (fig. 8.9b). Au niveau du tore, la déformation requise pour le recollage est une rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ tangentielle au tore, qui correspondrait donc à une *boucle de désinclinaison macroscopique de type coin*, mais qui est en fait une *pseudo-désinclinaison* puisque le vecteur de Frank, toujours tangentiel à la ligne de désinclinaison, est non conservé le long de la ligne (figure 8.9c).

La densité vectorielle de charges de flexion

Quant au vecteur de flexion $\vec{\chi}$ dû aux flexions élastiques et anélastiques, il n'est pas modifié lorsqu'il est exprimé en fonction du champ de déformation $\vec{\varepsilon}_i$ ou en fonction des champs de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ et d'expansion volumique τ, alors que son expression à partir du vecteur des rotations élastiques et anélastiques $\vec{\omega}$ dépend d'un nouveau vecteur $\vec{\lambda}$ correspondant à la partie anti-symétrique du tenseur $\vec{\lambda}_i$ de densité de charges de dislocation

$$\begin{aligned}\vec{\chi} &= \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau \\ &= \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} - \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \vec{\lambda}\end{aligned} \qquad (8.35)$$

On en déduit l'interprétation de ce vecteur $\vec{\lambda}$ qui n'est rien d'autre que la *densité de charges de flexion,* donnée à partir de la densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation par la relation

$$\vec{\lambda} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\beta}_k \qquad (8.36)$$

Des équations *(8.29)* et *(8.35),* on déduit que les contorsions $\vec{\chi}_i$ et les flexions $\vec{\chi}$, associées aux déformations élastiques et anélastiques $\vec{\varepsilon}_i$ du réseau, ne peuvent plus être déduites directement des rotations élastiques et anélastiques $\vec{\omega}$, puisqu'il se rajoute des termes dépendant des densités de charges $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ et λ.

La densité scalaire de charges de courbure

L'équation de compatibilité du tableau 3.1 pour les courbures élastiques et anélastiques est elle aussi modifiée en présence de charges plastiques, et s'écrit

$$\mathrm{div}\,\vec{\chi} = -\sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\Delta\tau = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}_k \qquad (8.37)$$

Cette relation montre qu'il est possible d'introduire un nouvelle *densité scalaire* θ *de charges,* responsable de contorsions plastiques par flexions du solide, définie à partir de la divergence de la densité vectorielle de charges de flexion $\vec{\lambda}$

---

[4] *W. Huang, T. Mura, Elastic J. of Applied Physics, vo. 41(13), p. 5175, 1970; A. Unzicker, arXiv:gr-qc/0011064, 2000; A. Unzicker, arXiv:gr-qc/9612061v2, 2010*

$$\theta = \mathrm{div}\,\vec{\lambda} = -\mathrm{div}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}_k = -\sum_k \vec{e}_k \vec{\theta}_k \qquad (8.38)$$

On remarquera que cette densité de charges θ peut aussi être reliée directement à la trace de la densité de charges de désinclinaison $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right)$, ce qui se vérifie aisément à partir de la relation *(8.31).*

L'équation de géométrocompatibilité *(8.37)* pour le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ est de forme analogue à celle obtenue pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, et va jouer par la suite un rôle considérable. On peut maintenant l'écrire

$$\theta = -\sum_k \vec{e}_k \vec{\theta}_k = \mathrm{div}\,\vec{\lambda} = \mathrm{div}\,\vec{\chi} \qquad (8.39)$$

D'après la figure 3.8, cette densité scalaire θ de charges plastiques nous permet d'écrire

$$\iiint_V \theta\, dV = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\lambda}\, dV = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\chi}\, dV = \oiint_S \vec{\chi}\, d\vec{S} = \oiint_S \chi_\perp\, dS \neq 0 \qquad (8.40)$$

Ainsi, la présence localisée d'une densité scalaire $\theta = \mathrm{div}\,\vec{\lambda}$ de charges plastiques fait apparaître une *divergence du champ de flexion* entourant cette charge, donc une *«courbure» divergente* du réseau solide autour de la charge. C'est pourquoi nous qualifierons le scalaire θ de *densité de charges de courbure*.

A partir de l'équation *(8.35),* on peut aussi déduire le rotationnel du champ de flexion $\vec{\chi}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi} = -\sum_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right) = -\sum_k \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k\right) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda} \qquad (8.41)$$

et on constate qu'il dépend de la densité vectorielle de charges $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}$, qui représente donc la *densité de charges de flexions rotationnelles,* qui est à mettre sur pied d'égalité avec la densité de charges de flexions divergentes, à savoir la densité de charges de courbure $\theta = \mathrm{div}\,\vec{\lambda}$. Cependant, cette équation *(8.41)* se distingue de l'équation *(8.38)* de par le fait qu'elle n'a pas le statut d'équation de géométrocompatibilité, puisque le champ de rotation $\vec{\omega}$ y apparaît.

8.3 - Description topologique complète des solides chargés

Dans la figure 8.10, on a reporté l'ensemble des opérations qui permettent d'obtenir les tenseurs de distorsion et de contorsion régissant la topologie des solides chargés, ainsi que les équations de compatibilité que ces tenseurs doivent satisfaire. On y constate une très belle symétrie dans l'agencement des relations permettant de déduire les tenseurs de distorsion et de contorsion, ainsi que les équations de géométrocompatibilité. On a aussi fait apparaître le *tenseur de torsion* $\left[\vec{\chi}_i\right]^S$, et on montre facilement, à l'aide de *(18.29),* que ce tenseur s'exprime à partir du champ de rotation $\vec{\omega}$, et d'une *densité de charges de torsion* $\vec{\lambda}_i - \left(\vec{e}_i \wedge \vec{\lambda}\right)/2 - \vec{e}_i \lambda$.

Les différents tenseurs de densité de charge de dislocation et de charge de désinclinaison ne sont pas indépendants les uns des autres, puisque tous se déduisent du tenseur initial de densité de charges de dislocation $\vec{\lambda}_i$, comme le montre bien la figure 8.11.

En fait, *seules les deux densités scalaires* λ *et* $\theta = \mathrm{div}\,\vec{\lambda}$ sont *parfaitement indépendantes l'une de l'autre*, car la densité de charges de rotation λ est déduite à partir de la trace de $\vec{\lambda}_i$, trace qui n'intervient pas dans la densité de charges de courbure θ puisque celle-ci est déduite à partir de la partie anti-symétrique de $\vec{\lambda}_i$ par l'intermédiaire de la divergence. Cette indépen-

dance des charges scalaires λ *et* θ sera appelée à jouer un rôle important par la suite.

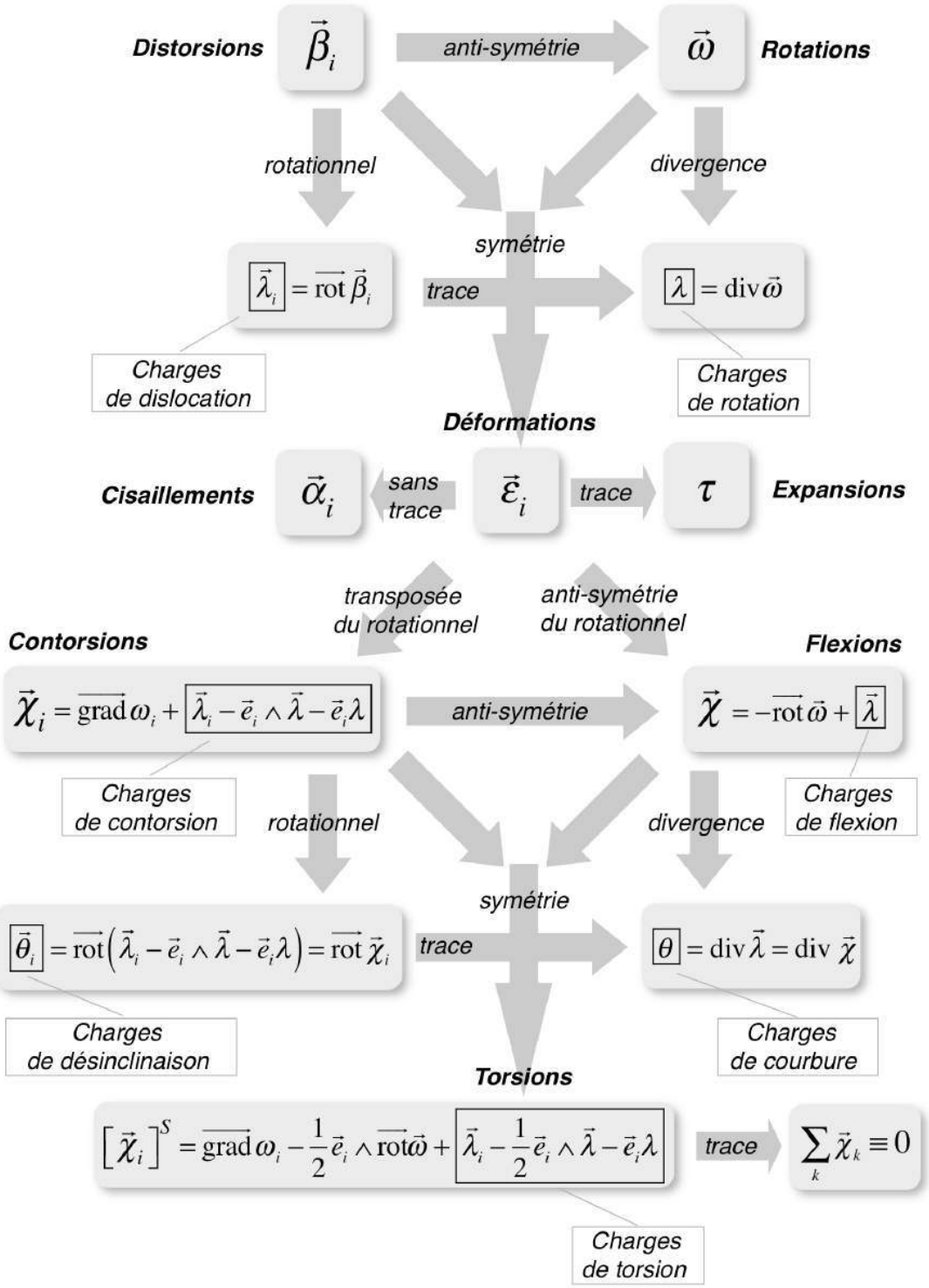


Figure 8.10 *- décompositions complètes des tenseurs de distorsion et de contorsion*

Symétrie du tenseur de densité de charges de désinclinaison

Il faut encore remarquer que *le tenseur* $\vec{\theta}_i$ *de densité de charges de désinclinaison est symé-*

trique. En effet, à partir de la relation *(8.31)* donnant le tenseur $\vec{\theta}_i$, et en utilisant l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_k \equiv 0$ des charges de dislocation, on montre que la partie anti-symétrique de $\vec{\theta}_i$ est identiquement nulle

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}_k - \vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\lambda} + \left(\vec{e}_k\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} + \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\lambda \right] =$$

$$\sum_{k,i} \left\{ \vec{e}_k \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\lambda}_k\right) - \vec{e}_k \wedge \left[\vec{e}_i \wedge \left(\vec{e}_k\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i \right] + \frac{1}{2}\vec{e}_k \wedge \left[\vec{e}_k \wedge \vec{\nabla}\left(\vec{e}_i\vec{\lambda}_i\right) \right] \right\} = \qquad (8.42)$$

$$\sum_k \left\{ \vec{\nabla}\left(\vec{e}_k\vec{\lambda}_k\right) - \left(\vec{e}_k\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_k - \left(\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_k\right)\vec{e}_k + \left(\vec{e}_k\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_k + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{e}_k\vec{\lambda}_k\right) - \frac{3}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{e}_k\vec{\lambda}_k\right) \right\} \equiv 0$$

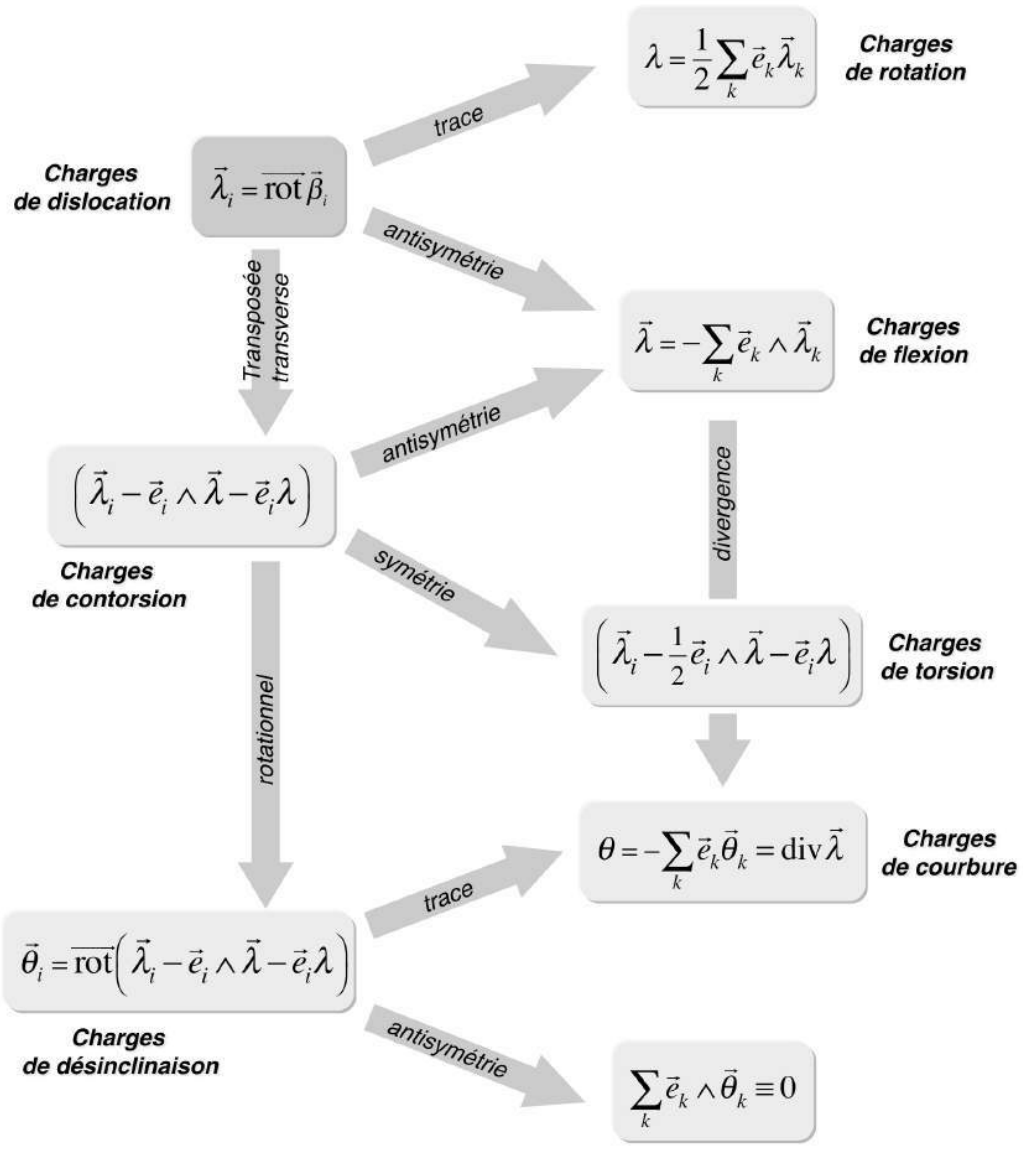


Figure 8.11 *- décompositions complètes des tenseurs de charges*

Pour terminer ce chapitre, toutes les relations concernant les contorsions et les charges de contorsion sont reportées dans le tableau 8.2.

Tableau 8.2 - Contorsions et charges de désinclinaison dans un solide

Tenseur transverse de contorsion et densité de charges de contorsion

$$\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\text{grad}}\,\omega_i + \left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) = \left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\text{T}} = \left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\text{T}} + \frac{1}{3}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau \quad (1)$$

Vecteur de flexion et densité de charges de flexion

$$\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\chi}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau = \sum_k \vec{e}_k \,\text{div}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} + \vec{\lambda} \quad (2)$$

Transversalité du tenseur de contorsion

$$\sum_k \vec{e}_k \vec{\chi}_k = \sum_k \vec{e}_k \left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k\right]^{\text{T}} = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k \equiv 0 \quad (3)$$

Tenseur symétrique transverse de torsion et densité de charges de torsion

$$\left[\vec{\chi}_i\right]^{\text{S}} = \vec{\chi}_i + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \vec{\chi} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\omega_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} + \left(\vec{\lambda}_i - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) = \left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\text{S}} = \left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\text{S}} \quad (4)$$

Géométrocompatibilité des contorsions et densité de charges de désinclinaison

$$\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\chi}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_i\right]^{\text{T}} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\alpha}_i\right]^{\text{T}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{e}_i\tau\right) \quad (4)$$

Symétrie du tenseur de densité de charges de désinclinaison

$$\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\theta}_k = \sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\lambda}_k - \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_k\lambda\right) = \sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\chi}_k \equiv 0 \quad (5)$$

Géométrocompatibilité des flexions et densité de charges de courbure

$$\theta = -\sum_k \vec{e}_k\vec{\theta}_k = \text{div}\,\vec{\lambda} = \text{div}\,\vec{\chi} = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varepsilon}_k = \sum_k \vec{e}_k \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\Delta\tau \quad (6)$$

Equation de conservation des charges de désinclinaison

$$\text{div}\,\vec{\theta}_i = \text{div}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right)\right] = 0 \quad (7)$$

Chapitre 9

Singularités topologiques associées aux charges

Comme la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation doit satisfaire une équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$, il lui est impossible d'apparaître sous forme ponctuelle. Elle doit par conséquent toujours occuper un *domaine de volume non nul* au sein du milieu solide. On traite donc mathématiquement les différentes topologies possibles de domaines chargés, à savoir les *cordes*, les *membranes*, les *boucles toriques* et les *amas*, en les illustrant par les singularités topologiques quantifiés, comme les *dislocations*, les *désinclinaisons* et les *boucles* qui apparaissent au sein d'un réseau structuré.

D'autre part, l'écriture de la densité tensorielle $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i\lambda\right)$ de charges de désinclinaison implique que l'apparition de désinclinaisons en un certain endroit d'un milieu solide est une conséquence directe de la présence en cet endroit de dislocations, de sorte qu'il ne peut pas exister de désinclinaisons isolées au sein d'un réseau.

Finalement, on montre que la densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charges de flexion, la densité scalaire λ de charges de rotation et la densité scalaire $\theta = \mathrm{div}\,\vec{\lambda}$ de charges de courbure sont les trois grandeurs fondamentales nécessaires et suffisantes pour décrire les effets à grande distance de singularités topologiques localisées au sein d'un réseau.

9.1 – Cordes et lignes de dislocation

Comme la densité de charges de distorsion $\vec{\lambda}_i$ est une grandeur tensorielle, les domaines de densité non nulle de charges doivent s'étendre dans l'espace, et leur topologie spatiale est astreinte à satisfaire l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$. Dans cette section, on va analyser une première topologie particulière de domaine de charges, à savoir les domaines tubulaires qu'on peut qualifier de *cordes*.

Les cordes de dislocation et leur densité de charge $\vec{\lambda}_i$

Supposons une région d'un réseau solide qui soit à peu près en expansion volumique τ homogène, c'est-à-dire dans laquelle les variations spatiales de l'expansion volumique τ sont très faibles. Cette hypothèse est celle qui s'applique toujours dans le cas des solides réels tels que les métaux. Mais supposons aussi que des rotations importantes soient possibles à grandes distances dans ce solide, ce qui est aussi parfaitement réalisable dans le cas des mêmes solides réels. S'il existe au sein de ce solide un domaine localisé sous forme de *corde*, donc de forme tubulaire, contenant une densité non nulle de charges de dislocation $\vec{\lambda}_i$, représenté à la figure 9.1 par une zone ombrée, il est possible de définir dans le référentiel $\boldsymbol{O}\xi_1\xi_2\xi_3$ du ***GO*** un volume $\boldsymbol{V}$ contenant partiellement ce domaine. L'intégrale sur le volume $\boldsymbol{V}$ de l'équation de

conservation de la densité tensorielle de charges peut se transformer en une intégrale sur la surface entourant le volume d'intégration

$$\iiint_{V} \operatorname{div} \vec{\lambda}_i \, dV = \oiint_{S} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S} \equiv 0 \qquad (9.1)$$

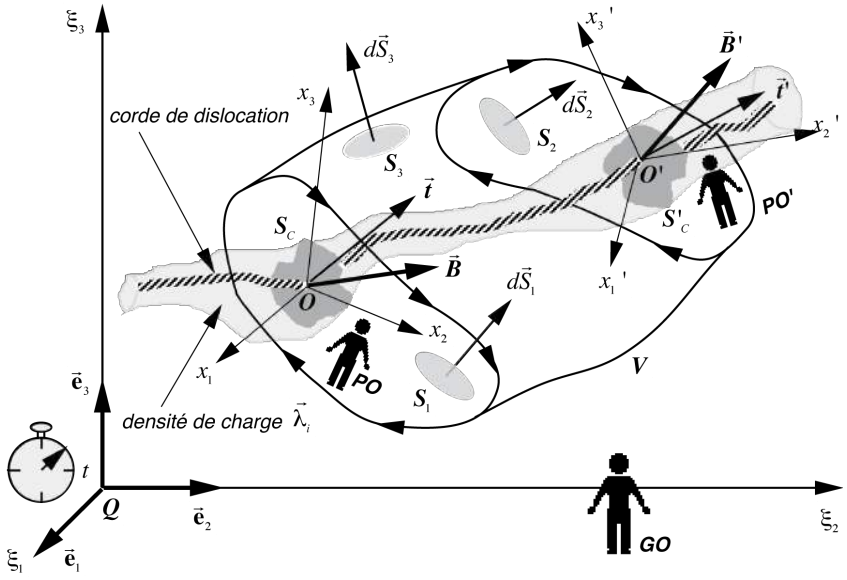


Figure 9.1 - *domaine tubulaire (corde) de densité de charges de distorsion non nulle*

Avec la géométrie décrite à la figure 9.1, la surface $\boldsymbol{S}$ peut se décomposer en une surface latérale $\boldsymbol{S}_3$, sur laquelle la densité de charges est nulle, et qui ne contribue donc pas à l'intégrale de surface, et deux surfaces $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ coupant le domaine de densité de charges non nulle, de sorte que l'intégrale curviligne de surface peut être décomposée en la différence des intégrales de surface sur $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$

$$\oiint_{S} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_2 - \iint_{S_1} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_1 \equiv 0 \qquad (9.2)$$

Les intégrales sur $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ peuvent être effectuées dans les référentiels locaux $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$ des observateurs ***PO*** et ***PO'*** respectivement. D'après la relation intégrale de compatibilité *(8.11),* ces intégrales représentent alors les projections du vecteur de Burgers sur les axes des référentiels locaux $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$, de sorte qu'il vient la conséquence suivante de l'équation de conservation de la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation

$$\boldsymbol{B}_i = -\iint_{S_1} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_1 = -\iint_{S_2} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_2 = \boldsymbol{B}_i' \qquad (9.3)$$

Cette relation a une conséquence topologique très importante concernant les formes géométriques admissibles pour un domaine de densité non nulle de charges $\vec{\lambda}_i$. En effet, comme les projections $\boldsymbol{B}_i$ du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ sur les axes des référentiels locaux, projections définies dans ces référentiels locaux par une surface sécante du domaine de densité non nulle de charges $\vec{\lambda}_i$, sont des *scalaires conservés et invariants* tout le long du domaine de densité non nulle de charges, ce domaine doit forcément être continu (connexe). Il ne peut pas se terminer

brusquement au sein du solide puisque les scalaires $\boldsymbol{B}_i$ doivent être conservés sur tout plan sécant du domaine. Par conséquent, ce domaine a une *forme de corde tubulaire*, qui doit forcément traverser le solide de part en part, ou bien une forme de *boucle torique*.

Quant au vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$, défini par la relation $\vec{\boldsymbol{B}} = \sum \boldsymbol{B}_i \vec{e}_i$, *il n'est pas forcément un vecteur invariant dans le référentiel absolu* le long de la dislocation puisque seules ses composantes $\boldsymbol{B}_i$ sont des scalaires invariants le long de la corde, alors que les vecteurs de base $\vec{e}_i$ associés aux référentiels locaux peuvent changer le long de cette corde dans le cas où le milieu subit de fortes rotations d'un endroit à l'autre. Autrement dit, si l'expansion volumique τ reste homogène, le vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ est de *norme invariante* dans le référentiel absolu, mais sa direction peut changer le long de la corde exactement de la même façon que tourne les référentiels locaux le long de la corde au sein du solide.

Par contre, le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ est un réel invariant au sein de tout référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ défini le long de la dislocation puisque le domaine couvert par un référentiel local ne peut pas présenter de variations importantes de τ et $\vec{\omega}$. Autrement dit, *le vecteur de Burgers* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *peut être considéré comme un invariant dans les référentiels locaux*, et ceci quelle que soit la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ que peut prendre la dislocation dans ce référentiel local, où $\vec{\boldsymbol{t}}$ est le vecteur unité tangent à la fibre centrale de la corde (figure 9.1).

Dans la relation *(8.11)* donnant le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ d'une dislocation à partir de la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$, il est toujours possible d'effectuer l'intégration sur une surface $\boldsymbol{S}$ perpendiculaire à la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ de la fibre centrale en écrivant $d\vec{S} = \vec{\boldsymbol{t}} dS$ (figure 9.1)

$$\vec{\boldsymbol{B}} = -\sum_i \vec{e}_i \left(\vec{\boldsymbol{t}} \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_i \, dS \right) \qquad (9.4)$$

Les lignes de dislocation, ou dislocations, et leur charge linéique $\vec{\Lambda}_i$

Le domaine de charges $\vec{\lambda}_i$ de forme tubulaire ou torique peut être modélisé sous la forme d'une *ligne de dislocation,* communément appelée *dislocation,* représentable par une *fibre centrale unidimensionnelle* située au centre de la corde de densité $\vec{\lambda}_i$ non nulle de charges (fibre représentée par la ligne hachurée dans le dessin de la figure 9.1). Cette *ligne de dislocation* doit alors nécessairement, soit traverser le solide de part en part, soit former une *boucle de dislocation* fermée sur elle-même. Dans le référentiel local, le vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ doit rester constants si on varie le diamètre du contour d'intégration $\boldsymbol{C}$ ou si on déplace ce contour le long de la corde, à la condition *sine qua non* que ce contour se situe toujours en-dehors du domaine central de la corde contenant la densité $\vec{\lambda}_i$, et que l'expansion volumique soit homogène dans tout le référentiel local. On en déduit que, si la corde de dislocation est suffisamment mince (de section suffisamment faible), la charge de densité $\vec{\lambda}_i$ peut être représentée par une grandeur confinée au voisinage immédiat de la fibre centrale de la corde, qu'on appellera *ligne de dislocation*, en introduisant la notion de *charge tensorielle linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation*, à savoir un ensemble de trois vecteurs définis sur la fibre centrale par les relations suivantes

$$\vec{\Lambda}_i = \iint_{\boldsymbol{S}_C} \vec{\lambda}_i \, dS \qquad (9.5)$$

dans lesquelles $\boldsymbol{S'}_C$ est la surface du coeur de la corde. Ces relations permettent alors de déduire le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ à partir de $\vec{\Lambda}_i$, ainsi que ses composantes $\boldsymbol{B}_i$ (qui sont inva-

riantes tout le long de la ligne de dislocation)

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \sum_i \boldsymbol{B}_i \vec{e}_i = -\sum_i \left(\vec{\boldsymbol{t}}\,\vec{\Lambda}_i\right)\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}_i = -\vec{\boldsymbol{t}}\,\vec{\Lambda}_i \tag{9.6}$$

Pour satisfaire les relations *(9.6)*, il faut et il suffit de poser que les vecteurs $\vec{\Lambda}_i$ représentant la charge tensorielle linéique de la ligne de dislocation possèdent des *composantes tangentielles conservatives* $\vec{\Lambda}_i$ qui satisfont les relations suivantes

$$\vec{\Lambda}_i = -\vec{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{B}_i \tag{9.7}$$

Ainsi, quelle que soit la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ de la fibre centrale d'une dislocation, les composantes $\vec{\Lambda}_i$, tangentielles à la ligne de dislocation, sont directement déductibles de la connaissance des composantes $\boldsymbol{B}_i$ du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ de cette corde.

A partir de la *trace* de la charge tensorielle linéique $\vec{\Lambda}_i$, on déduit la *charge scalaire linéique de rotation* Λ de la dislocation, en utilisant les relations *(8.17)* et *(9.7)*, et on constate que cette charge scalaire dépend du produit scalaire du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ par le vecteur naturel tangent $\vec{\boldsymbol{t}}$ à la ligne de dislocation

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_i \vec{e}_i \vec{\Lambda}_i = \frac{1}{2}\sum_i \vec{e}_i \left(-\vec{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{B}_i\right) = -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}} \tag{9.8}$$

Quant à la *partie antisymétrique* de la charge tensorielle linéique $\vec{\Lambda}_i$, elle peut être représentée par une *charge vectorielle linéique de flexion* $\vec{\Lambda}$ de la dislocation, qui dépend du produit vectoriel du vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ par le vecteur naturel tangent $\vec{\boldsymbol{t}}$ à la ligne de dislocation

$$\vec{\Lambda} = -\sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{\Lambda}_i = -\sum_i \vec{e}_i \wedge \left(-\vec{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{B}_i\right) = \vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}} \tag{9.9}$$

Ainsi, l'orientation respective du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ de la dislocation et du vecteur naturel tangent $\vec{\boldsymbol{t}}$ à sa fibre centrale joue un rôle prépondérant dans l'expression des différents tenseurs de charges linéiques, et détermine en fait la nature même de cette ligne de dislocation.

En décomposant le vecteur de Burgers en ses parties parallèle $\vec{\boldsymbol{B}}_{\parallel}$ et perpendiculaire $\vec{\boldsymbol{B}}_{\perp}$ au vecteur naturel tangent $\vec{\boldsymbol{t}}$, il vient la relation

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{t}}}_{\vec{\boldsymbol{B}}_{\parallel}} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)}_{\vec{\boldsymbol{B}}_{\perp}} = -2\Lambda\vec{\boldsymbol{t}} + \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda} \tag{9.10}$$

qui montre qu'une dislocation peut être parfaitement et complètement décrite par la donnée de sa *charge linéique de rotation* Λ, qui est liée à la partie parallèle $\vec{\boldsymbol{B}}_{\parallel}$ du vecteur de Burgers, et de sa *charge linéique de flexion* $\vec{\Lambda}$, qui est liée à la partie perpendiculaire $\vec{\boldsymbol{B}}_{\perp}$ du vecteur de Burgers.

La quantification et la taxinomie des dislocations dans un réseau

Les domaines connexes de densité non nulle de charges de dislocation peuvent être modélisés de la manière la plus simple sous forme de cordes minces. Dans cette section, on va montrer que les cordes rectilignes apparaissant dans un réseau solide sont *quantifiées* à l'échelle microscopique du réseau (figures 9.2 et 9.3), et que ces cordes représentent alors des *singularités plastiques élémentaires* des champs de distorsion, autrement dit les *"particules élémentaires"* de la déformation plastique du réseau.

Si on considère le cas d'un réseau ordonné de particules à l'échelle microscopique, on peut y introduire des dislocations par coupure des liaisons sur un plan du réseau, déplacement parallèle des mâchoires et reconstitution des liaisons, comme illustré aux figures 9.9 et 9.10 dans le cas d'un réseau cubique simple.

Le vecteur de Burgers $\vec{B}$ des singularités ainsi obtenues se déduit en considérant un circuit fermé C sur le réseau du solide réel, entourant la singularité, et en cherchant le vecteur de fermeture $\vec{B}$ du circuit ouvert correspondant dans le réseau virtuel non déformé.

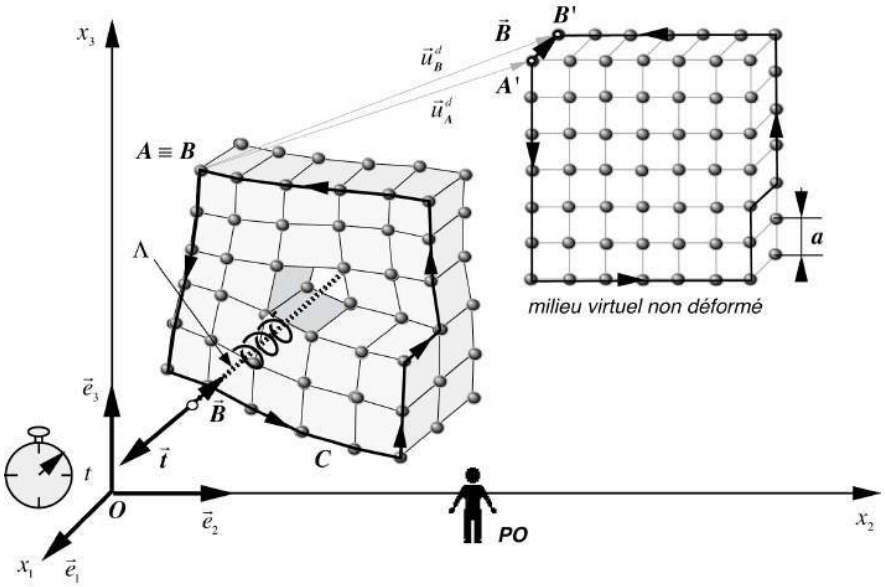


Figure 9.2 - *dislocation de type vis quantifiée dans un réseau cubique*

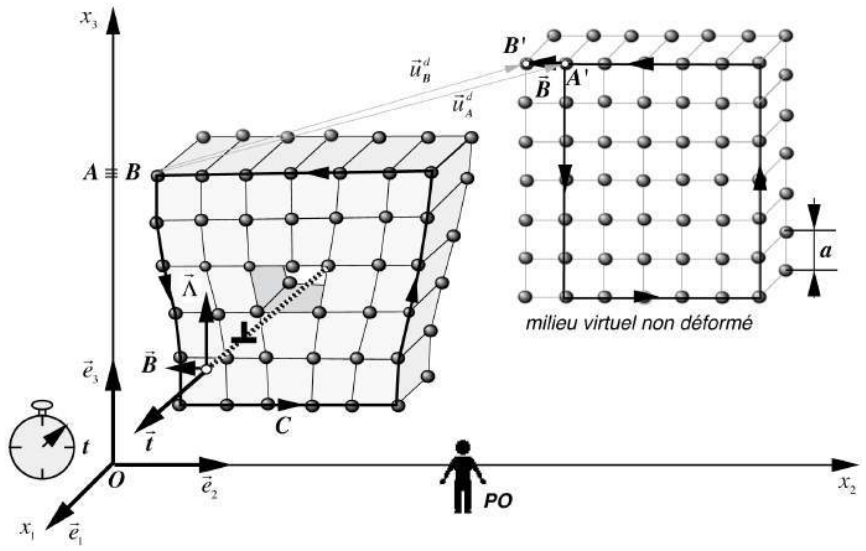


Figure 9.3 - *dislocation de type coin quantifiée dans un réseau cubique*

Grâce aux figures 9.2 et 9.3, on constate que les singularités microscopiques de réseau ont une particularité essentielle: *leur vecteur de Burgers est quantifié*, c'est-à-dire que ses composantes

$\boldsymbol{B}_i$ ne peuvent être que des multiples entiers du pas a du réseau du milieu virtuel, donc du réseau en expansion volumique homogène de valeur τ .

La nature de la singularité plastique microscopique peut changer suivant les directions respectives que prennent, dans le système de coordonnées locales, le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ et le vecteur unité $\vec{\boldsymbol{t}}$ tangent à la ligne:

- lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}$ est parallèle à $\vec{\boldsymbol{t}}$ (figure 9.2), la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente une trace non-nulle ($\Lambda \neq 0$), donc une charge de rotation, et une partie antisymétrique nulle ($\vec{\Lambda} = 0$). On parle en ce cas de *dislocations vis*[1], et de *charge linéique* Λ *de rotation de la dislocation vis*, et on représente symboliquement celle-ci par une vis située sur la ligne de dislocation. Comme $\Lambda = -\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}} / 2$, lorsque la dislocation vis présente une *rotation droite,* identique au sens de rotation d'une vis normale ou d'un tire-bouchon, Λ est positif et les vecteurs $\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ sont orientés dans des directions opposées. Par contre, si la dislocation vis présente une *rotation gauche*, donc dans le sens de rotation opposé à celui d'une vis normale ou d'un tire-bouchon, Λ est négatif et les vecteurs $\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ sont orientés dans la même direction (figure 9.4). A noter que *le choix d'une direction* $\vec{\boldsymbol{t}}$ *donnée est parfaitement arbitraire puisque seul le signe de* Λ *est fixé.*

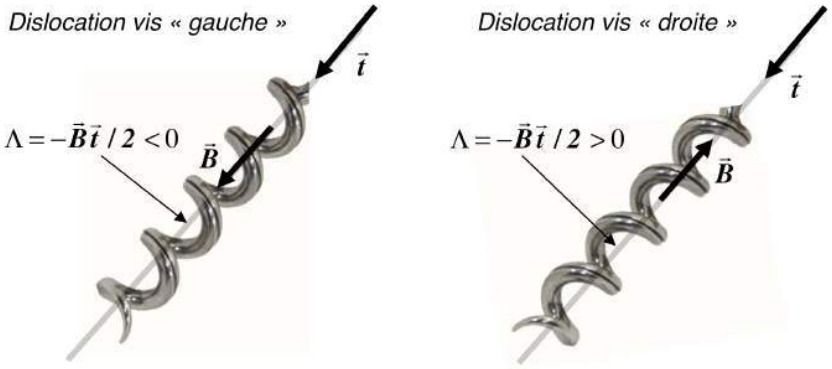


Figure 9.4 - *dislocations de type vis, «gauche» et «droite» respectivement*

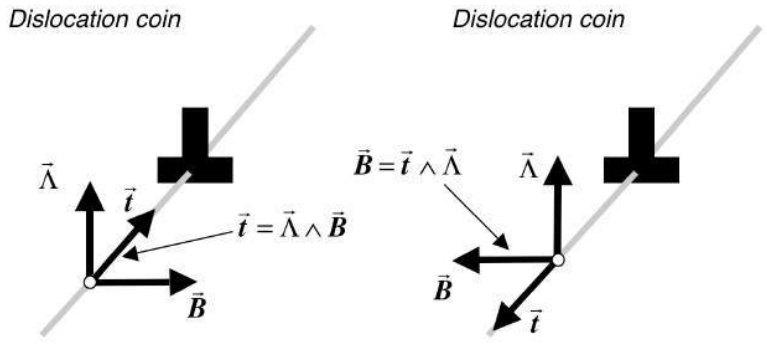


Figure 9.5 - *dislocations de type coin*

[1] *J. M. Burgers, Proc. Kon. Ned. Akad. Weten, vol.42, p. 293, 378, 1939*

- lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}$ est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{t}}$ (figure 9.6), la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente une trace nulle ($\Lambda = 0$), donc aucune charge de rotation, mais une partie antisymétrique non-nulle ($\vec{\Lambda} \neq 0$). On parle en ce cas de *dislocations coin*[2], et de *charge linéique* $\vec{\Lambda}$ *de flexion de la dislocation coin,* et on représente symboliquement celle-ci par un signe $\perp$ sur la ligne de dislocation, orienté de sorte à représenter le plan additionnel de particules. Le vecteur $\vec{\Lambda}$ possède toujours la direction du plan additionnelle $\perp$ de la dislocation coin. C'est donc la seule grandeur déterminée, de sorte que $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$ si la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ est donnée, et $\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$ si le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ est donné (figure 9.5).
- lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}$ n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{t}}$, la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente bien une trace non-nulle ($\Lambda \neq 0$), mais aussi une partie antisymétrique non-nulle ($\vec{\Lambda} \neq 0$), de telle sorte que celle-ci se comporte à la fois comme une source de rotations et de flexions élastiques et anélastiques. On parle en ce cas de *dislocations mixtes*.
Dans un réseau discret, une dislocation peut parfaitement changer de direction. Autrement dit, le long de la ligne de dislocation, le vecteur tangent $\vec{\boldsymbol{t}}$ n'est pas forcément conservé. En ce cas, comme le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ est conservé dans le référentiel local, ceci signifie que la dislocation doit changer de nature. Par exemple, à la figure 9.63, on a représenté un modèle de réseau cubique simple dans lequel une dislocation vis pénètre dans la face de gauche, tourne en devenant mixte au sein du réseau et émerge sous forme d'une dislocation coin sur la face adjacente de droite.

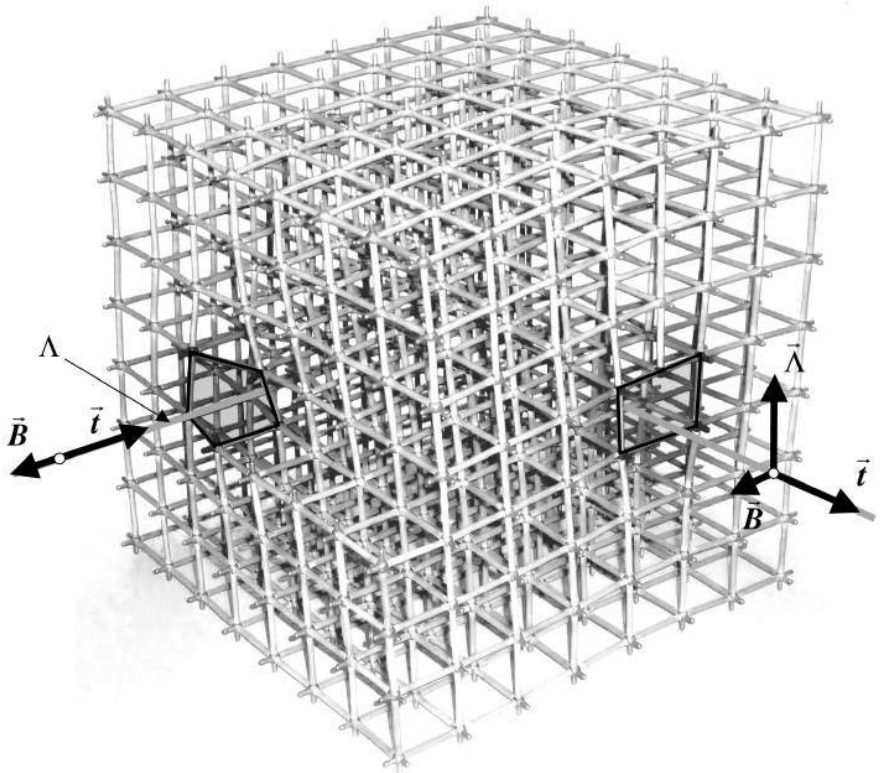


Figure 9.6 - *dislocation passant de type vis à type coin dans un réseau cubique*

[2] *E. Orowan, Z. Phys., vol. 89,p.605,614 et 634, 1934; M. Polanyi, Z. Phys., vol.89, p. 660, 1934; G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London, vol. A145, p. 362, 1934*

Les dislocations de réseau, «particules élémentaires» de la déformation plastique

Les dislocations quantifiées sont les vecteurs les plus élémentaires de la déformation plastique d'un réseau. En ce sens, on pourrait les appeler les "*particules élémentaires*" de la déformation plastique. D'ailleurs, toute corde de dislocation possède son "*anti-corde*". En effet, il est aisé de voir que deux dislocations parallèles de même direction $\vec{t}$ et de vecteurs de Burgers $\vec{B}$ et $-\vec{B}$ respectivement s'annihilent complètement si elles viennent à se rencontrer au sein du réseau.
En utilisant une intégration de la relation de compatibilité *(8.17)* sur un volume V entourant une dislocation vis sur une longueur L (figure 9.7), on a

$$\Lambda = \frac{1}{L}\iiint_{V} \lambda dV = \frac{1}{L}\iiint_{V_0} \lambda dV = \frac{1}{L}\iiint_{V} \mathrm{div}\,\vec{\omega} dV = \frac{1}{L}\oiint_{S} \vec{\omega} d\vec{S} = \frac{1}{L}\iint_{S_3} \vec{\omega} d\vec{S}_3 \qquad (9.11)$$

On constate ainsi que les dislocations vis, porteuses d'une charge linéique scalaire $\Lambda \neq 0$, sont *sources d'un champ de rotations locales divergentes,* qui est, comme nous l'avons vu, l'analogue du champ électrique. Ainsi, à une distance R de la corde, la norme du champ de rotation vaut simplement $|\vec{\omega}| = |\Lambda| / 2\pi R$.

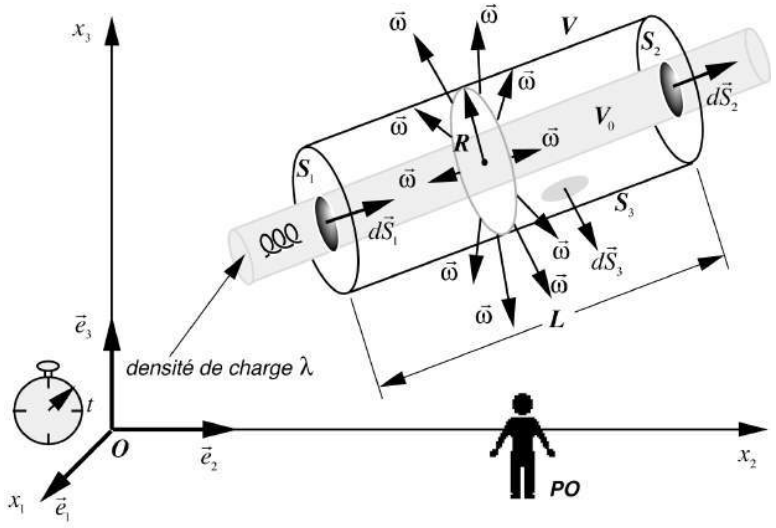


Figure 9.7 - *le champ radial de rotation autour d'une dislocation de type vis*

Quant aux dislocations coins, qui sont porteuses d'une charge de flexion $\vec{\Lambda} \neq 0$, elles sont *sources d'une flexion du réseau,* donc *d'une courbure locale du réseau* dans leur voisinage puisque le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ satisfait la relation $\vec{\chi} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \vec{\lambda}$.

Le rôle important de la structure microscopique du réseau

La *structure microscopique* d'un solide joue un rôle considérable sur la nature des dislocations qui peuvent apparaître dans ce solide, mais il n'est pas du ressort de ce livre de décrire en détail ces aspects microscopiques. Dans l'excellent livre[3] de Hirth et Lothe, le lecteur trouvera une description détaillée de la plupart de ces aspects des dislocations de réseau. Il trouvera aussi un excellent historique de la découverte des dislocations au cours du XXème siècle dans l'arti-

[3] *J. P. Hirth and J. Lothe, theory of dislocations, second edition, John Wiley & Sons, New-York, 1982*

cle de Hirth[4] (1985).

En fait, c'est essentiellement la structure du coeur de la dislocation quantifiée qui va dépendre de la structure microscopique du réseau. Un premier effet important de la structure périodique du réseau est le fait que l'énergie d'une dislocation rectiligne dépend fortement de la direction que prend cette dislocation rectiligne dans le réseau. Par exemple, considérons une dislocation coin comme celle illustrée à la figure 19.10. Il paraît assez clair que le déplacement de sa position selon l'axe Ox_2 doit modifier l'énergie de cette dislocation de manière périodique, avec une périodicité spatiale qui est celle du réseau. Les positions d'énergie minimum et maximum sont appelées respectivement vallées de Peierls et collines de Peierls, du nom de Peierls[5] qui fut le premier en 1940 à avoir considéré ce problème. Ainsi, pour faire passer une dislocation d'une vallée de Peierls à l'autre il faut alors lui appliquer une force appelée *force de Peierls-Nabarro*[6].

On peut aussi imaginer qu'une dislocation soit oblique par rapport aux vallées de Peierls, et qu'elle doive par conséquent franchir ces vallées. En ce cas, il est tout-à-fait logique de penser que la dislocation rectiligne oblique ne présente pas nécessairement la configuration d'énergie minimale, et que la dislocation pourrait avoir intérêt à prendre une forme polygonale par la formation de *décrochements*[7] *(kinks)* qui minimisent les portions de la dislocation se situant sur les collines de Peierls, et qui par conséquent contribuent à minimiser son énergie globale (fig.9.8).

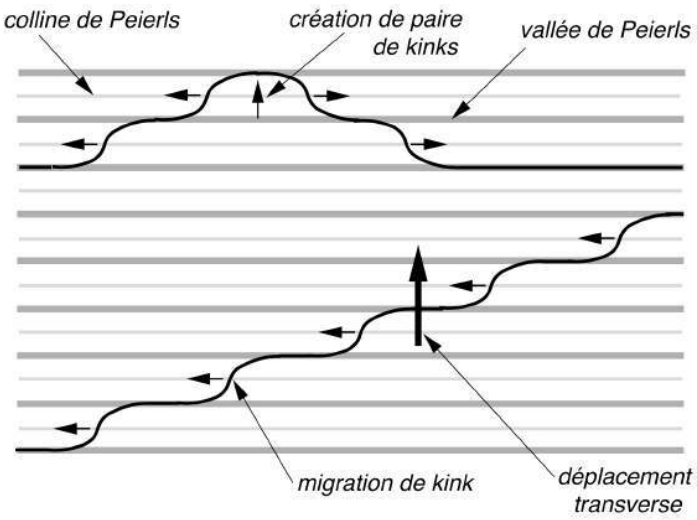


Figure 9.8 - *les décrochements et leur mobilité transverse au sein des vallées de Peierls*

L'existence de ces décrochements a aussi l'avantage de permettre la mobilité de la dislocation perpendiculairement aux vallées de Peierls, simplement par le mouvement des décrochements le long de la ligne de dislocation (fig. 9.8). Il existe aussi dans les matériaux usuels comme les

---

[4] *J.-P. Hirth, A Brief History of Dislocation Theory, Metallurgical Transactions A, vol. 16A, p.2085, 1985*

[5] *R. E. Peierls, Proc. Phys. Soc., vol. 52, p. 23, 1940*

[6] *F. R. N. Nabarro, Proc. Phys. Soc. London, vol. 59, p. 256, 1947*

[7] *J. Weertman, Phys. Rev., vol. 101, p. 1429, 1956; A. Seeger, Phil. Mag., vol.1, p. 651, 1956*

métaux de différentes structures la possibilité de changer la mobilité des dislocations par un processus de création et d'annihilation de paires de décrochements, processus qui est en général activé thermiquement, et qui est responsable de certaines des propriétés anélastiques et plastiques macroscopiques de ces matériaux. Ces divers processus ont été abondamment traités dans la littérature[1] .

De l'existence de dislocations partielles et d'une «force forte» les liant

Les dislocations apparaissant dans des structures un peu plus complexes que le réseau cubique simple, comme par exemple les réseaux cubiques à faces centrées, cubiques centrés ou hexagonaux, présentent en général des structures de coeur nettement plus compliquées. Il peut ainsi apparaître, essentiellement pour des raisons énergétiques, et suivant le système cristallin considéré, *une dissociation du coeur de la dislocation en deux ou plusieurs dislocations partielles[8],* dont les vecteurs de Burgers individuels sont des fractions des vecteurs de translation du réseau.

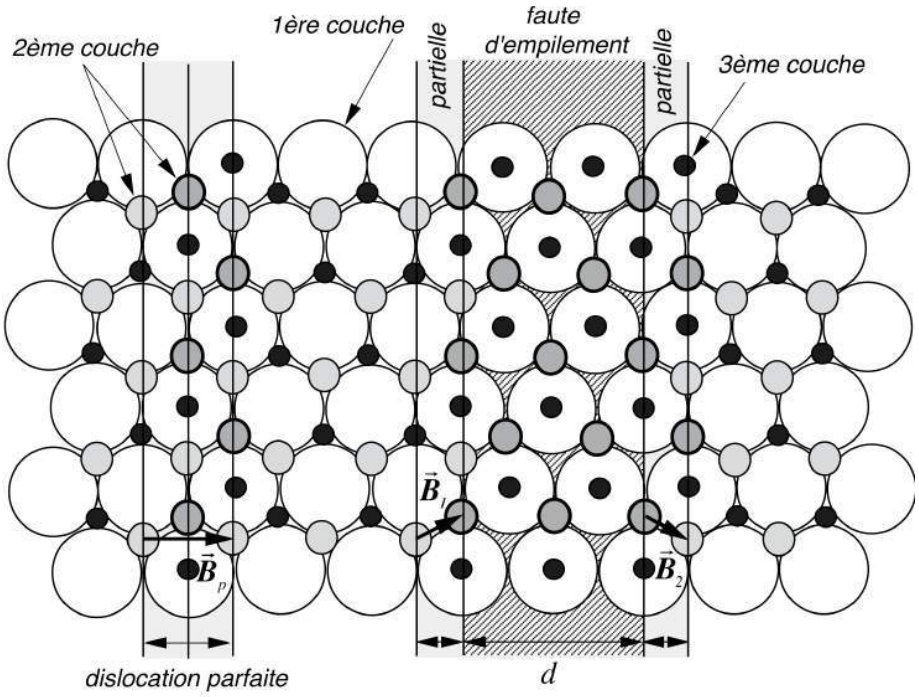


Figure 9.9 - *dislocations partielles et ruban de faute d'empilement dans un CFC*

Par exemple, dans les métaux cubiques à faces centrées *(CFC)*, l'empilement des atomes est caractérisé par des séquences *abc abc abc ...* (fig. 9.9). Le vecteur de Burgers $\vec{B}_p$ d'une dislocation parfaite doit en principe y relier deux noeuds du réseau. Mais pour des raisons énergétiques, les vecteurs de Burgers les plus favorables sont ceux qui ont une longueur minimale, car l'énergie de distorsion stockée dans le réseau par une dislocation est proportionnelle au carré

[8] *J. Frenkel,T. Kontorava, Fiz. Zh., vol.1 , p. 137, 1939; R. D. Heidenreich, W. Shockley, Report of Conf. on Strength of Solids, Phys. Soc., London, p. 57, 1948; F. C. Frank, Proc. Phys. Soc. London, vol. 62A, p. 202, 1949; N. Thompson,Proc. Phys. Soc. London, vol. 66B, P. 481, 1953*

de son vecteur de Burgers comme nous le verrons plus tard. Ainsi dans le cas de la figure 9.9, les dislocations ont intérêt à se dissocier sur leur plan de glissement en deux partielles de vecteurs de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{B}}_2$, de sorte que $\vec{\boldsymbol{B}}_p = \vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_2$. Dans le cas de cette dissociation, on a en effet $\vec{\boldsymbol{B}}_1 \vec{\boldsymbol{B}}_2 > 0$, de sorte que $\vec{\boldsymbol{B}}_p^2 = \vec{\boldsymbol{B}}_1^2 + \vec{\boldsymbol{B}}_2^2 + 2\vec{\boldsymbol{B}}_1 \vec{\boldsymbol{B}}_1 > \vec{\boldsymbol{B}}_1^2 + \vec{\boldsymbol{B}}_2^2$. Les deux partielles obtenues à la figure 9.9 par cette dissociation sont dites *de type Shockley*[11]. La distance entre les deux partielles est alors contrôlée par une compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles qui se repoussent, et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute d'empilement cristallin *(abc ac abc abc ...)* situé entre les deux dislocations partielles, comme le montre bien la figure 9.10.

Comme le ruban de faute d'empilement possède une énergie γ par unité de surface, l'énergie totale $E_t(d)$ par unité de longueur de dislocation pour une dislocation dissociée sur une distance d s'écrit $E_t(d) = \gamma d + E_d(d)$, où $E_d(d)$ est l'énergie des deux partielles en fonction de la distance d les séparant, qui est une fonction monotone décroissante diminuant de E_0 pour $d = 0$ à $2E_0 / 3$ pour $d \to \infty$ dans le cas des partielles de Shockley illustrées à la figure 9.9.

L'énergie $E_t(d)$ présente donc un minimum pour la distance $d = d_0$ (figure 9.10), qui est la distance d'équilibre entre les deux partielles, contrôlée par la compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles répulsives et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute d'empilement cristallin entre les deux partielles. On voit apparaître ici un comportement de l'énergie $E_t(d)$ qui induit une force d'interaction entre les deux partielles qu'on pourrait qualifier de *«force forte»*, au sens que l'énergie de la paire de partielles présente un minimum qui fixe la position d'équilibre d_0, mais que celle-ci ne cesse d'augmenter si on essaie d'augmenter la distance de séparation au-delà de d_0. Le qualificatif de «force forte» est proposé ici car ce comportement de la force d'interaction entre les partielles présente une analogie intéressante avec la force forte agissant entre les quarks du Modèle Standard des particules élémentaires.

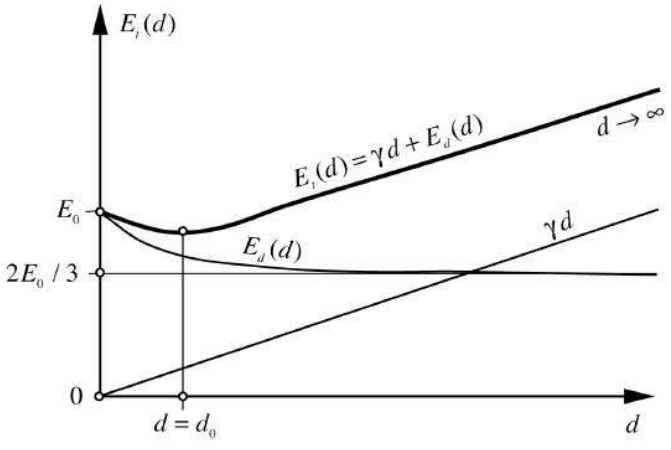


Figure 9.10 - *énergie de deux dislocations partielles en fonction de la distance les séparant*

A titre d'illustration exemplaire, on a représenté (fig. 9.11) un modèle d'une dislocation mixte (avec une nature coin et vis à la fois) dissociée en deux partielles dans une structure cubique à faces centrées. On y voit clairement l'existence d'un défaut d'empilement entre les deux par-

tielles. Et comme il s'agit là d'une dislocation mixte, les deux partielles y présentent une série de décrochements (kinks) tels que nous les avons décrits précédemment. De plus, on peut même observer la flexion du réseau induite par la partie coin de la dislocation dissociée.

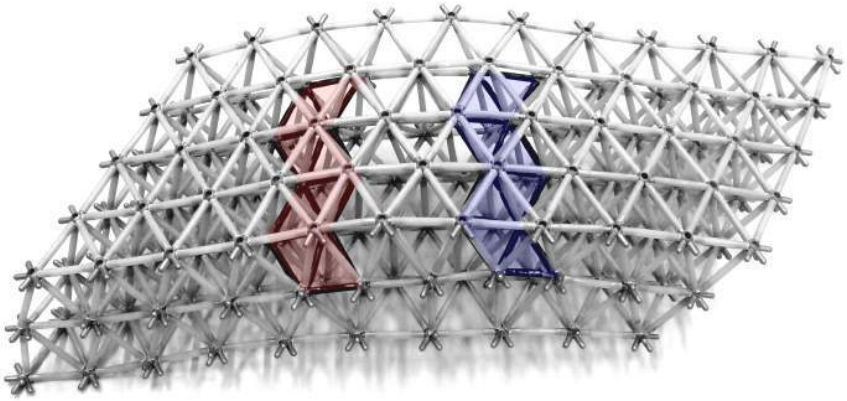


Figure 9.11 - *modèle d'une dislocation mixte dans un réseau cubique à faces centrées, présentant une dissociation en deux partielles, ainsi que des décrochements sur les partielles*

L'ensemble de toutes les conséquences liés à la structure du réseau sont évidemment trop particulières de chaque structure cristalline envisageable pour être traitées ici en détail. Mais elles peuvent être abordées dans tout livre traitant des dislocations dans les structures cristallines.

Les effets d'une variation spatiale de l'expansion volumique

Dans le cas de milieux imaginaires dans lesquels l'expansion volumique ne serait plus homogène, avec de grandes variations de τ , il n'est plus possible de représenter une dislocation de réseau par une ligne de densité linéique $\vec{\Lambda}_i$ située sur le coeur de la dislocation. En effet, en ce cas, l'intégrale sur une surface $\boldsymbol{S}$ entourant le coeur de la dislocation

$$\vec{\boldsymbol{B}} = -\sum_i \vec{e}_i \left(\vec{\boldsymbol{t}} \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_i \, dS \right) \qquad (9.12)$$

ne donnera pas le même résultat en différents endroits le long de la ligne de dislocation, et ne donnera pas non plus le même résultat suivant la taille de la surface $\boldsymbol{S}$ choisie, ce qui implique que la densité de charge $\vec{\lambda}_i$ n'est plus localisée sur le coeur de la dislocation, mais qu'elle est maintenant disséminée dans un tube plus ou moins volumineux aux alentours du coeur, de telle sorte à ce que l'intégrale *(9.12)* donne bien le vecteur de Burgers réel associé à la surface $\boldsymbol{S}$ choisie, dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ qu'on utilise pour le mesurer (figure 9.12).
Mais il est clair que tout au long de ce tube, la condition *(9.2)* restera valable si les surfaces $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ choisies sont suffisamment étendues pour englober toute la densité de charge $\vec{\lambda}_i$ entourant le coeur de la dislocation de réseau. Il va sans dire que ce genre de situations, où l'expansion volumique et les rotations locales ne sont pas homogènes au sein d'un solide contenant des dislocations de réseau étendues, est beaucoup plus difficile à traiter que les cas où il y a homogénéité de τ et de $\vec{\omega}$ sur de grandes distances ou lorsque les dislocations de réseau sont confinées dans des régions suffisamment petites pour qu'elles puissent être considérées comme homogènes.

Cependant, il sera toujours possible de décrire de manière locale la dislocation comme une corde localisée dans un repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ comme illustré à la figure 19.19, en utilisant localement les relations *(9.8)* à *(9.10)* pour calculer les densités linéiques $\vec{\Lambda}_i$, $\vec{\Lambda}$ et Λ , en supposant que l'expansion volumique τ peut être considérée comme homogène dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. En ce cas, la longueur du vecteur de Burgers est donnée localement par la relation

$$\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\tau\neq 0} = \left|\vec{\boldsymbol{B}}_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3} \qquad (9.13)$$

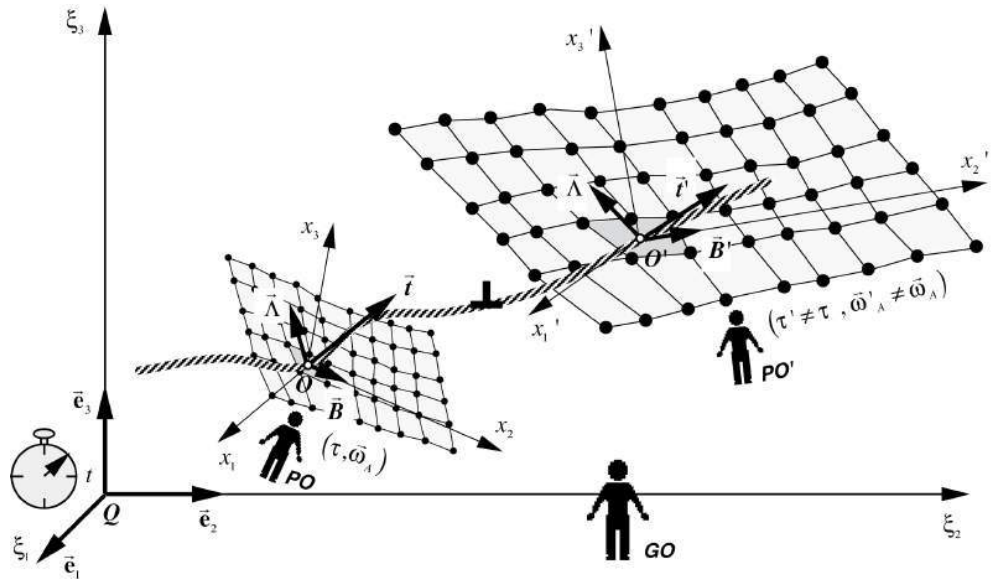


Figure 9.12 - *effet d'une variation spatiale de l'expansion volumique sur une dislocation de réseau*

de sorte que les densités linéiques dans une région où l'expansion volumique τ n'est pas nulle seront reliées aux densités linéiques de la même dislocation à $\tau = 0$ par les relations

$$\left|\vec{\Lambda}_i\right|_{\tau\neq 0} = \left|\vec{\Lambda}_{0i}\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3} \quad ; \quad \left|\vec{\Lambda}\right|_{\tau\neq 0} = \left|\vec{\Lambda}_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3} \quad ; \quad \left|\Lambda\right|_{\tau\neq 0} = \left|\Lambda_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3} \qquad (9.14)$$

Comme la densité linéique $\vec{\Lambda}_i$ se déduit comme le produit de la densité volumique $\vec{\lambda}_i$ par une surface, on déduit que la densité volumique $\vec{\lambda}_i$ dans une région comprimée ou expansée à une valeur τ non nulle est reliée à la densité volumique initiale de la même région à une valeur $\tau = 0$ par les relations suivantes

$$\left|\vec{\lambda}_i\right|_{\tau\neq 0} = \frac{\left|\vec{\Lambda}_i\right|_{\tau\neq 0}}{\left|S\right|_{\tau\neq 0}} = \frac{\left|\vec{\Lambda}_{0i}\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3}}{\left|S_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{2\tau/3}} = \left|\vec{\lambda}_{0i}\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{-\tau/3} \qquad (9.15)$$

On en déduit aussi que

$$\left|\vec{\lambda}\right|_{\tau\neq 0} = \left|\vec{\lambda}_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{-\tau/3} \quad ; \quad \left|\lambda\right|_{\tau\neq 0} = \left|\lambda_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{-\tau/3} \qquad (9.16)$$

De l'impossibilité de trouver des cordes de désinclinaison isolées

On peut montrer qu'il ne peut pas exister de *cordes de désinclinaison isolées dans un solide*, à savoir des tubes de charges dont le vecteur de Frank global $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ soit non nul. En effet, *comme*

les densités de charges de dislocation $\vec{\lambda}_i$ *et de désinclinaison* $\vec{\theta}_i$ *sont confinées dans le même tube*, il est possible de remplacer $\vec{\theta}_i$ par son expression $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right]$ dans la relation *(8.34)*. On constate alors que le vecteur de Frank $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ peut se déduire par l'intégrale sur le contour $\boldsymbol{C}_1$ (figure 9.1) de la densité $\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda$, et que cette densité est nulle sur ce contour à l'extérieur du tube, de sorte que $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = 0$. On en déduit par conséquent qu'*il ne peut pas exister de tubes de charges isolés dont le vecteur de Frank global* $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ *soit non nul*.

9.2 – Membranes de dislocation et joints de torsion, de flexion et d'accommodation

On appellera *membrane chargée* une interface mince qui contient des charges, et qui sépare deux milieux ne contenant pas de charges (fig. 9.13). Il est clair que ces membranes peuvent être des surfaces quelconques dans l'espace *(surfaces infinies, surfaces fermées sphéroïdales ou toriques, rubans ou tubes creux, plaques minces, etc.)*, à la seule condition topologique que, sur tout point de la membrane, l'équation de conservation des charges de dislocation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ soit satisfaite et que les charges de désinclinaison dérivent des charges de dislocation par la relation $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right]$. Les *conditions de passage* pour les tenseurs topologiques à travers une telle membrane chargée se déduisent des conditions de géométro-compatibilité et sont faciles à établir. Il suffit en effet d'écrire l'intégrale de l'équation de compatibilité prise sur un volume mince, mobile avec la membrane, et dont chaque face se situe de part et d'autre de la membrane (fig. 9.13).

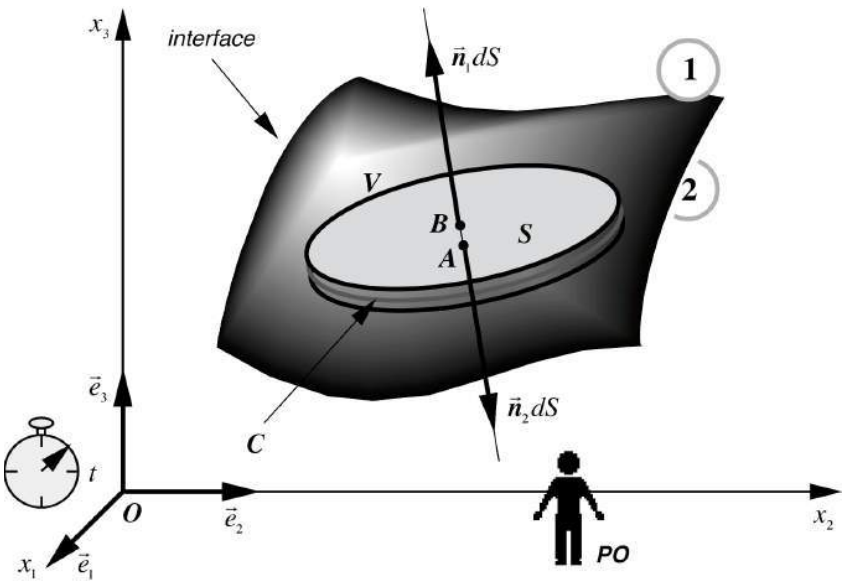


Figure 9.13 - *membrane bidimensionnelle chargée*

La charge surfacique $\vec{\Pi}_i$ *de dislocation d'un joint en présence de gradients de* $\vec{\boldsymbol{B}}$

Pour établir les conditions de passage pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$, il faut intégrer son équation de compatibilité dans le volume $\boldsymbol{V}$ de la membrane, qui contient la densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation

$$\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i\, dV = \iiint_V \vec{\lambda}_i\, dV = \oiint_S \left(d\vec{S} \wedge \vec{\beta}_i\right) \tag{9.17}$$

A la condition que la membrane soit suffisamment mince, l'intégrale de surface peut s'écrire comme la somme des intégrales de surface de part et d'autre de S, et l'intégrale de volume peut se décomposer comme suit

$$\oiint_S \left(d\vec{S} \wedge \vec{\beta}_i\right) = \iint_{S_1} \left(\vec{n}_1 \wedge \vec{\beta}_i^{(1)}\right) dS + \iint_{S_2} \left(\vec{n}_2 \wedge \vec{\beta}_i^{(2)}\right) dS = \iint_S dS \int_A^B \vec{\lambda}_i\, dl \tag{9.18}$$

dans laquelle $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont les vecteurs unité perpendiculaires à la surface de la membrane de part et d'autre de la membrane.

Ainsi, si la membrane chargée est très mince, il est possible d'introduire la notion de *charge surfacique* $\vec{\Pi}_i$ *de dislocation* en écrivant

$$\vec{\Pi}_i = \int_A^B \vec{\lambda}_i\, dl \tag{9.19}$$

ce qui permet de déduire que

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{\beta}_i^{(1)} + \vec{n}_2 \wedge \vec{\beta}_i^{(2)} = \vec{\Pi}_i \tag{9.20}$$

L'interprétation topologique de cette condition de passage est simple: l'existence d'une *charge surfacique de dislocation* $\vec{\Pi}_i$ dans la membrane conduit à une discontinuité des composantes tangentielles des vecteurs de distorsion $\vec{\beta}_i$ de part et d'autre de celle-ci. Mais de chaque côté de la membrane, à l'extérieur de celle-ci, le milieu ne contient pas de charges plastiques, de sorte que le tenseur $\vec{\beta}_i$ doit y dériver du gradient des composantes du champ de déplacement $\vec{u}$, à savoir $\vec{\beta}_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_i$. Il est par conséquent possible d'écrire

$$\vec{n}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_i^{(1)} + \vec{n}_2 \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_i^{(2)} = \vec{\Pi}_i \tag{9.21}$$

Dans le référentiel local, cette expression implique que la présence de la membrane chargée induit localement une dislocation du champ de déplacement $\vec{u}$ associé aux distorsions élastiques et anélastiques, de vecteur de Burgers $\vec{B}$ donné par

$$\vec{B} = \int_A^B \delta\vec{u} = \vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)} \tag{9.22}$$

de sorte que

$$\vec{\Pi}_i = \vec{n}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_i^{(1)} - \vec{n}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_i^{(2)} = \vec{n}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, B_i \tag{9.23}$$

D'après cette relation, l'existence d'une charge surfacique $\vec{\Pi}_i$ non nulle dans la membrane est donc soumise à la condition *qu'il existe un gradient des composantes du vecteur de Burgers sur la surface de la membrane*. Ceci signifie entre autre que si le vecteur de Burgers est constant sur toute la membrane, donc si la membrane correspond à une simple translation des deux surfaces S_1 et S_2 l'une par rapport à l'autre, la densité surfacique $\vec{\Pi}_i$ est nulle.

Finalement, on constate que les trois vecteurs $\vec{\Pi}_i$ qui composent la charge tensorielle surfacique doivent être *des vecteurs tangents à la surface de la membrane*, ce qui est en fait une conséquence directe de l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ des charges de dislocation. En effet, en considérant l'intégrale sur un volume V dans la figure 9.13, on a

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i\, dV = \oiint_S \vec{\lambda}_i\, d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{\lambda}_i\, \vec{n}_1\, dS + \iint_{S_2} \vec{\lambda}_i\, \vec{n}_2\, dS \equiv 0 \tag{9.24}$$

qui ne peut être satisfaite pour tout volume V qui entoure étroitement l'interface chargée que si

les vecteurs $\vec{\lambda}_i$ sont perpendiculaires à $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ et à $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ de part et d'autre de l'interface, autrement dit que s'ils sont tangents à la surface de la membrane.

Comme dans le cas des lignes unidimensionnelles de dislocation, on peut extraire la trace et la partie anti-symétrique du tenseur $\vec{\Pi}_i$ de charge surfacique de dislocation, en écrivant

$$\begin{cases} \vec{\Pi} = -\sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{\Pi}_i = -\sum_i \vec{e}_i \wedge \left(\vec{\boldsymbol{n}}_1 \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, \boldsymbol{B}_i\right) \\ \Pi = \frac{1}{2}\sum_i \vec{e}_i \vec{\Pi}_i = \frac{1}{2}\sum_i \vec{e}_i \left(\vec{\boldsymbol{n}}_1 \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, \boldsymbol{B}_i\right) \end{cases} \qquad (9.25)$$

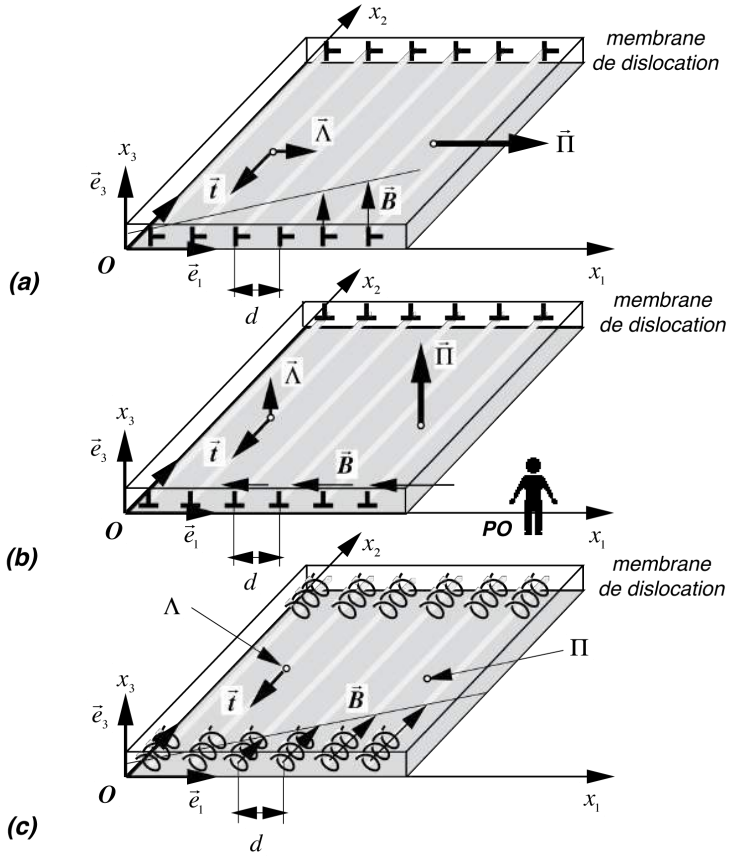


Figure 9.14 - *membranes de dislocation de type coin* ***(a)*** *et* ***(b)*** *ou de type vis* ***(c)***

La modélisation bidimensionnelle d'une membrane mince obtenue en calculant les charges surfaciques est généralement appelée un *joint* [9]. Le joint est alors entièrement caractérisé par la donnée du tenseur $\vec{\Pi}_i$ de charge surfacique de dislocation, dont les vecteurs sont tangents à figures sa surface. Mais il peut l'être aussi par la donnée de la partie anti-symétrique $\vec{\Pi}$ (la charge surfacique de flexion du joint) et de la trace Π (la charge surfacique de rotation du joint) du tenseur de charge $\vec{\Pi}_i$, comme dans le cas des lignes unidimensionnelles de dislocation. Ce point est parfaitement illustré dans la figure 9.14, dans laquelle on présente trois membranes

[9] *C. Somigliana, Atti. Accad. naz. Lincei Rc., vol. 23, p. 463, 1912, et vol. 24, p.655, 1915; W. T. Read, W. Shockley, Phys. Rev. , vol. 78, p. 275, 1950; F. C. Frank, in Report of the Conf. on Defects in Crystalline Solids, Phys. Soc. London, p. 159, 1955*

minces dont les vecteurs de Burgers, croissant linéairement selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, sont orientés respectivement selon les axes $\boldsymbol{O}x_3$, $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_2$. Comme ces membranes minces de dislocation permettent en fait de désorienter ou d'accommoder les *grains solides* situés de part et d'autre de la membrane, on les appelle généralement des *joint de grains.*

On peut par exemple considérer que ces membranes sont en fait chargées par des dislocations coins ou vis orientées parallèlement à l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. Si les vecteurs de Burgers de chaque dislocation individuelle ont une longueur $\boldsymbol{B}$ et que la distance entre ces dislocations individuelles vaut $\boldsymbol{d}$, on a $\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,\boldsymbol{B}_i\right| = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{d} = \alpha$, ce qui permet de calculer les expressions *(9.25)*.

Mais on peut aussi simplement représenter chaque dislocation individuelle par une charge linéique vectorielle $\vec{\Lambda}$ si c'est une dislocation coin ou par une charge linéique scalaire Λ si c'est une dislocation vis. On vérifie alors que:

- la membrane mince de type coin avec un vecteur de Burgers perpendiculaire à la surface et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 9.14a) peut être entièrement caractérisée par une *chargesurfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$ *de flexion*, dont le vecteur est tangent au plan de la membrane, dirigé selon $\boldsymbol{O}x_1$, et valant

$$\vec{\Pi} = \vec{\Lambda}/\boldsymbol{d} \quad ; \quad \vec{\Pi} \,||\, \boldsymbol{O}x_1 \qquad (9.26)$$

Comme ce type de membrane coin permet de désorienter les grains solides situés de part et d'autre de la membrane, on l'appelle un *joint de désorientation*, et dans ce cas particulier, comme la désorientation correspond à une flexion du solide, on parle de *joint de flexion*.

- la membrane mince de type coin avec un vecteur de Burgers parallèle à la surface et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 9.14b) peut être entièrement caractérisée par une *charge surfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$ *de flexion*, dont le vecteur est perpendiculaire à la membrane, et valant

$$\vec{\Pi} = \vec{\Lambda}/\boldsymbol{d} \quad ; \quad \vec{\Pi} \,||\, \boldsymbol{O}x_3 \qquad (9.27)$$

Comme ce type de membrane coin permet en fait de modifier dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ la densité des plans cristallins des grains solides situés de part et d'autre de la membrane, elle peut être qualifiée de *joint d'accommodation*.

- la membrane mince de type vis avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 9.14c) est entièrement caractérisée par la *charge surfacique scalaire* Π *de rotation*

$$\Pi = \Lambda/\boldsymbol{d} \qquad (9.28)$$

Ce type de membrane vis correspond aussi à un *joint de désorientation* entre les grains solides situés de part et d'autre de la membrane. Dans ce cas particulier, comme la désorientation correspond à une rotation des grains l'un par rapport à l'autre, on parle de *joint de torsion*.

La quantification des membranes de dislocation sur un réseau

Les membranes de dislocation se quantifient aussi sur un réseau microscopique, comme l'illustre la figure 9.15 représentant un ruban de dislocation de type vis, composé de trois dislocations vis de réseau alignées, et correspondant au cas de la figure 9.14c.

Il est évidemment possible d'imaginer aussi des rubans de dislocations quantifiés similaires, mais composés de dislocations coin de réseau, et correspondant aux cas des figures 9.14a et 9.14b.

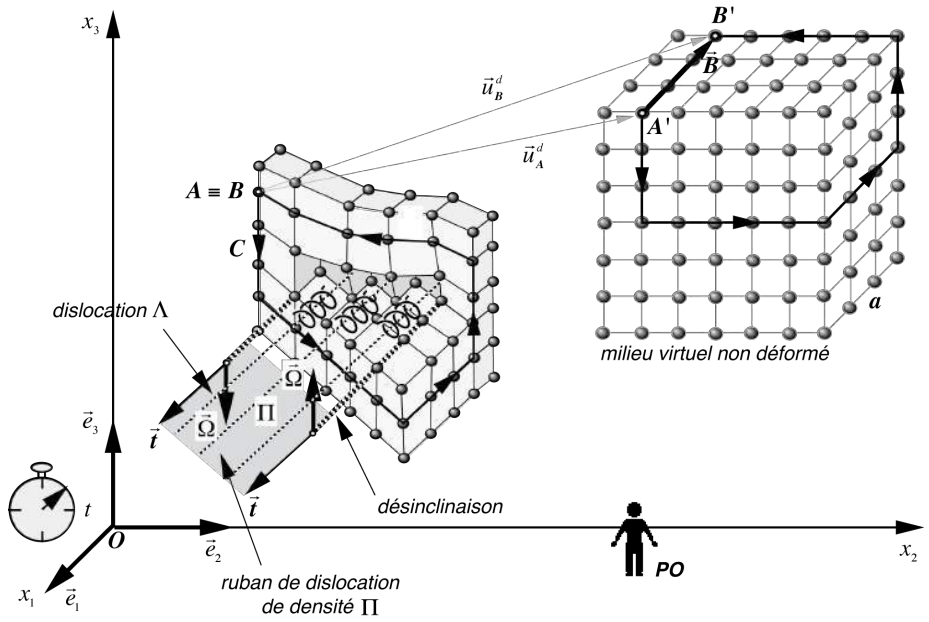


Figure 9.15 - *ruban de dislocation bidimensionnel quantifié composé de trois dislocations de réseau de type vis*

Les effets d'une variation de l'expansion volumique

Dans le cas où un milieu s'expanse ou se contracte localement, il est utile de savoir comment se transforme les charges surfaciques de dislocation. Sachant que les charges surfaciques $\vec{\Pi}$ de flexion et Π de rotation d'un joint sont données par les rapports $\vec{\Lambda} / \boldsymbol{d}$ et $\Lambda / \boldsymbol{d}$, et en utilisant les relations *(9.16)* et le fait que $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \, \mathrm{e}^{\tau/3}$, on trouve que

$$\left|\vec{\Pi}\right|_{\tau\neq 0} = \frac{\left|\vec{\Lambda}\right|_{\tau\neq 0}}{\boldsymbol{d}\big|_{\tau\neq 0}} = \frac{\left|\vec{\Lambda}_0\right|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3}}{\boldsymbol{d}_0\big|_{\tau=0} \mathrm{e}^{\tau/3}} = \left|\vec{\Pi}_0\right|_{\tau=0} \qquad (9.29)$$

On en déduit que les densités surfaciques de charges de dislocation sont conservées lorsque le milieu s'expanse ou se contracte, ce qui se traduit par les relations

$$\vec{\Pi}_i\big|_{\tau\neq 0} = \vec{\Pi}_{0i}\big|_{\tau=0} \quad ; \quad \vec{\Pi}\big|_{\tau\neq 0} = \vec{\Pi}_0\big|_{\tau=0} \quad ; \quad \Pi\big|_{\tau\neq 0} = \Pi_0\big|_{\tau=0} \qquad (9.30)$$

9.3 – Cordes et lignes de désinclinaison aux frontières de membranes de dislocation

Alors que des cordes de désinclinaison ne peuvent pas exister à l'état isolé *(19.19)*, il peut apparaître des désinclinaisons *en présence d'un domaine de charges de dislocation étendu, comme une membrane de dislocation*. On peut considérer par exemple le cas d'une membrane plane de charges de dislocation, présentant deux régions avec des densités surfaciques de charges différentes, séparées par une frontière (fig. 9.16).

Si on suppose que les charges surfaciques de dislocation $\vec{\Pi}_i^{(1)}$ et $\vec{\Pi}_i^{(2)}$ des deux régions sont des constantes, mais de valeurs différentes dans chaque région, il est possible de calculer le

vecteur de Frank $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ sur une surface $\boldsymbol{S}$ coupant la membrane, entourant la frontière entre les deux zones et perpendiculaire à cette frontière, en utilisant la relation

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_i \vec{e}_i \iint_S \vec{\theta}_i \, d\vec{S} = \sum_i \vec{e}_i \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right] d\vec{S} = \sum_i \vec{e}_i \oint_C \left(\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right) d\vec{r} \qquad (9.31)$$

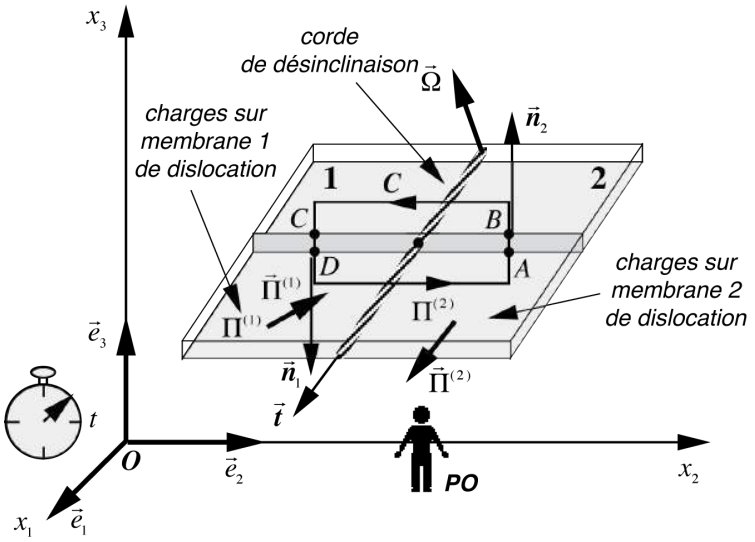


Figure 9.16 - *corde de désinclinaison à la frontière entre deux membranes de dislocations*

Cette relation se transforme encore de la façon suivante

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_i \vec{e}_i \int_A^B \left(\underbrace{\vec{\lambda}_i \vec{\boldsymbol{n}}_2}_{=0} - \vec{e}_i \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_2\right) - \vec{e}_i \vec{\boldsymbol{n}}_2 \lambda \right) dl + \sum_i \vec{e}_i \int_C^D \left(\underbrace{\vec{\lambda}_i \vec{\boldsymbol{n}}_1}_{=0} - \vec{e}_i \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_1\right) - \vec{e}_i \vec{\boldsymbol{n}}_1 \lambda \right) dl \qquad (9.32)$$

Dans cette relation, les termes $\vec{\lambda}_i \vec{\boldsymbol{n}}_1$ et $\vec{\lambda}_i \vec{\boldsymbol{n}}_2$ sont nuls puisque les densités de charge $\vec{\lambda}_i$ dans une membrane ne peuvent être que des vecteurs parallèles à la membrane *(9.25)*. Il vient donc pour $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \int_A^B \left(-\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_2\right) - \vec{\boldsymbol{n}}_2 \lambda\right) dl + \int_C^D \left(-\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_1\right) - \vec{\boldsymbol{n}}_1 \lambda\right) dl = -\vec{\Pi}^{(1)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_1 - \Pi^{(1)} \vec{\boldsymbol{n}}_1 - \vec{\Pi}^{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \Pi^{(2)} \vec{\boldsymbol{n}}_2 \qquad (9.33)$$

On constate que la valeur obtenue pour $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ est indépendante du contour choisi tant que ce contour entoure la frontière entre les deux régions de la membrane. Ainsi, pour un contour entourant étroitement la frontière, on obtient une ligne présentant un vecteur de Frank constant tout le long de la ligne, qu'on peut par conséquent qualifier de *corde de désinclinaison,* ou de *ligne de désinclinaison,* ou simplement de *désinclinaison*[10]. Dans la figure 9.17, on a reporté les lignes de désinclinaison qui bordent des rubans de dislocation similaires à ceux présentés à la figure 9.14.

---

[10] *R. DeWit, «Theory of disclinations II, III and IV», J. of the Nat. Bureau of Standards A, vol. 77A, p. 49-100, p. 359-368, and p. 607-658, 1973; E. Kröner, K.-H. Anthony, «Dislocations and Disclinations in Material Structures: The Basic Topological Concepts», Annu. Rev. Mater. Sci., vol. 5, p. 43, 1975*

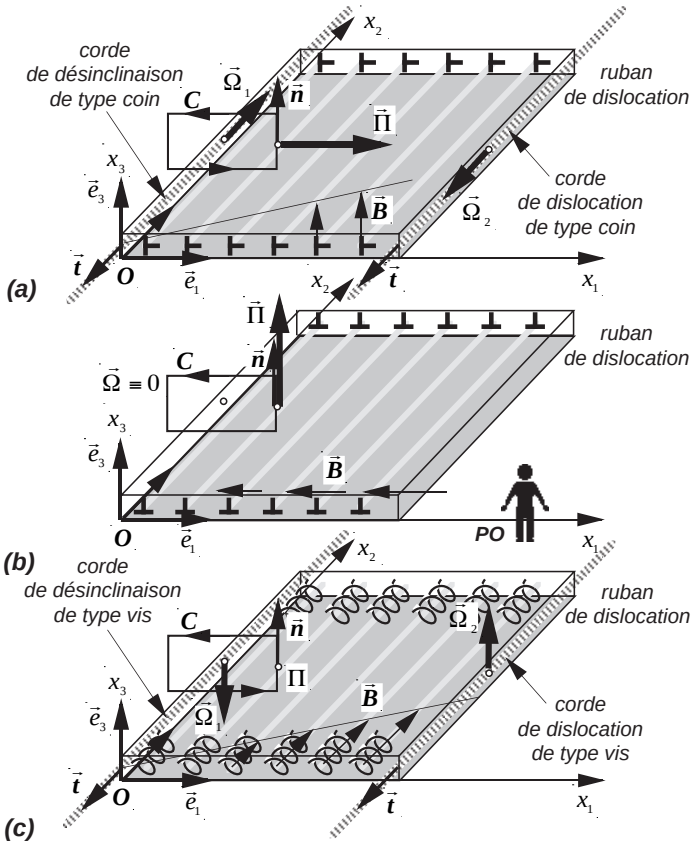


Figure 9.17 - r*ubans de dislocations bordés de lignes de désinclinaison de type coin* ***(a)*** *et de type vis* ***(c)****. Le ruban de dislocation* ***(b)*** *n'est pas bordé de lignes de désinclinaisons*

Dans cette figure, on constate les points suivants:

- le ruban de dislocation de type coin avec un vecteur de Burgers perpendiculaire à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 9.17a) correspond à un *joint de flexion localisé.* Il est bordé par *deux désinclinaisons de type coin* puisque $\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2 = -\vec{\Pi} \wedge \vec{n} = -\left|\vec{\Pi}\right| \vec{t}$,
- le ruban de dislocation de type coin avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 9.17b) correspond à un *joint d'accommodation localisé.* Il n'est bordé par aucune désinclinaison puisque $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}_2 \equiv 0$,
- le ruban de dislocation de type vis avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 9.17c) correspond à un *joint de torsion localisé.* Il est bordé par *deux désinclinaisons de type vis* puisque $\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2 = -\Pi \vec{n}$.

On remarquera que la désinclinaison de la figure 9.17a correspond à la désinclinaison macroscopique représentée à la figure 8.7b, alors que la désinclinaison de la figure 9.17c correspond à la désinclinaison macroscopique de la figure 8.7a. D'autre part, la quantification d'un ruban de désinclinaison similaire à celui de la figure 9.17c a déjà été illustrée dans la figure 9.15, dans laquelle on a reporté les deux désinclinaisons bordant le ruban de dislocation quantifié.

Finalement, la relation *(9.33)* justifie *à fortiori* le fait que les densités surfaciques soient conservées en cas d'expansion ou de contraction volumique du milieu, comme l'expriment les rela-

tions *(9.30)*, puisque les angles de rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ doivent être conservés sous l'action de ce type de transformation.

La charge scalaire de courbure d'une ligne de désinclinaison coin

Au chapitre précédent, on avait introduit la notion de densité scalaire de charges de courbure par la relation $\theta = \operatorname{div}\vec{\lambda}$. On peut alors légitimement se demander si une désinclinaison, obtenue à la frontière d'une membrane de dislocation comme dans la figure 9.16, peut être représentée par une charge scalaire linéique Θ, de la même manière qu'une dislocation vis peut être entièrement représentée par sa charge scalaire linéique Γ. Pour répondre à cette question, il suffit de reprendre la relation *(9.31)*, et de ne considérer que les termes en $\vec{\lambda}$ et λ, puisque le terme en $\vec{\lambda}_i$ n'intervient pas dans le cas d'une désinclinaison située à la frontière d'une membrane de dislocation, comme le montre la relation *(9.32)*. Il vient

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\Omega}} &= -\sum_i \vec{e}_i \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left[\vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} + \vec{e}_i \lambda\right] d\vec{S} \\ &= -\iint_S \operatorname{div}\vec{\lambda}\, d\vec{S} + \sum_k \iint_S \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\lambda_k\right) dS_k + \iint_S \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\lambda \wedge d\vec{S}\end{aligned} \qquad (9.34)$$

Dans le premier terme, on peut remplacer $\operatorname{div}\vec{\lambda}$ par θ. Le deuxième terme est nul de par le fait que, dans la configuration reportée à la figure 9.16, il ne peut y avoir de gradient de $\vec{\lambda}$ dans la direction de la désinclinaison, et le troisième terme peut être obtenu sur le contour entourant la surface d'intégration, de sorte que

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = -\iint_S \theta\, d\vec{S} - \oint_C \lambda d\vec{r} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}\big|_{\|\vec{t}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\big|_{\perp\vec{t}} \qquad (9.35)$$

Le premier terme correspond au cas d'une désinclinaison coin (figure 9.17a) et le deuxième terme correspond au cas d'une désinclinaison vis (figure 9.17c). En introduisant alors la *charge scalaire linéique* Θ *de courbure*, on peut écrire pour une désinclinaison de type coin, dans le cas de la figure 9.16

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}\big|_{\|\vec{t}} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin} = -\iint_S \theta\, d\vec{S} = -\Theta\vec{\boldsymbol{t}} = -\vec{\Pi}^{(1)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_1 - \vec{\Pi}^{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_2 \qquad (9.36)$$

On en déduit qu'il est possible de calculer la *charge linéique* Θ *de courbure* par l'expression

$$\Theta = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin}\vec{\boldsymbol{t}} = \left(\vec{\Pi}^{(1)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_1\right)\vec{\boldsymbol{t}} + \left(\vec{\Pi}^{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}_2\right)\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Pi}^{(1)}\left(\vec{\boldsymbol{n}}_1 \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) + \vec{\Pi}^{(2)}\left(\vec{\boldsymbol{n}}_2 \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \qquad (9.37)$$

En introduisant ici le vecteur unité $\vec{\boldsymbol{m}}$, perpendiculaire à la ligne de désinclinaison et radial par rapport à son centre, on obtient l'expression suivante de Θ

$$\Theta = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin}\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Pi}^{(1)}\vec{\boldsymbol{m}} + \vec{\Pi}^{(2)}\vec{\boldsymbol{m}} \qquad (9.38)$$

Les effets d'une variation de l'expansion volumique

Dans le cas où le milieu s'expanse ou se contracte localement, sachant que les densités surfaciques $\vec{\Pi}$ de charges de dislocation sur une membrane ne dépendent pas de τ *(9.30)*, et utilisant la relation *(9.38)* , on trouve

$$\Theta\big|_{\tau\neq 0} = \Theta_0\big|_{\tau=0} \qquad (9.39)$$

La quantification des désinclinaisons de type coin dans un réseau

Bien qu'il ne puisse exister de désinclinaisons isolées, il est possible d'imaginer des milieux solides structurés qui contiendraient des désinclinaisons rectilignes quantifiées sur leur réseau dans le cas des désinclinaisons coins, comme le montre bien la figure 9.18. Dans cette figure, on a représenté deux désinclinaisons coins avec $\boldsymbol{\Omega} = \mp 90°$ dans un réseau cubique simple, et on y a aussi reporté le vecteur de courbure $\vec{\chi}$ dû à la charge Θ.

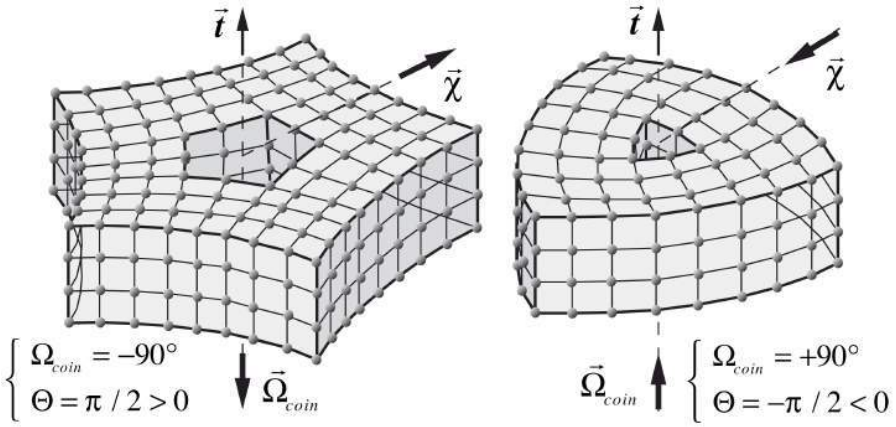


Figure 9.18 - *exemples de désinclinaisons coins quantifiées* $\boldsymbol{\Omega} = \mp 90°$ *sur un réseau cubique simple.*

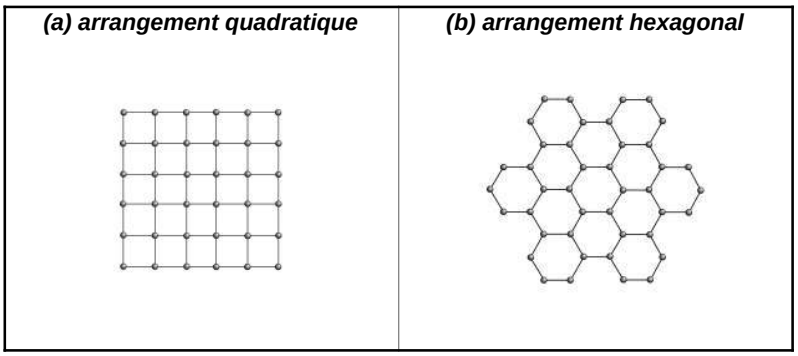


Figure 9.19 - *arrangements quadratique ou hexagonal des particules dans un plan*

On peut alors *imaginer qu'il puisse exister* différentes familles de désinclinaisons coin quantifiées en considérant des milieux solides avec différents arrangements des particules dans un plan sécant de la ligne de désinclinaison[11]. Pour l'exemple, on va considérer ici des arrangements simples comme l'arrangement quadratique ou l'arrangement hexagonal des particules dans un plan (figure 9.19). Mais on pourrait évidemment considérer aussi des arrangements plus complexes, comme des structures tridimensionnelles cubiques centrées, hexagonales ou cubiques à faces centrées.

---

[11] Les désinclinaisons ont été observées essentiellement dans les réseaux de lignes de flux des supraconducteurs de type II, dans certains polymères et dans les cristaux liquides nématiques. Voir: E. Kröner, K.-H. Anthony, Annu. Rev. Mater. Sci., vol. 5, p. 43, 1975; M. Kleman, J. Friedel, Reviews of Modern Physics, vol. 80, p.61-115, 2008

Dans le cas d'arrangement quadratique, il peut exister au plus 3 différentes désinclinaisons coin quantifiées, que nous appellerons $C1$, $C2$ et $C3$, avec des angles de rotation Ω de +90°, +180° et +270°, auxquels correspondent 3 anti-désinclinaisons coin quantifiées, $\bar{C}1$, $\bar{C}2$ et $\bar{C}3$, avec des angles de rotation Ω de -90°, -180° et -270° (fig. 9.20).

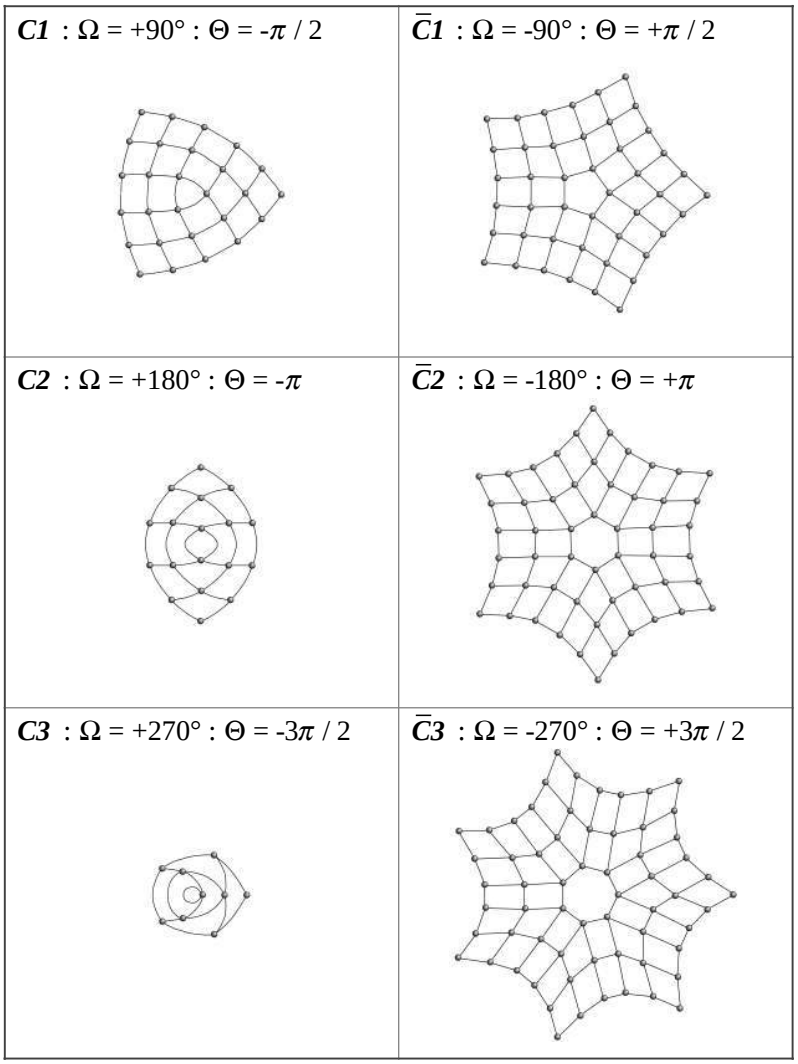


Figure 9.20 - *famille de désinclinaisons coin quantifiées dans un arrangement plan quadratique*

Dans le cas d'arrangement hexagonal, il existe au plus 5 désinclinaisons coin quantifiées différentes, $H1$, $H2$, $H3$, $H4$ et $H5$, avec les angles de rotation Ω de +60°, +120°, +180°, +240° et +300°, auxquelles correspondent 5 anti-désinclinaisons coin quantifiées, $\bar{H}1$, $\bar{H}2$, $\bar{H}3$, $\bar{H}4$ et $\bar{H}5$, avec des angles de rotation Ω de -60°, -120°, -180°, -240° et -300° (fig. 9.21).
Dans les deux cas des figures 9.20 et 9.21, on a reporté les désinclinaisons avec une taille calculée de sorte à ce que l'expansion volumique τ soit identique dans toutes les figures.
A noter aussi que les désinclinaisons de +270° dans l'arrangement quadratique et les désinclinaisons de +300° dans l'arrangement hexagonal pourraient exister ou ne pas exister suivant le milieu imaginaire considéré, car leur existence est liée à la possibilité de connecter entre elles deux liaisons d'une même «particule» dans le milieu solide structuré qu'on considère.

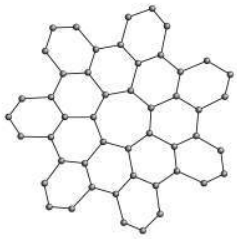
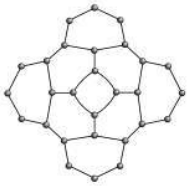
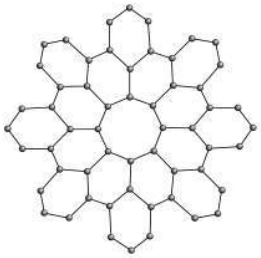
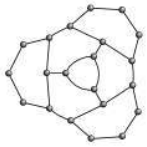
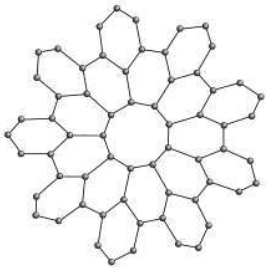
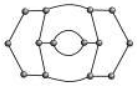
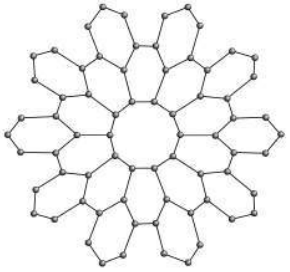
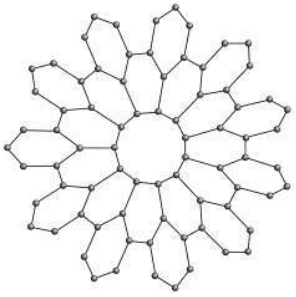
H1 : Ω = +60° : Θ = -π / 3	***$\bar{H}$1*** : Ω = -60° : Θ = +π / 3
	
H2 : Ω = +120° : Θ = -2π / 3	***$\bar{H}$2*** : Ω = -120° : Θ = +2π / 3
	
H3 : Ω = +180° : Θ = -π	***$\bar{H}$3*** : Ω = -180° : Θ = +π
	
H4 : Ω = +240° : Θ = -4π / 3	***$\bar{H}$4*** : Ω = -240° : Θ = +4π / 3
	
H5 : Ω = +300° : Θ = -5π / 3	***$\bar{H}$5*** : Ω = -300° : Θ = +5π / 3
	

Figure 9.21 - *famille de désinclinaisons coin quantifiées dans un arrangement plan hexagonal*

Les multiplets de désinclinaisons coin quantifiées

Il a été montré qu'il ne peut exister de désinclinaisons isolées de vecteur de Frank non nul. Par conséquent, il est nécessaire de combiner plusieurs désinclinaisons à proximité les unes des autres de sorte à ce que le vecteur de Frank obtenu sur un contour entourant toutes ces désinclinaisons soit nul.

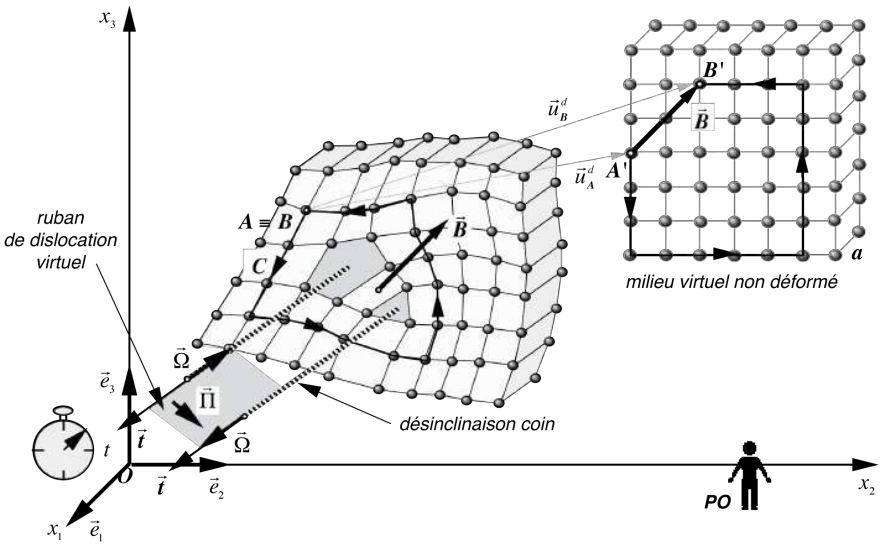


Figure 9.22 - *doublet de désinclinaisons quantifiées de type coin avec ruban de dislocation virtuel*

3 doublets
+90° / -90°
+180° / -180°
+270° / -270°

4 triplets	
+90° / +90° / -180°	*-90° / -90° / +180°*
+90° / +180° / -270°	-90° / -180° / +270°

2 quadruplets	
+90° / +90° / +90° / -270°	-90° / -90° / -90° / +270°

Tableau 9.1 - *les multiplets de désinclinaisons coin quantifiées dans une structure plane cubique*

L'exemple reporté à la figure 9.22 illustre parfaitement ce fait: en couplant deux désinclinaisons coin quantifiées de type $\boldsymbol{C1}$ et $\bar{\boldsymbol{C1}}$ dans une structure cubique simple, le vecteur de Frank total devient nul, et il apparaît un ruban virtuel de dislocation de type coin entre les deux désinclinaisons, de vecteur de Burgers global $\vec{\boldsymbol{B}}$ non nul. Le ruban de dislocation de type coin est similaire à celui représenté à la figure 9.17a et contient donc une *charge surfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$

de flexion. Mais cette charge réelle $\vec{\Pi}$ de flexion n'est pas associée à des dislocations quantifiées réelles du réseau, mais à un ruban virtuel de dislocation coin.

5 doublets
+60° / -60°
+120° / -120°
+180° / -180°
+240° / -240°
+300° / -300°

12 triplets	
+60° / +60° / -120°	*-60° / -60° / +120°*
+60° / +120° / -180°	*-60° / -120° / +180°*
+60° / +180° / -240°	*-60° / -180° / +240°*
+120° / +120° / -240°	*-120° / -120° / +240°*
+60° / +240° / -300°	-60° / -240° / +300°
+120° / +180° / -300°	-120° / -180° / +300°

8 quadruplets	
+60° / +60° / +60° / -180°	*-60° / -60° / -60° / +180°*
+60° / +60° / +120° / -240°	*-60° / -60° / -120° / +240°*
+60° / +120° / +120° / -300°	-60° / -120° / -120° / +300°
+60° / +60° / +180° / -300°	-60° / -60° / -180° / +300°

4 quintuplets	
+60°/+60°/+60°/+60°/-240°	*-60°/-60°/-60°/-60°/+240°*
+60°/+60°/+60°/+120°/-300°	-60°/-60°/-60°/-120°/+300°

2 sextuplets	
60°/+60°/+60°/+60°/+60°/-300°	-60°/-60°/-60°/-60°/-60°/300°

Tableau 9.2 - *les multiplets de désinclinaisons coin quantifiées dans une structure plane hexagonale*

On peut retrouver les multiplets de désinclinaisons de vecteur de Frank nul qu'il est possible de construire sur la base des désinclinaisons coin quantifiées que nous avons décrites dans le cas du réseau cubique simple de la figure 9.19a. Les multiplets de base de vecteur de Frank nul, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent pléus être ultérieurement décomposés en deux ou plusieurs multiplets de vecteur de Frank nul, sont reportés dans le tableau 9.1. On constate que, dans un réseau cubique simple, il peut exister 3 doublets, 4 triplets et 2 quadruplets.
Dans le cas du réseau de la figure 9.19b, avec des plans présentant une structure hexagonale

des particules, il peut exister 5 doublets, 12 triplets, 8 quadruplets, 4 quintuplets et 2 sextuplets comme le montre le tableau 9.2.

Dans les deux tableaux, les multiplets composés avec des désinclinaisons $C3$ (+270°) ou $H5$ (+300°) sont grisés, car ils pourraient ne pas exister, par exemple dans des milieux structurés n'autorisant pas de connecter entre elles deux liaisons d'une même «particule».

Exemples de multiplets de désinclinaisons coin quantifiées dans la structure cubique

Dans cette section, à titre d'exemples, on représente quelques *cas imaginaires de doublets et de triplets de désinclinaisons dans la structure cubique simple* (figures 9.23 à 9.28). Pour chaque cas représenté, on indique dans un carré en encart le nombre de dislocations coins émergeant sur chaque côté de la figure quadrangulaire ***ABCD***. Ce nombre de dislocations coin est composé d'un nombre fixe dépendant du nombre de désinclinaisons mises en jeu et de leur disposition respective, auquel s'ajoute un certain nombre de dislocations coin dues à l'insertion de n_i plans additionnelles de «particules» placés entre les désinclinaisons pour varier la distance les séparant (ces plans additionnels sont reportés en rouge dans les figures).

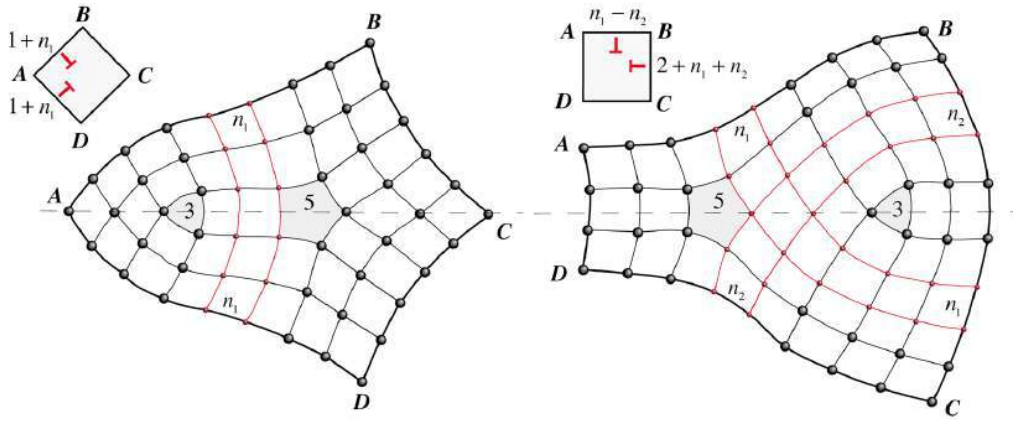


Figure 9.23 - *les doublets* $C1 - \overline{C1}$ *de désinclinaisons coin dans un réseau cubique*

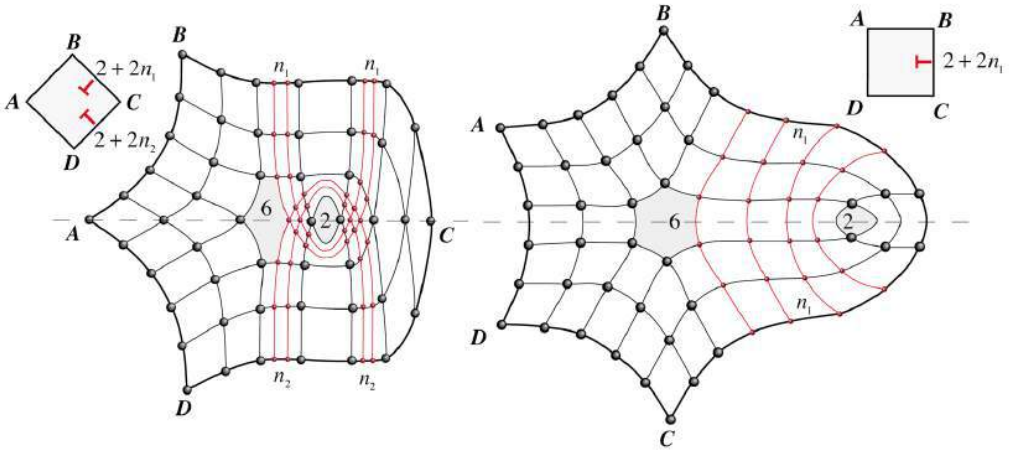


Figure 9.24 - *les doublets* $C2 - \overline{C2}$ *de désinclinaisons coin dans un réseau cubique*

Dans les figures 9.23 et 9.24, on a reporté des doublets $C1-\bar{C}1$ et $C2-\bar{C}2$ respectivement, en variant dans chaque cas l'orientation du doublet par rapport à la structure cristalline (avec un angle de 45° et de 0° respectivement par rapport à la structure). On remarque immédiatement que, dans le cas de doublets, il existe toujours un nombre fixe de dislocations coin émergeant de la figure quadrangulaire ***ABCD***, et que l'addition de plans intercalaires fait augmenter systématiquement ce nombre.

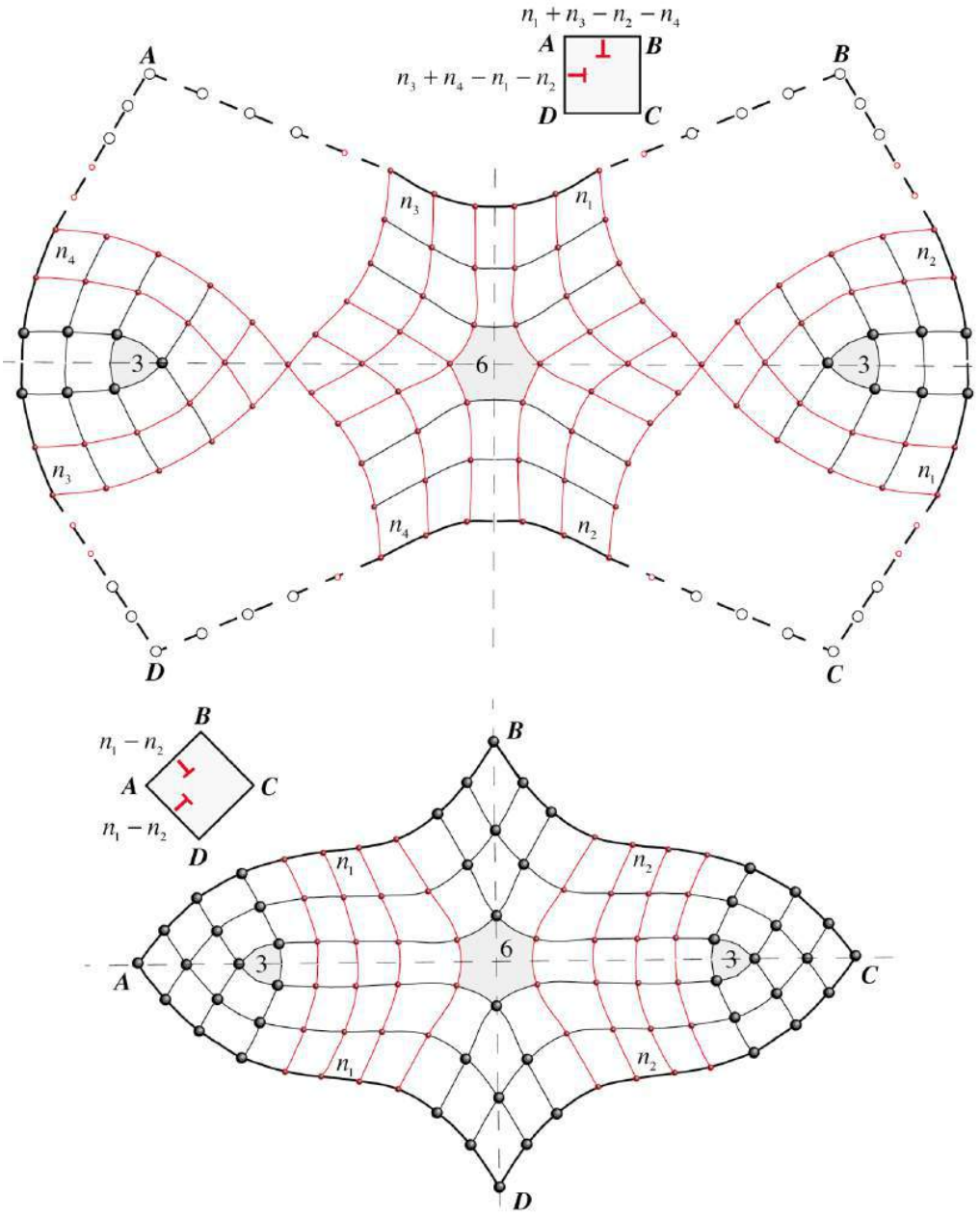


Figure 9.25 - *des triplets* $C1-\bar{C}2-C1$ *de désinclinaisons coin dans un réseau cubique*

Dans la figure 9.25, on a reporté des triplets $C1-\bar{C}2-C1$, en variant à nouveau la direction d'alignement de ces triplets avec la structure (0° et 45° respectivement), alors que dans la figure 9.26, on a reporté le triplet $C1-\bar{C}2-C1$ et son «antiparticule» $\bar{C}1-C2-\bar{C}1$.

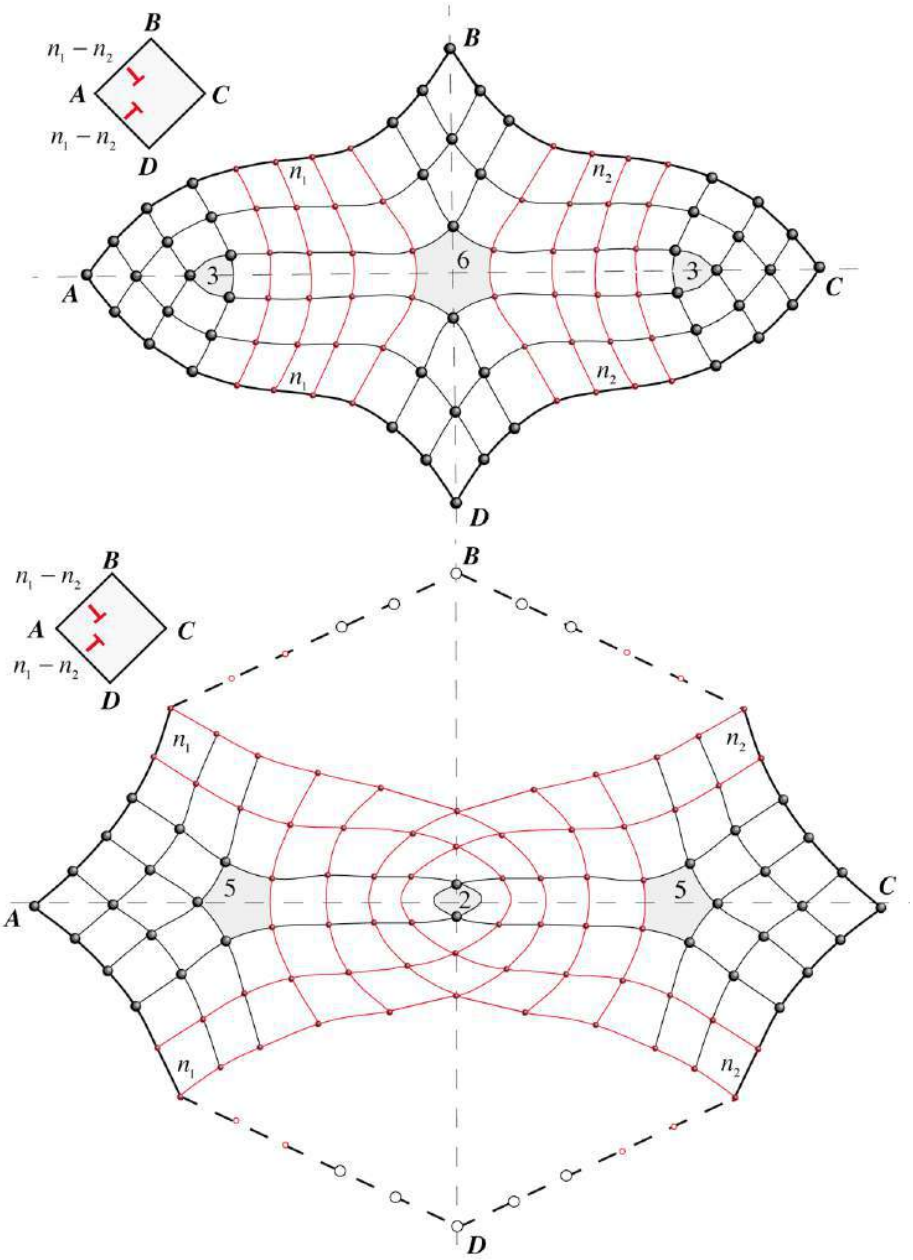


Figure 9.26 - *les triplets* $C1 - \bar{C}2 - C1$ *et* $\bar{C}1 - C2 - \bar{C}1$ *de désinclinaisons coin dans réseau cubique*

Dans tous ces cas de triplets, pour lesquels les désinclinaisons composantes sont alignées sur un axe, on constate que, si les plans additionnels intercalaires sont placés de manière symétrique, ces triplets sont parfaitement symétriques et il n'y a aucune dislocation coin qui émerge de la figure quadrangulaire **ABCD**. Cependant, même si aucune dislocation coin n'émerge, il est clair qu'il existe une forte déformation locale du réseau, à laquelle doit correspondre une énergie de déformation qui n'est rien d'autre que l'énergie de formation du triplet. De plus, l'introduction de de plans intercalaires additionnels symétriques à comme conséquence d'augmenter la distance entre les désinclinaisons du triplet, et d'augmenter ainsi l'énergie du triplet.
Dans la figure 9.27, on a reporté à nouveau des triplets $C1 - \bar{C}2 - C1$, mais cette fois en variant la disposition spatiale respective des désinclinaisons les unes par rapport aux autres.

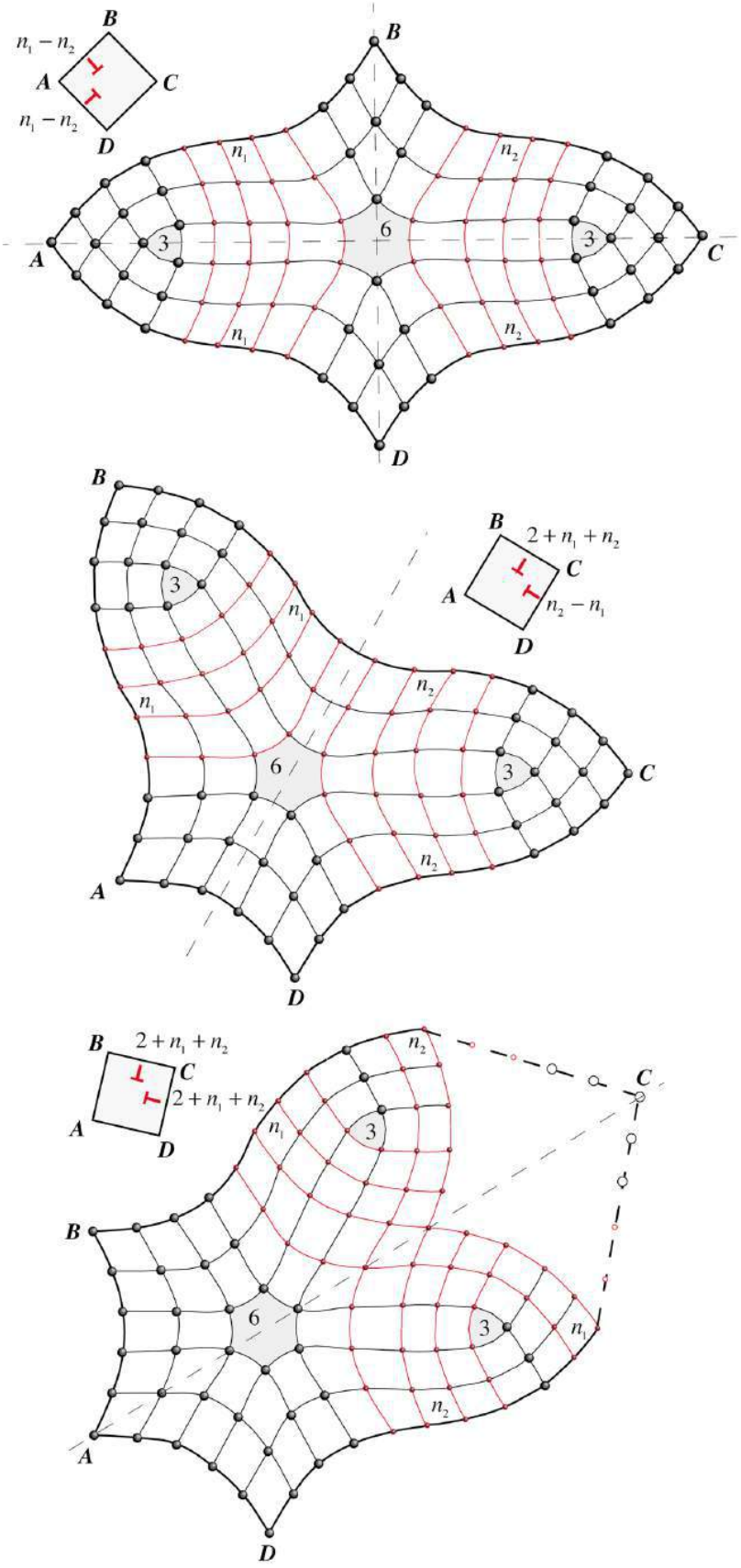


Figure 9.27 - *les différentes dispositions spatiales des triplets* $C1 - \bar{C}2 - C1$

Les angles formés par les droites reliant les deux désinclinaisons $C1$ à la désinclinaison $\bar{C}2$ y sont respectivement de 180°, 120° et 60°. On constate que la dissymétrisation du triplet, dans les cas à 120° et 60°, fait apparaître un nombre fixe de dislocations coin émergeant de la figure quadrangulaire ***ABCD***, et que ce nombre augmente avec la dissymétrisation, puisqu'il passe de 2 à 4 lorsque l'angle passe de 120° à 60°. On imagine aisément sur la base de ces figures que, dans tous les cas, une augmentation de la distance entre les désinclinaisons du triplet par addition de plans intercalaires ne peut qu'augmenter l'énergie du triplet!

Finalement, dans la figure 9.28, on a reporté des exemples de triplets plus «exotiques», en dessinant deux configurations spatiales différentes du triplet $C2 - \bar{C}3 - C1$.

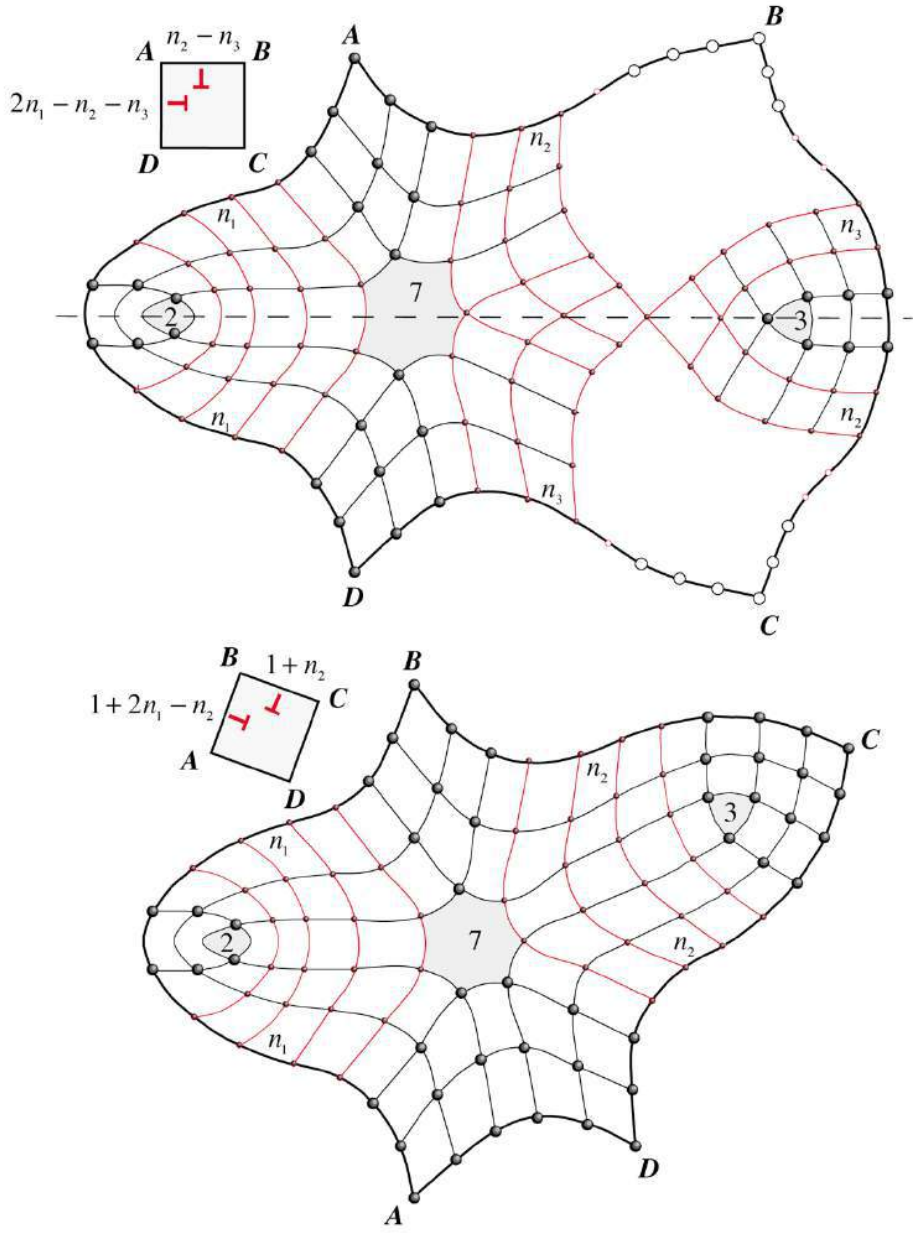


Figure 9.28 - *deux configurations spatiales du triplet* $C2 - \bar{C}3 - C1$

Les rubans de dislocations virtuelles liant les désinclinaisons dans un multiplet

Tous les exemples que nous avons illustrés dans la section précédente montrent bien que chaque multiplet de désinclinaisons peut présenter un grand nombre de configurations différentes, qui dépendent du nombre de désinclinaisons composant le multiplet, de la disposition spatiale des désinclinaisons le composant et du nombre et de la disposition des plans intercalaires. D'ailleurs, on peut bien imaginer que les multiplets obtenus dans une structure hexagonale doivent présenter encore une plus grande multitude de configurations différentes puisque le nombre de singulets, c'est-à-dire de désinclinaisons quantifiées, y est supérieur et que le nombre d'angles possibles entre les bras des multiplets y est aussi supérieur. Il serait par conséquent très commode de trouver une manière mathématique de caractériser les différentes configurations pouvant apparaître pour un multiplet donné, dans une structure donnée. Nous allons traiter les cas d'un doublet et d'un triplet de désinclinaisons coin, les autres multiplets pouvant se traiter aisément de façon similaire.

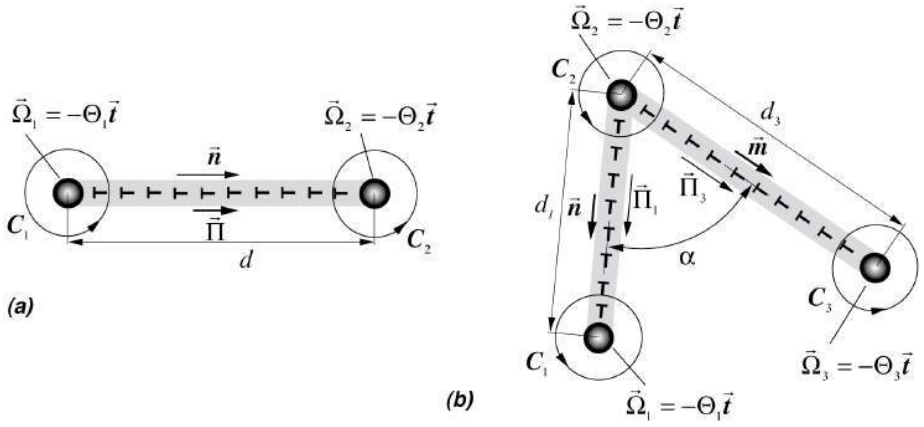


Figure 9.29 - *rubans de dislocations virtuels d'un doublet* ***(a)*** *et d'un triplet* ***(b)*** *de désinclinaisons coin*

Dans le cas du doublet représenté à la figure 9.29a, les deux désinclinaisons sont séparées d'un distance d, et la direction du doublet est celle donnée par le vecteur unité $\vec{\boldsymbol{n}}$. Les désinclinaisons du doublet sont caractérisées par les vecteurs de Frank $\vec{\Omega}_1 = -\Theta_1\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\Omega}_2 = -\Theta_2\vec{\boldsymbol{t}}$. Comme nous l'avons vu précédemment, les désinclinaisons du doublet sont obligatoirement liées par l'existence de dislocations virtuelles, que nous allons représenter par une membrane de dislocation de longueur d reliant les désinclinaisons et contenant une densité surfacique vectorielle $\vec{\Pi}$ de charges de dislocation, avec $\vec{\Pi} \,||\, \vec{\boldsymbol{n}}$. En appliquant alors la relation *(9.38)*, sur les contours $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$, il vient les relations

$$\begin{cases} \Theta_1 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_1\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{n}} \\ \Theta_2 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_2\vec{\boldsymbol{t}} = -\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{n}} \end{cases} \qquad (9.40)$$

dont on déduit logiquement que $\Theta_1 = -\Theta_2$.

A grande distance, le doublet de désinclinaisons peut être considéré comme une dislocation coin de densité linéique de charge $\vec{\Lambda}$ donnée par la relation

$$\vec{\Lambda} = d\,\vec{\Pi} = d\,\Theta_1\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (9.41)$$

On constate donc que la dislocation équivalente au doublet de désinclinaisons présente un vec-

teur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ proportionnel à la densité scalaire de charge Θ_1 et à la distance d séparant les désinclinaisons

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda} = d\,\Theta_1\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (9.42)$$

Comme le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ associé à la charge $\vec{\Lambda}$ doit être quantifié dans un réseau, la valeur minimale $d_{\min}$ de la distance d, obtenue lorsqu'il n'y a pas de plans intermédiaires entre les deux désinclinaisons du doublet, satisfait

$$d_{\min} = \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} / \Theta_1 \qquad (9.43)$$

Considérons alors le cas des doublets $\boldsymbol{C1-\bar{C}1}$, $\boldsymbol{C2-\bar{C}2}$ et $\boldsymbol{C3-\bar{C}3}$ dans un milieu cubique simple, en supposant qu'il n'existe pas de plans intermédiaires comme ceux placés entre les désinclinaisons des doublets aux figures 9.23 et 9.24. Comme $\Theta_1 = i\pi/2$ dans le réseau cubique, avec $i = 1,2,3$ suivant le doublet $\boldsymbol{Ci-\bar{C}i}$ considéré, la valeur $d_{\min}$ satisfait alors

$$d_{\min} = \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} / \Theta_1 = 2\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} / i\pi \qquad (9.44)$$

dans laquelle $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min}$ doit être un multiple du pas de réseau a, ou de la diagonale $a\sqrt{2}$ du carré de base. Ainsi, on a par exemple:

- dans le cas de la figure 19.30a , $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} = a\sqrt{2}$ et $i = 1$, d'où $d_{\min} = 2a\sqrt{2}/\pi = 0,9a$,
- dans le cas de la figure 19.30b , $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} = 2a$ et $i = 1$, d'où $d_{\min} = 4a/\pi = 1,28a$,
- dans le cas de la figure 19.31a , $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} = 2a\sqrt{2}$ et $i = 2$, d'où $d_{\min} = 4a\sqrt{2}/\pi = 1,8a$,
- dans le cas de la figure 19.30a , $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} = 2a$ et $i = 2$, d'où $d_{\min} = 2a/\pi = 0,64a$.

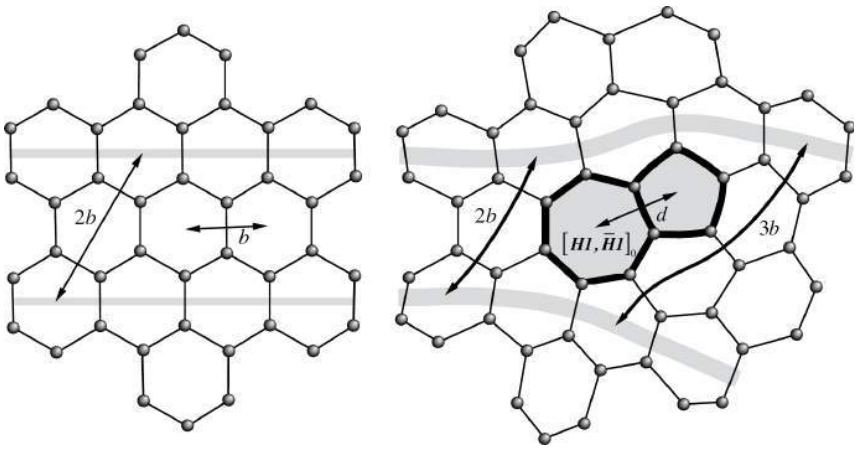


Figure 9.30 - *illustration du doublet* $\boldsymbol{H1-\bar{H}1}$ *et des distances* b *et* d

Dans le cas d'un réseau hexagonal parfait[12], le vecteur de Burgers doit se quantifier comme un multiple de la distance b séparant deux hexagones dans le milieu parfait. Pour le doublet $\boldsymbol{H1-\bar{H}1}$ représenté à la figure 9.30, on a $\Theta_1 = \pi/3$ et on constate que $\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} = b$, de sorte que $d_{\min} = \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|_{\min} / \Theta_1 = 3b/\pi \cong 0,955b$.

Dans le cas du triplet représenté à la figure 9.29b, les trois désinclinaisons sont séparées des

---

[12] *Des multiplets de désinclinaisons coin conduisant à l'apparition de dislocations coin peuvent être clairement observés dans le réseau hexagonal du graphène. Voir: J. C. Meyer, C. Kisielowski, R. Erni, M. D. Rossell, M. F. Crommie, A. Zettl, Nano Lett., vol. 8(11), p. 3582, 2008; M. P. Ariza, M. Ortiz, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 58, p. 710, 2010*

distances d_1 et d_3 respectivement, et les directions des deux branches du triplet sont celles données par les vecteur unité $\vec{\boldsymbol{n}}$ et $\vec{\boldsymbol{m}}$, de sorte que l'angle α formé par les deux branches est donné par la relation $\cos\alpha = \vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{m}}$. Les désinclinaisons du triplet sont caractérisées par les vecteurs de Frank $\vec{\Omega}_1 = -\Theta_1\vec{\boldsymbol{t}}$, $\vec{\Omega}_2 = -\Theta_2\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\Omega}_3 = -\Theta_3\vec{\boldsymbol{t}}$. Ils sont obligatoirement liées par l'existence de dislocations virtuelles, que nous allons repésenter par deux membranes de dislocations de longueur d_1 et d_3 reliant les désinclinaisons et contenant une densité surfacique vectorielle $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_3$ de charges de dislocation, avec $\vec{\Pi}_1 \| \vec{\boldsymbol{n}}$ et $\vec{\Pi}_3 \| \vec{\boldsymbol{m}}$. En appliquant alors la relation *(9.38)*, sur les contours $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ et $\boldsymbol{C}_3$, il vient les relations

$$\begin{cases} \Theta_1 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_1\vec{\boldsymbol{t}} = -\vec{\Pi}_1\vec{\boldsymbol{n}} \\ \Theta_2 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_2\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Pi}_1\vec{\boldsymbol{n}} + \vec{\Pi}_3\vec{\boldsymbol{m}} \\ \Theta_3 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_3\vec{\boldsymbol{t}} = -\vec{\Pi}_3\vec{\boldsymbol{m}} \end{cases} \qquad (9.45)$$

dont on déduit logiquement que $\sum\Theta_i = 0$.
A grande distance, le triplet de désinclinaisons peut être considéré comme deux cordes de dislocations coin parallèle de densités linéiques de charge $\vec{\Lambda}_1$ et $\vec{\Lambda}_3$ données par les relations

$$\begin{cases} \vec{\Lambda}_1 = d_1\vec{\Pi}_{(1)} = -d_1\Theta_1\vec{\boldsymbol{n}} \\ \vec{\Lambda}_3 = d_3\vec{\Pi}_{(3)} = -d_3\Theta_3\vec{\boldsymbol{m}} \end{cases} \qquad (9.46)$$

Ces deux dislocations parallèles peuvent être remplacées par une seule dislocation équivalente au triplet de désinclinaisons, qui présente un vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ donné par la relation

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda} = -d_1\Theta_1\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) - d_3\Theta_3\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{m}}\right) \qquad (9.47)$$

Dans le cas d'un triplet symétrique avec une alignement des trois désinclinaisons sur une seule ligne (figures 9.29 et 9.30), on a $\vec{\boldsymbol{m}} = -\vec{\boldsymbol{n}}$, et le vecteur de Burgers total s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda} = \left(d_3\Theta_3 - d_1\Theta_1\right)\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (9.48)$$

En ce cas, si $d_3\Theta_3 = d_1\Theta_1$, le triplet ne présente aucun vecteur de Burgers global à distance, mais seulement deux vecteurs de Burgers locaux qui s'annulent.
D'après les relations *(9.41)* et *(9.46)*, l'énergie d'un multiplet associé aux déformations locales induites dans le réseau ne peut qu'augmenter si les distances d_i séparant les désinclinaisons du multiplet augmentent. Ceci implique qu'il existe une force d'attraction entre les désinclinaisons qui augmente plus on sépare ces désinclinaisons. Par analogie avec la dénomination dans le Modèle Standard des particles élémentaires, on pourrait parler ici d'une *force de nature forte* liant entre elles les désinclinaisons du multiplet, et on pourrait assimiler les rubans de dislocations virtuels de charges vectorielles $\vec{\Pi}_i$ à des sortes de *gluons*, puisque ce sont ces charges virtuelles qui lient entre elles les désinclinaisons, et qui interdisent d'en isoler une seule.

9.4 – Cordes et lignes de dispiration et réseaux solides à symétrie axiale

On appellera *cordes de dispiration*, ou *lignes de dispiration* ou tout simplement *dispirations*, des cordes mixtes résultant de la combinaison d'une corde ou d'une ligne de désinclinaison avec

une corde ou une ligne de dislocation. A noter que le vocable de *«dispiration»*[13] est un anglicisme importé tel quel de l'anglais car il n'existe aucune traduction française de ce terme.

Les combinaisons de désinclinaisons coin avec des dislocations coin

La figure 9.31 présente deux exemples de dispirations composées d'une désinclinaison coin et d'une dislocation coin, représentées dans le plan dense d'une structure cubique à faces centrées ou d'une structure hexagonale. A partir du plan dense du cristal parfait ***(a)***, on construit une désinclinaison coin avec $\boldsymbol{\Omega}$ =+60° ***(b)***. En coupant alors le cristal selon la ligne ***A-B***, et en rajoutant une ligne de particules ***A'-B'***, on introduit une dislocation coin de densité linéique $\vec{\Lambda}$ au coeur de la désinclinaison ***(c)***. De même, en retirant les particules selon la ligne ***C-D*** dans la figure 9.31 ***(b)***, et en recollant cette mâchoire avec les particules de la ligne ***A-B***, on introduit à nouveau une dislocation coin de densité linéique $\vec{\Lambda}$ au coeur de la désinclinaison, comme représenté en ***(d)*** dans la figure 9.31.

L'absorption et l'émission de dislocations coin par une désinclinaison coin quantifiée est le processus de base qui permet d'expliquer le déplacement d'une désinclinaison au sein d'un réseau[14]. On laissera ici aux lecteurs le soin d'essayer d'illustrer ce type de processus!

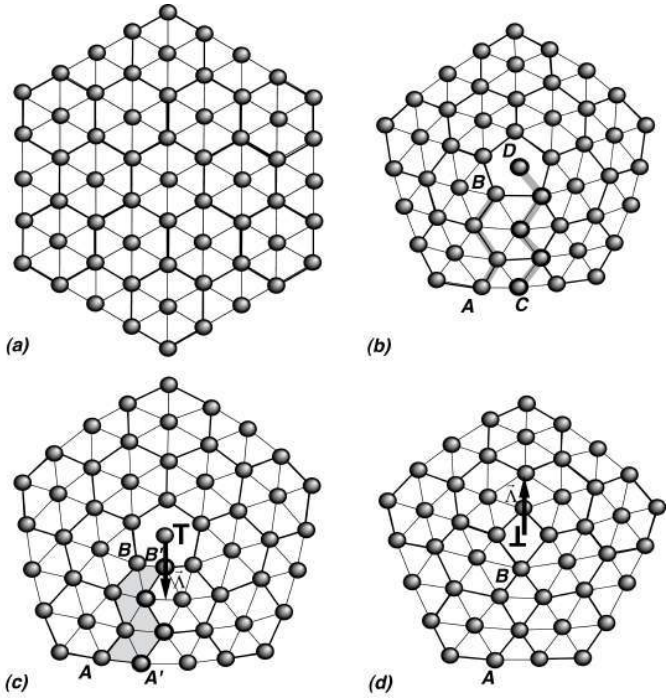


Figure 9.31 - *dispirations* ***(c)*** *et* ***(d)*** *par combinaison d'une désinclinaison coin* ***(b)*** *avec une dislocation coin dans le plan dense d'un réseau cubique à faces centrées ou d'un réseau hexagonal*

Les réseaux avec une symétrie axiale

On peut imaginer des réseaux qui présentent une certaine symétrie axiale des particules le composant, comme les réseaux cubiques ***(a)*** et ***(b)*** et hexagonaux ***(c)*** et ***(d)*** illustrés dans la

---

[13] *W. F. Harris, Philos. Mag. 22, p. 949, 1970; W. F. Harris, Sci. Am. 237(12), p. 130, 1977*

[14] *W. F. Harris, L. E. Scriven, J. Appl. Phys. 42 , p 3309, 1971; R. deWit, J. Appl. Phys. 42, p. 3304, 1971*

figure 9.32. Cette symétrie axiale des particules peut présenter simplement une direction privilégiée des particules dans les plans de la structure, comme dans les cas ***(a)*** et ***(c)***, ou peut présenter une direction et un sens préférentiels comme dans les cas ***(b)*** et ***(d)***. Ce type de réseau présente donc une structure alternée de couches successives ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ...

De plus, le sens de rotation des axes des particules le long de l'axe vertical produit un milieu orienté, qu'on qualifie de *dextrogyre (right-handed)* dans le cas ***(b)***, et de *lévogyre (left-handed)* dans les cas ***(c)*** et ***(d)***.

S'il est interdit de rompre l'orientation axiale des particules dans un plan, il n'est pas possible d'introduire une dislocation vis orientée verticalement avec un vecteur de Burgers quelconque. En effet, si la distance entre les plans horizontaux vaut a, afin d'assurer la continuité de l'orientation des particules, et aussi de leur sens dans les cas ***(b)*** et ***(d)***, il faut que la longueur du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ de la dislocation vis soit égale à $\pm 2a$ dans le cas ***(a)***, $\pm 4a$ dans le cas ***(b)***, $\pm 3a$ dans le cas ***(c)*** et $\pm 6a$ dans le cas ***(d)***.

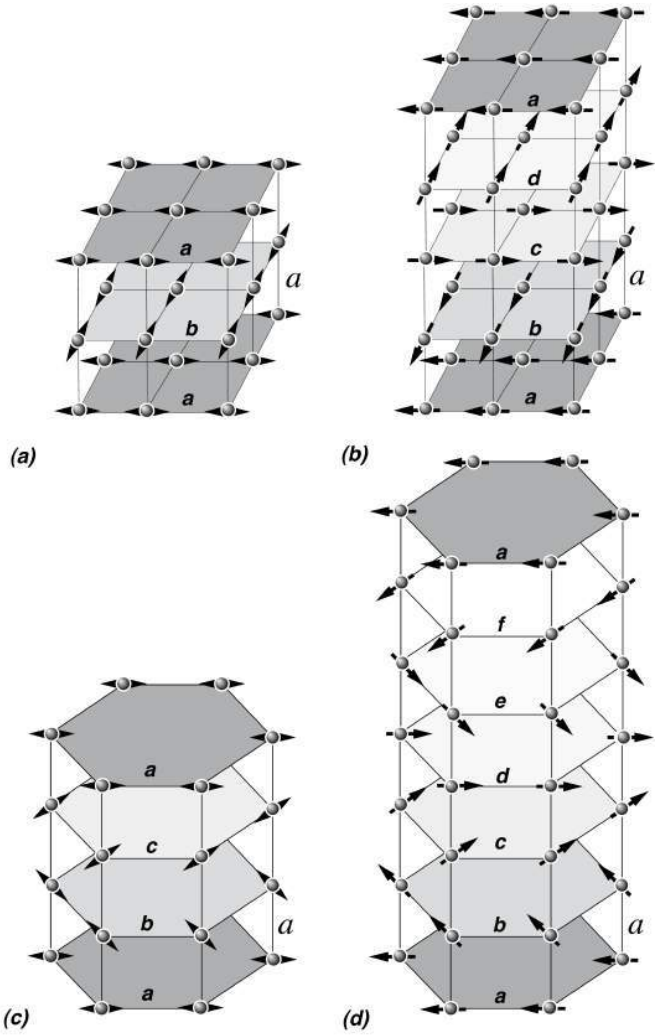


Figure 9.32 - *réseaux cubique et hexagonal présentant une symétrie axiale des particules de type dextrogyre (right-handed) en* ***(b)*** *et de type lévogyre (left-handed) en* ***(c)*** *et* ***(d)***

La dissociation des dislocations vis et la «force forte» liant les partielles

Dans les milieux à symétrie axiale tels ceux reportés à la figure 9.32, les dislocations vis doivent présenter des vecteurs de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ dont les longueurs sont des multiples de la longueur a du pas de réseau. En ce cas, les dislocations vis peuvent avoir intérêt à se scinder en partielles avec des vecteurs de Burgers de longueur a, en formant respectivement 2, 4, 3 ou 6 partielles dans les cas ***(a)*** à ***(d)*** respectivement. Entre les dislocations partielles se forment des *rubans de fautes de raccordement* entre plans axiaux ***ab***, ***bc***, ***cd***, etc. La distance de séparation des partielles dépend alors de l'énergie γ par unité de surface de la faute de raccordement.
Par exemple, la figure 9.33 illustre cette dissociation dans le cas du réseau axial ***(c)***. En ce cas, les dislocations vis ont intérêt à se dissocier en trois partielles de vecteurs de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_1$, $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ et $\vec{\boldsymbol{B}}_3$, tous de longueur a, de sorte que $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis} = \vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_2 + \vec{\boldsymbol{B}}_3$. Dans le cas de cette dissociation, puisque la longueur de $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ est de $3a$, on a $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2 = 3\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1^2 + \vec{\boldsymbol{B}}_2^2 + \vec{\boldsymbol{B}}_2^2\right)$ et comme l'énergie de distorsion du réseau due aux dislocations est proportionnelle au carré du vecteur de Burgers, l'énergie des trois partielles isolées est 3 fois moindre que l'énergie de la dislocation vis originale. Si le ruban de faute de raccordement possède une énergie γ par unité de surface, l'énergie totale $E_t(d)$ par unité de longueur de dislocation pour une dislocation vis dissociée sur des distances d s'écrit $E_t(d) = 2\gamma d + E_d(d)$ où $E_d(d)$ est l'énergie des trois partielles en fonction de la distance d les séparant, qui est une fonction monotone décroissante diminuant de E_0 pour $d = 0$ à $E_0 / 3$ pour $d \to \infty$ dans le cas des partielles illustrées à la figure 9.33.

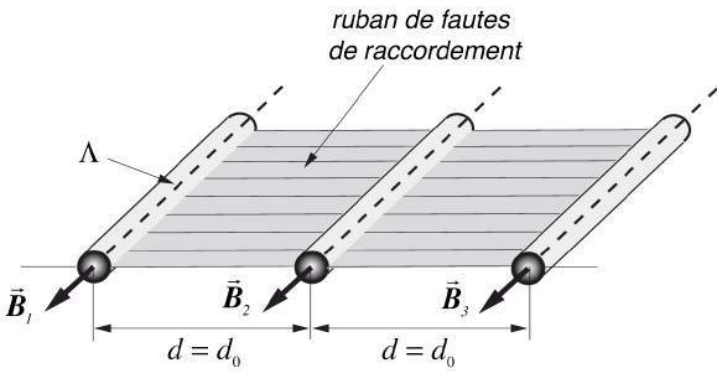


Figure 9.33 - *dissociation d'une dislocation vis en trois partielles dans le cas du réseau axial* ***(c)***

L'énergie $E_t(d)$ présente donc un minimum similaire à celui reporté à la figure 9.10 pour la distance $d = d_0$, qui est la distance d'équilibre entre les trois partielles, contrôlée par la compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute de raccordement entre les trois partielles. Ce comportement de l'énergie $E_t(d)$ induit une force d'interaction entre les partielles qu'on peut tout-à-fait qualifier de *force forte*, au sens que l'énergie du triplet de partielles va augmenter si on essaie d'augmenter la distance de séparation au-delà de d_0. Cette force forte présente donc dans son comportement une analogie intéressante avec la force forte agissant entre des quarks dans le Modèle Standard des particules élémentaires.

Les dispirations structurelles dans les réseaux avec une symétrie axiale

On imagine alors immédiatement qu'il doit aussi exister des conditions de raccordement assurant la continuité de la symétrie axiale si on veut introduire une désinclinaison dans un tel réseau. En fait, pour s'assurer de cette continuité, il faudra obligatoirement associé à la désinclinaison une dislocation vis avec le bon vecteur de Burgers $\vec{B}$. Il apparaît donc ici une nécessité structurelle d'introduire des dispirations dans de tels milieux[15].

La figure 9.34 illustre parfaitement ce propos. En effet, pour introduire une désinclinaison Ω = +90° dans le milieu représenté à la figure 9.32 **(b)**, il est nécessaire de lui ajouter une dislocation vis correctement orientée, de vecteur de Burgers $\vec{B}$ et de longueur a, qui assure la continuité de l'orientation axiale des particules sur les plans du milieu. A noter qu'une dislocation vis de vecteur de Burgers de sens opposé et de longueur $3a$ aurait aussi pu assurer la continuité de l'orientation axiale des particules sur les plans du milieu, de sorte qu'il existe deux dispirations différentes de rotation Ω =+90° , toutes deux avec une charge linéique de courbure de $\Theta = -\pi / 2$, mais se différenciant par leur vecteur de Burgers $\vec{B}$ associé à une charge linéique de rotation Λ valant $\Lambda = a$ ou $\Lambda = -3a$.

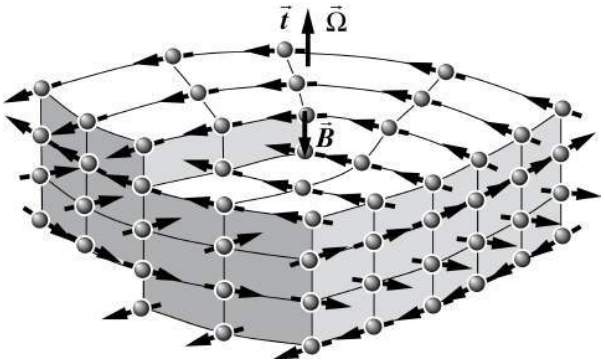


Figure 9.34 - *dispiration de +90° introduite dans le milieu axial de la figure 9.32* ***(b)*** *montrant bien la nécessité d'ajouter un vecteur de translation* $\vec{B}$ *pour assurer la continuité axiale*

Il n'est pas trop difficile de rechercher quelles charges linéiques de torsion Λ doivent être associées aux différentes dispirations coin de charge linéique de courbure Θ qu'on peut introduire dans les structures cubiques et hexagonales représentées à la figure 9.32.

Dans le tableau 9.3, on a reporté ces charges pour les structures cubiques de la figure 9.32 ***(a)*** et ***(b)***. Dans le cas ***(a)***, la structure ne présente pas de différence entre une *orientation dextrogyre* et une *orientation lévogyre* des particules du réseau. Par contre, il apparaît une différence entre ces deux orientations dans le cas ***(b)***, ce qui implique un changement de signe de la charge Λ entre les milieux dextrogyre et lévogyre.

Dans le tableau 9.4, on a reporté les charges Θ et Λ pour les structures hexagonales de la figure 9.32 ***(c)*** et ***(d)***. Comme il existe dans les deux cas une différence entre les orientations dextrogyre et lévogyre du milieu, il apparaît les deux fois un changement de signe de la charge Λ entre ces deux orientations axiales.

---

[15] *W. F. Harris, «Geometry of Desinclinations in Crystals», in Surface and Defect Properties of Solids, volume 3, ed. by M. W. Roberts, J. M. Thomas, The Chemical Society, London, 1974*

	Θ	$\Lambda_{(a)}$	$\Lambda_{(b)}^{(dextrogyre)}$	$\Lambda_{(b)}^{(lévogyre)}$
vis	0	$\pm 2a$	$\pm 4a$	$\pm 4a$
C1	$-\pi / 2$	$\pm a$	$+a\ ,\ -3a$	$-a\ ,\ +3a$
$\bar{\boldsymbol{C}}$***1***	$+\pi / 2$	$\pm a$	$-a\ ,\ +3a$	$+a\ ,\ -3a$
C2	$-\pi$	$0\ ,\ \pm 2a$	$+2a\ ,\ -2a$	$+2a\ ,\ -2a$
$\bar{\boldsymbol{C}}$***2***	$+\pi$	$0\ ,\ \pm 2a$	$+2a\ ,\ -2a$	$+2a\ ,\ -2a$
C3	$-3\pi / 2$	$\pm a$	$-a\ ,\ +3a$	$+a\ ,\ -3a$
$\bar{\boldsymbol{C}}$***3***	$+3\pi / 2$	$\pm a$	$+a\ ,\ -3a$	$-a\ ,\ +3a$

Tableau 9.3 - *charges linéiques de courbure Θ et de rotation Λ des dispirations dans les structures cubiques de la figure 9.39* ***(a)*** *et* ***(b)***

	Θ	$\Lambda_{(c)}^{(dextrogyre)}$	$\Lambda_{(c)}^{(lévogyre)}$	$\Lambda_{(d)}^{(dextrogyre)}$	$\Lambda_{(d)}^{(lévogyre)}$
vis	0	$\pm 3a$	$\pm 3a$	$\pm 6a$	$\pm 6a$
H1	$-\pi / 3$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -5a$	$-a\ ,\ +5a$
$\bar{\boldsymbol{H}}$***1***	$+\pi / 3$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +5a$	$+a\ ,\ -5a$
H2	$-2\pi / 3$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -2a$	$+2a\ ,\ -4a$	$-2a\ ,\ +4a$
$\bar{\boldsymbol{H}}$***2***	$+2\pi / 3$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +2a$	$-2a\ ,\ +4a$	$+2a\ ,\ -4a$
H3	$-\pi$	$0\ ,\ \pm 3a$	$0\ ,\ \pm 3a$	$\pm 3a$	$\pm 3a$
$\bar{\boldsymbol{H}}$***3***	$+\pi$	$0\ ,\ \pm 3a$	$0\ ,\ \pm 3a$	$\pm 3a$	$\pm 3a$
H4	$-4\pi / 3$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +2a$	$-2a\ ,\ +4a$	$+2a\ ,\ -4a$
$\bar{\boldsymbol{H}}$***4***	$+4\pi / 3$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -2a$	$+2a\ ,\ -4a$	$-2a\ ,\ +4a$
H5	$-5\pi / 3$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +5a$	$+a\ ,\ -5a$
$\bar{\boldsymbol{H}}$***5***	$+5\pi / 3$	$+a\ ,\ -2a$	$-a\ ,\ +2a$	$+a\ ,\ -5a$	$-a\ ,\ +5a$

Tableau 9.4 - *charges linéiques de courbure Θ et de rotation Λ des dispirations dans les structures hexagonales de la figure 9.35* ***(c)*** *et* ***(d)***

Avec les dispirations des tableaux 9.3 et 9.4, il serait possible de construire dans chacun de ces quatre milieux des doublets et des triplets de cordes dispiratives présentant une charge linéique globale Θ nulle, et une certaine charge linéique globale Λ qui peut être nulle ou non, sur la base des modèles reportés à la figure 9.29.

9.5 – Boucles de dislocation et de désinclinaison

Pour satisfaire l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i = 0$, une corde de dislocation ou de désinclinaison ne peut pas s'interrompre brusquement au sein du milieu. Par contre, une telle corde se refermant sur elle-même pour former une boucle localisée satisfait toujours l'équation de conservation. Dans cette section, on va donc présenter ce type de boucles ainsi que leurs propriétés dans un réseau solide. Pour simplifier le traitement mathématique des boucles, il est judicieux de commencer par développer des outils mathématiques appropriés.

La géométrie vectorielle des boucles de cordes chargées

Pour développer un outil mathématique permettant de décrire simplement la géométrie vectorielle des *cordes rectilignes ou courbes*, on considère une corde circulaire de rayon R cheminant dans l'espace tridimensionnel (fig. 9.35).
Sachant que cette corde est «chargée» des densités volumiques vectorielles $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et de la densité volumique scalaire c, on cherche à traduire les opérateurs vectorielles agissant sur les densités de charge contenues dans la corde, à savoir $c = \mathrm{div}\vec{b}$ et $b = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$, en opérateurs agissant sur les charges linéiques $\vec{A}$, $\vec{B}$ et C, définies sur la fibre centrale de la corde par

$$\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{a}\, d\vec{S} \quad ; \quad \vec{B} = \iint_{S_1} \vec{b}\, d\vec{S} \quad ; \quad C = \iint_{S_1} c\, dS \qquad (9.49)$$

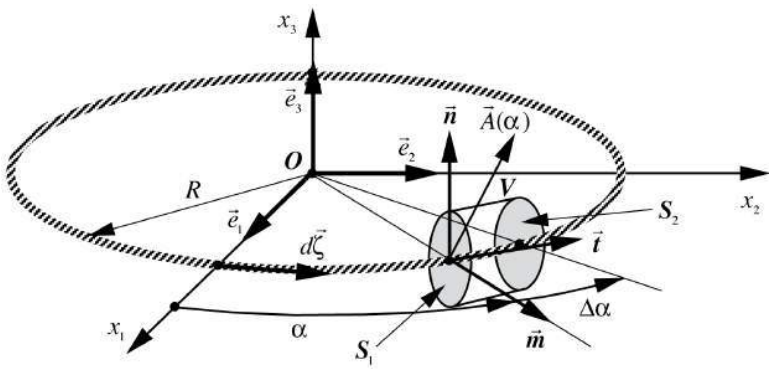


Figure 9.35 - *géométrie vectorielle d'une boucle de corde*

Il est utile de définir au préalable les charges linéiques $\vec{A}$, $\vec{B}$ et C comme des fonctions de l'angle α le long de la boucle, et de les exprimer dans le référentiel local naturel tangent de la corde, défini par les vecteurs unités $\vec{\boldsymbol{m}}$, $\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{n}}$, en écrivant

$$\begin{cases} \vec{A} = A_m(\alpha)\vec{\boldsymbol{m}} + A_t(\alpha)\vec{\boldsymbol{t}} + A_n(\alpha)\vec{\boldsymbol{n}} \\ \vec{B} = B_m(\alpha)\vec{\boldsymbol{m}} + B_t(\alpha)\vec{\boldsymbol{t}} + B_n(\alpha)\vec{\boldsymbol{n}} \\ C = C(\alpha) \end{cases} \qquad (9.50)$$

Dans le cas de l'opérateur divergence, il est possible de calculer l'intégrale de $c = \mathrm{div}\vec{b}$ sur un élément de volume V compris dans le secteur angulaire $[\alpha, \alpha + \Delta\alpha]$ (fig. 9.35). Avec le théorème de la divergence, on obtient

$$\iiint_V c\,dV = \iiint_V \mathrm{div}\vec{b}\,dV = \oiint_S \vec{b}\,d\vec{S} = \vec{t}\,\vec{B}\big|_{S_2} - \vec{t}\,\vec{B}\big|_{S_1} \qquad (9.51)$$

qui peut encore s'écrire, en exprimant différemment l'intégrale sur le volume, comme

$$R\Delta\alpha \iint_{S_1} c\,dS = R\Delta\alpha C = \left[\vec{B}(\alpha + \Delta\alpha) - \vec{B}(\alpha)\right]\vec{t} \qquad (9.52)$$

de sorte que C est donnée par la relation

$$C = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{1}{R\Delta\alpha}\left[\vec{B}(\alpha + \Delta\alpha) - \vec{B}(\alpha)\right]\vec{t} \qquad (9.53)$$

En passant à la limite $\Delta\alpha \to 0$, il vient l'expression de l'opérateur divergence appliqué à la densité linéique $\vec{B}$ de la ligne représentant la fibre centrale dans le référentiel local de la corde

$$c = \mathrm{div}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{B}}{\partial \alpha}\vec{t} \qquad (9.54)$$

Dans le cas de l'opération $b = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$, une procédure identique conduit à la relation

$$R\Delta\alpha \iint_{S_1} \vec{b}\,dS = \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\,dV = \oiint_S d\vec{S} \wedge \vec{a} = \vec{t} \wedge \vec{A}\big|_{S_2} - \vec{t} \wedge \vec{A}\big|_{S_1} \qquad (9.55)$$

qui, en utilisant le fait que $\vec{t} \wedge \vec{A} = (\vec{t} \wedge \vec{m})A_m + (\vec{t} \wedge \vec{n})A_n = A_n\vec{m} - A_m\vec{n}$, peut s'écrire

$$\vec{B} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{1}{R\Delta\alpha}\left\{\left[A_n(\alpha + \Delta\alpha) - A_n(\alpha)\right]\vec{m} - \left[A_m(\alpha + \Delta\alpha) - A_m(\alpha)\right]\vec{n}\right\} \qquad (9.56)$$

En passant à la limite $\Delta\alpha \to 0$, il vient l'expression de l'opérateur rotationnel appliqué à la densité linéique $\vec{A}$ de la ligne représentant la fibre centrale dans le référentiel local de la corde

$$b = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_n}{\partial \alpha}\vec{m} - \frac{\partial A_m}{\partial \alpha}\vec{n}\right) \qquad (9.57)$$

Les opérateurs agissant sur les charges linéiques d'une boucle *(9.54)* et *(9.57)* méritent encore quelques commentaires:

- en choisissant l'orientation de la boucle comme représentée à la figure 9.42, à savoir $\vec{n}$ parallèle à $\vec{e}_3$, les vecteurs unités du référentiel naturel tangent de la corde peuvent s'exprimer dans le référentiel local de l'observateur ***PO***, et vice-versa

$$\begin{cases} \vec{t} = \cos\alpha\,\vec{e}_2 - \sin\alpha\,\vec{e}_1 \\ \vec{m} = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2 \\ \vec{n} = \vec{e}_3 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{t}\sin\alpha + \vec{m}\cos\alpha \\ \vec{e}_2 = \vec{t}\cos\alpha + \vec{m}\sin\alpha \\ \vec{e}_3 = \vec{n} \end{cases} \qquad (9.58)$$

- les dérivés des vecteurs unités $\vec{m}$, $\vec{t}$ et $\vec{n}$ par rapport à l'angle α s'écrivent

$$\frac{\partial \vec{t}}{\partial \alpha} = -\vec{m} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial \alpha} = \vec{t} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} = 0 \qquad (9.59)$$

- dans le cas d'une *corde rectiligne*, les opérateurs du tableau *(9.54)* et *(9.57)* peuvent s'exprimer en remplaçant la dérivé sur α par la dérivé sur ζ, *l'abscisse curviligne le long de la fibre centrale de la corde*, en utilisant le fait que

$$\lim_{R\to 0}\ \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\zeta} \qquad (9.60)$$

Les boucles de glissement et les boucles prismatiques de dislocations

Si on veut maintenant étudier l'effet de la courbure d'une dislocation dans le référentiel local, la méthode la plus simple est de considérer une boucle de dislocation circulaire, et de la décrire à l'aide des outils mathématiques développés à la section précédente. Pour une boucle de dislocation circulaire de rayon R, la charge linéique tensorielle $\vec{\Lambda}_i$ peut être reliée au vecteur de Burgers en utilisant la relation *(9.7)*

$$\vec{\Lambda}_i=-\vec{t}\,\boldsymbol{B}_i \qquad (9.61)$$

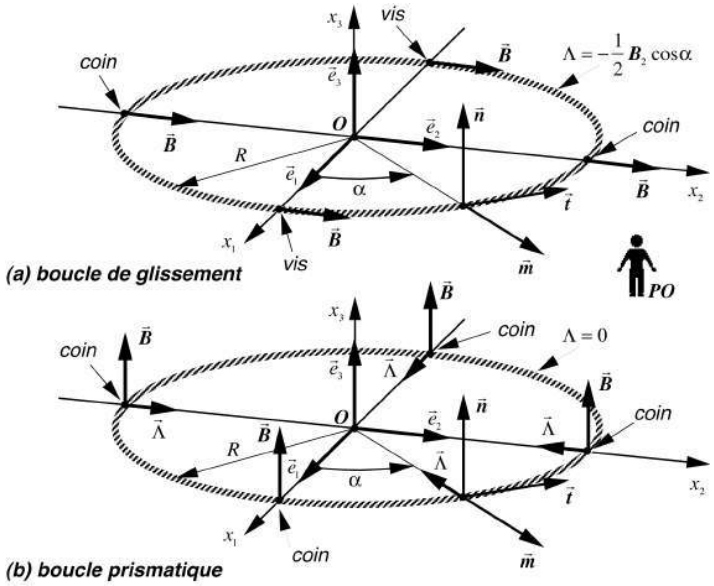


Figure 9.36 - *boucle de dislocation de glissement et boucle de dislocation prismatique*

Il apparaît alors trois types de boucles de dislocations suivant l'orientation du vecteur de Burgers par rapport à la normale $\vec{\boldsymbol{n}}$ à la surface de la boucle, comme le montre bien la figure 9.36:
- les *boucles de glissement* lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$, présentant à la fois des portions coin (où $\vec{\boldsymbol{B}}\,||\,\vec{\boldsymbol{m}}$), des portions vis (où $\vec{\boldsymbol{B}}\,||\,\vec{\boldsymbol{t}}$) et des portions mixtes, et qui ont une nature essentiellement *"vectorielle"* puisque leur vecteur de Burgers peut prendre n'importe quelle orientation dans le plan perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{n}}$,
- les *boucles prismatiques* lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}\,||\,\vec{\boldsymbol{n}}$, qui ont une nature essentiellement *"scalaire"*, puisque leur vecteur de Burgers à une direction imposée,
- les *boucles mixtes* lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}$ présente une composante dans la direction de $\vec{\boldsymbol{n}}$ et une composante dans le plan de la boucle.

On peut vérifier que ces boucles de dislocations satisfont bien l'équation de conservation des charges de distorsion $\operatorname{div}\vec{\lambda}_i=0$. En effet, en utilisant la relation *(9.54)*, il vient

$$\operatorname{div}\vec{\lambda}_i=0\ \ \Rightarrow\ \ \frac{1}{R}\frac{\partial\vec{\Lambda}_i}{\partial\alpha}\vec{t}=-\frac{1}{R}\frac{\partial\left(\boldsymbol{B}_i\vec{t}\right)}{\partial\alpha}\vec{t}=-\frac{1}{R}\boldsymbol{B}_i\frac{\partial\vec{t}}{\partial\alpha}\vec{t}-\frac{1}{R}\frac{\partial\boldsymbol{B}_i}{\partial\alpha}=-\frac{1}{R}\frac{\partial\boldsymbol{B}_i}{\partial\alpha}=0 \qquad (9.62)$$

Cette relation implique que $\partial \boldsymbol{B}_i / \partial\alpha \equiv 0$, et par conséquent que $\boldsymbol{B}_i$ ne dépend pas de l'angle α , ce qui correspond bien à l'expression de l'invariance des composantes du vecteur de Burgers d'une ligne de dislocation. On peut déduire la charge linéique scalaire Λ de rotation des boucles de dislocations en utilisant la relation *(9.8)*

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}} = -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\left(\cos\alpha\,\vec{e}_2 - \sin\alpha\,\vec{e}_1\right) = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}_2\cos\alpha - \boldsymbol{B}_1\sin\alpha\right) \qquad (9.63)$$

Comme $\vec{\boldsymbol{B}}$ ne dépend pas de α , on en déduit que *les boucles de dislocations de glissement présentent un moment dipolaire de charges de rotation*. En intégrant la densité linéique Λ de charge de torsion sur le contour de la boucle, on déduit que les boucles de dislocations ne présentent pas de *charge scalaire globale* $\boldsymbol{q}_\lambda$ *de rotation* ($\boldsymbol{q}_\lambda = 0$), quelle que soit leur nature

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \oint_C \Lambda\, R\, d\alpha = -\frac{1}{2} R \oint_C \left(\boldsymbol{B}_2\cos\alpha - \boldsymbol{B}_1\sin\alpha\right) d\alpha \equiv 0 \qquad (9.64)$$

On peut encore déduire la charge linéique vectorielle $\vec{\Lambda}$ de flexion des boucles de dislocations en utilisant les relations *(9.9)* et *(9.58).* Il vient

$$\vec{\Lambda} = \vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{B}} \wedge \left(\cos\alpha\,\vec{e}_2 - \sin\alpha\,\vec{e}_1\right) \qquad (9.65)$$

On déduit alors la charge linéique scalaire Θ de courbure de la dislocation grâce à la relation $\theta = \operatorname{div}\vec{\lambda}$ et aux expressions *(9.54)* et *(9.65)*

$$\theta = \operatorname{div}\vec{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{1}{R}\frac{\partial\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)}{\partial\alpha}\vec{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{R}\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \frac{\partial\vec{\boldsymbol{t}}}{\partial\alpha}\right)\vec{\boldsymbol{t}} = -\frac{1}{R}\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{m}}\right)\vec{\boldsymbol{t}} \qquad (9.66)$$

de sorte que

$$\Theta = -\frac{1}{R}\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}} = -\frac{1}{R}\boldsymbol{B}_3 \qquad (9.67)$$

Comme $\boldsymbol{B}_3$ ne peut être qu'une constante indépendante de α , cette relation implique que *les boucles de dislocations prismatiques présentent une charge scalaire globale* $\boldsymbol{q}_\theta$ *de courbure* donnée par l'intégrale de la densité linéique Θ sur le contour de la boucle

$$\boldsymbol{q}_\theta = \oint_C \Theta\, R\, d\alpha = -\oint_C \vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}\, d\alpha = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}} = -2\pi\boldsymbol{B}_3 \qquad (9.68)$$

Comme $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$, on a encore

$$\boldsymbol{q}_\theta = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}\right) = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{m}} \qquad (9.69)$$

L'effet d'une variation homogène d'expansion volumique sur la charge de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$

Comme la charge scalaire $\boldsymbol{q}_\theta$ de courbure d'une boucle prismatique ne dépend pas du rayon R de la boucle de dislocation, mais uniquement de la composante $\boldsymbol{B}_3$ du vecteur de Burgers, la dépendance de la charge de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ en l'état d'expansion volumique local τ du milieu se déduit aisément

$$\boldsymbol{q}_\theta = -2\pi\,\boldsymbol{B}_3 = -2\pi\,\boldsymbol{B}_{03}\,\mathrm{e}^{\tau/3} = \boldsymbol{q}_{\theta 0}\,\mathrm{e}^{\tau/3} \qquad (9.70)$$

La quantification des boucles de dislocations sur un réseau

A l'échelle microscopique d'un réseau solide, le vecteur de Burgers de boucles de dislocations se quantifient, comme le montre schématiquement la figure 9.44 pour des boucles prismatiques

et une boucle de glissement au sein d'un réseau cubique.
Dans la figure 9.37, on observe aussi clairement les faits suivants:
- les boucles de dislocations prismatiques, de *nature «scalaire»*, sont obtenues par l'ajout ou la suppression d'un plan de particules au sein de la boucle (translation perpendiculaire au plan de la boucle), de sorte que le réseau présente de l'*«extra-matière»* sur le plan de la boucle; à noter que la charge scalaire globale $\boldsymbol{q}_\theta$ de courbure divergente de la boucle prismatique est directement liée à l'existence de cette *«extra-matière»*,
- les boucles de dislocations de glissement, de *nature «vectorielle»*, sont obtenues par glissement (translation parallèle au plan de la boucle) dans la direction du vecteur de Burgers, de sorte que le réseau ne présente pas d'*«extra-matière»* en ce cas. Par contre, la présence d'une composante vis dans les régions où $\vec{\boldsymbol{B}} \,||\, \vec{\boldsymbol{t}}$ induit un champ dipolaire de rotation au voisinage de la boucle de glissement.

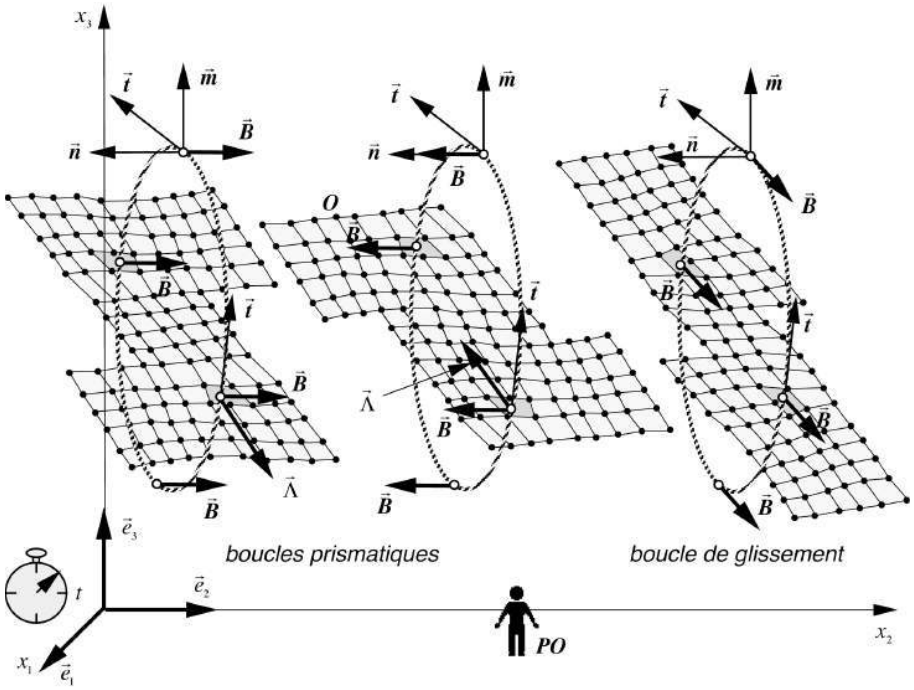


Figure 9.37 - *quantification des boucles de dislocations sur un réseau*

Les boucles de désinclinaisons coin

A la figure 8.9, on a montré une réalisation macroscopique d'une boucles de désinclinaison coin. Essayons d'en exprimer maintenant le traitement mathématique. Pour cela, considérons une boucle constituée d'un doublet de désinclinaisons coin liées par un ruban de dislocation virtuel, comme représenté à la figure 9.38. D'après les relations *(9.40)*, les densités linéiques de charge scalaire de courbure Θ_1 et Θ_2 des deux désinclinaisons sont données par les relations

$$\begin{cases} \Theta_1 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_1 \vec{\boldsymbol{t}} = -\vec{\Pi}\,\vec{\boldsymbol{m}} \\ \Theta_2 = -\vec{\boldsymbol{\Omega}}_2 \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\Pi}\,\vec{\boldsymbol{m}} = -\Theta_1 \end{cases} \qquad (9.71)$$

On déduit que l'existence de ces deux densités Θ_1 et Θ_2 de part et d'autre du ruban de dislo-

cation génère un champ dipolaire $\vec{\chi}_{dipolaire}$ de flexion, localisé essentiellement au voisinage des deux désinclinaisons. Ce champ dipolaire est illustré à la figure 9.39 dans le cas d'un doublet de désinclinaisons quantifiées de $\pm 90°$ dans une structure cubique. On y voit bien les courbures de flexion positives et négatives entourant les deux désinclinaisons.

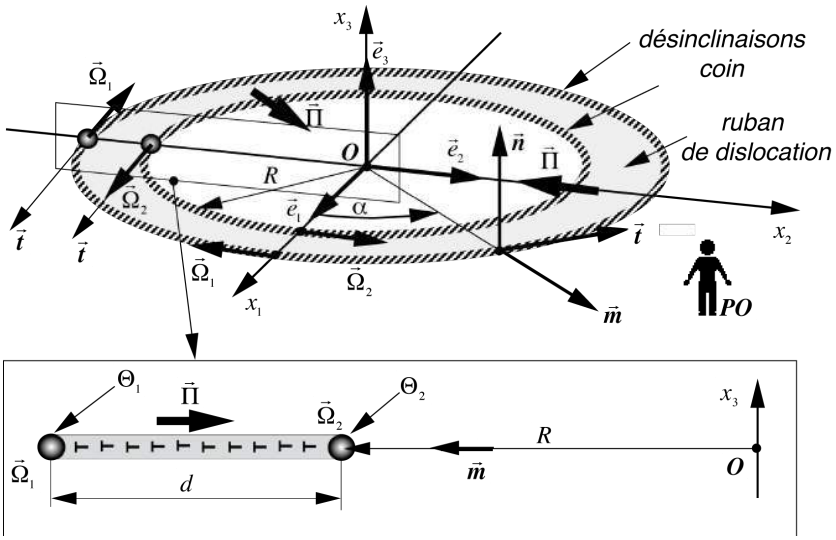


Figure 9.38 - *boucle de doublet de désinclinaisons coin liées par un ruban de dislocation*

Il est intéressant alors de voir que le ruban de dislocation de charge surfacique de flexion $\vec{\Pi}$ peut se ramener, par intégration sur la distance d séparant les deux désinclinaisons à une charge linéique $\vec{\Lambda}$ de dislocation coin virtuelle répartie sur une boucle de rayon $R + d/2$. Ainsi, cette boucle de doublet de désinclinaisons peut être considérée comme similaire à une boucle de dislocation coin de charge linéique $\vec{\Lambda}$ telle que

$$\vec{\Lambda} = \vec{\Pi} d = -d\,\Theta_1 \vec{\boldsymbol{m}} \qquad (9.72)$$

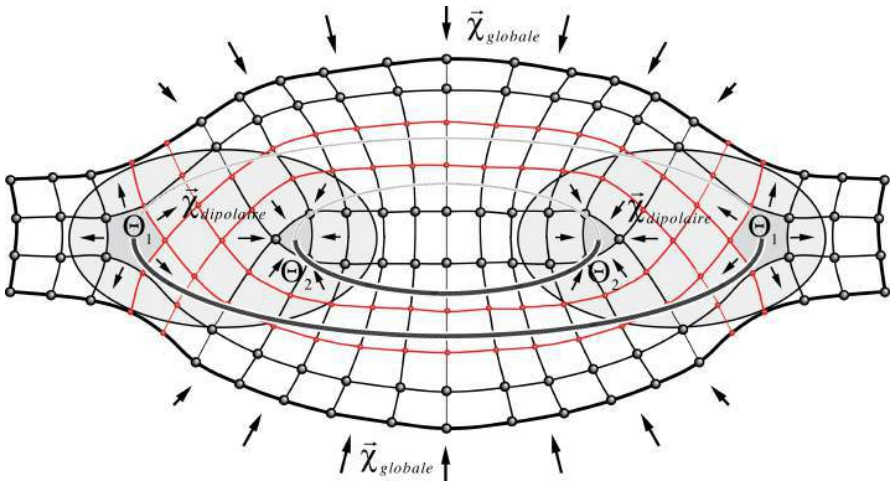


Figure 9.39 - *champ dipolaire local de flexion dû aux charges Θ_1 et Θ_2 et champ de flexion divergent dû à la charge $\boldsymbol{Q}_\theta$ d'une boucle de doublet de désinclinaison coin*

On peut utiliser la relation (9.69) pour calculer la charge scalaire globale $\boldsymbol{q}_\theta$ de courbure de cette

boucle de dislocation coin virtuelle, et on obtient, sachant que $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$

$$\boldsymbol{q}_\theta = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{m}} = 2\pi \boldsymbol{B}_3 = 2\pi d\,\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{m}} = -2\pi d\Theta_1 \qquad (9.73)$$

On peut encore imaginer que le diamètre de la boucle interne de désinclinaison tende vers zéro et qu'il ne reste que la boucle de désinclinaison externe, de charge linéique Θ_1 et de rayon d. En ce cas, la charge globale de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ reste inchangée et est toujours donnée par la même relation *(9.73)*. Cette charge globale de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ est celle qui est due au ruban de dislocation dans son entier, et celle qui est vue à distance suffisamment grande de la boucle pour qu'il ne soit plus possible de distinguer cette boucle d'une simple boucle de dislocation coin. La charge $\boldsymbol{q}_\theta$ est alors responsable de la flexion globale $\vec{\chi}_{globale}$ du réseau à grande distance, comme l'illustre bien la figure 19.46 dans le cas d'un doublet de désinclinaisons quantifiées de $\pm 90°$ dans une structure cubique.

Les boucles de désinclinaisons vis

Dans la figure 8.8, on a montré une réalisation macroscopique d'une boucle de désinclinaison vis[16]. Essayons d'en exprimer ici le traitement mathématique. Pour cela, considérons une boucle constituée d'une désinclinaison vis générée par une rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis}$ du plan supérieur d'un angle α par rapport au plan inférieur, comme représenté à la figure 9.40.

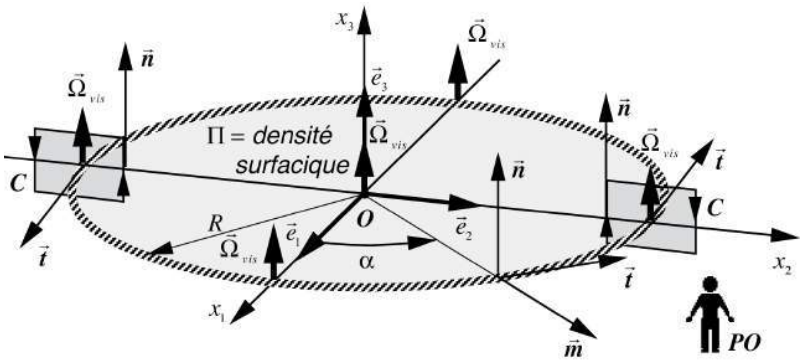


Figure 9.40 - *boucle de désinclinaison vis avec sa membrane chargée*

Le fait qu'on recolle deux plans qui ont été déplacés l'un par rapport à l'autre au sein de la boucle doit faire apparaître sur le plan de la boucle une charge surfacique Π de dislocation. En utilisant la relation *(9.35)*, on peut écrire, sur les contours $\boldsymbol{C}$ entourant la bordure de la boucle, et sachant que la charge surfacique Π provient d'une densité volumique λ répartie dans une membrane d'épaisseur h

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis} = -\oint_C \lambda d\vec{r} = -\vec{\boldsymbol{n}}\lambda h = -\vec{\boldsymbol{n}}\Pi \qquad (9.74)$$

de sorte que l'angle de rotation α s'écrit

$$\alpha = \boldsymbol{\Omega}_{vis} = -\Pi \qquad (9.75)$$

La charge surfacique Π de rotation peut être intégrée sur la surface de la boucle, ce qui fournit

---

[16] *W. Huang, T. Mura, Elastic J. of Applied Physics, vo. 41(13), p. 5175, 1970;*
A. Unzicker, arXiv:gr-qc/0011064, 2000; A. Unzicker, arXiv:gr-qc/9612061v2, 2010

la charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ de rotation d'une telle boucle

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \iint_S \Pi dS = \pi R^2 \Pi \qquad (9.76)$$

Cette charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ est en fait la charge de rotation de la boucle de désinclinaison vis telle qu'elle est vue à grande distance de la boucle. Cela signifie qu'une telle boucle peut se comporter comme la source d'un champ $\vec{\omega}$ de rotation divergent au sein du milieu solide.
A noter qu'il est possible de voir une boucle de désinclinaison de manière quelque peu différente. En effet, le fait d'effectuer la rotation des deux plans l'un par rapport à l'autre induit un déplacement le long de la corde *similaire à celui d'une dislocation vis*. Le vecteur de Burgers et la charge linéique de cette *pseudo-dislocation vis* vaudrait alors

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{vis} = R\alpha\vec{\boldsymbol{t}} = -R\Pi\vec{\boldsymbol{t}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{vis} = -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{2}R\Pi \qquad (9.77)$$

de sorte que la charge globale de cette pseudo-boucle vis s'écrirait

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \oint \Lambda_{vis}\, ds = 2\pi R\Lambda_{vis} = \pi R^2\Pi \qquad (9.78)$$

On obtient donc bien la même valeur de la charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ que celle obtenue en considérant la charge surfacique Π, ce qui permet de considérer indifféremment cette singularité comme une boucle de désinclinaison vis ou comme une pseudo-boucle de dislocation vis!

Les effets d'une variation d'expansion volumique sur la charge de torsion $\boldsymbol{q}_\lambda$

Comme la charge scalaire de torsion $\boldsymbol{q}_\lambda$ d'une boucle de désinclinaison vis dépend de R^2 et de Π, et comme la charge surfacique Π est indépendante de l'état d'expansion volumique local τ du milieu *(9.30)*, la dépendance de la charge globale de rotation $\boldsymbol{q}_\lambda$ d'une boucle de désinclinaison vis en l'état d'expansion volumique local τ du milieu se déduit aisément

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \Pi\pi R^2 = \Pi_0\pi\, R_0^2\, \mathrm{e}^{2\tau/3} = \boldsymbol{q}_{\lambda 0}\, \mathrm{e}^{2\tau/3} \qquad (9.79)$$

De l'art de transformer une corde rectiligne en boucle fermée

Une corde de dislocation, de désinclinaison et/ou de dispiration rectiligne est entièrement caractérisée par ses trois charges linéiques Λ, $\vec{\Lambda}$ et Θ. Sa charge linéique scalaire Λ est reliée à sa partie de dislocation vis $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}} = -\Lambda\vec{\boldsymbol{t}}$, sa charge linéique vectorielle $\vec{\Lambda}$ est reliée à sa partie de dislocation coin $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$, et sa charge linéique scalaire Θ est reliée à sa partie de désinclinaison coin $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{coin}} = -\Theta\vec{\boldsymbol{t}}$ (fig. 9.41a). A partir d'une corde rectiligne satisfaisant les conditions énoncées ci-dessus, il est tout-à-fait possible de construire une boucle, en recourbant la corde et en la refermant sur elle-même pour former une boucle de rayon R. Pour cela, il y a des règles à respecter, que nous allons maintenant discuter.
La partie de dislocation coin de la corde, représentée par son vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$, doit être conservée pour satisfaire l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i = 0$. Satisfaire cette conservation implique forcément de courber la corde dans le plan perpendiculaire à son vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}}$, ce qui implique aussi que sa densité vectorielle $\vec{\Lambda}$ est contenue dans le plan de la boucle résultante (fig. 9.41b). Ainsi, la boucle ne peut être qu'une *boucle de type prismatique* vis-à-vis de son vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}}$, de sorte qu'elle possède une charge scalaire de courbure $\boldsymbol{q}_\theta^{disloc} = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}} = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{m}}$ selon la relation *(9.68)*.

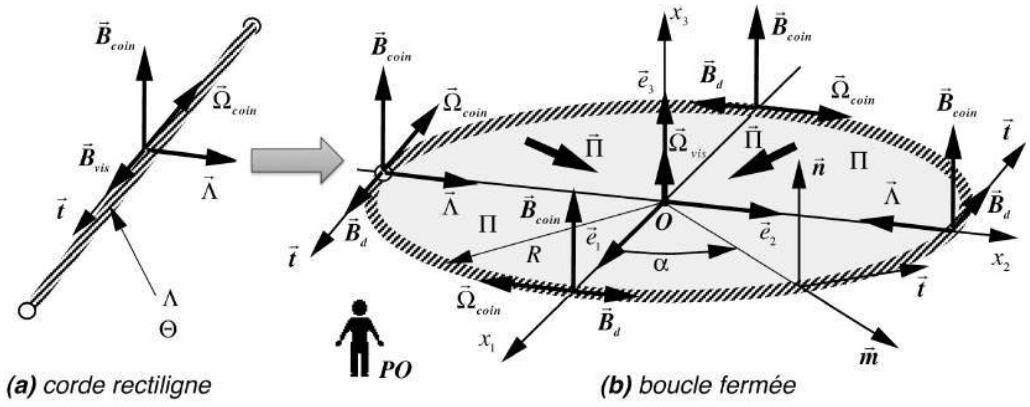


Figure 9.41 - *transformation d'une corde rectiligne en boucle fermée*

S'il existe de plus une partie de désinclinaison coin sur la corde rectiligne, sa charge scalaire $\Theta \neq 0$ va générer une membrane de dislocation virtuelle de charge surfacique $\vec{\Pi}$ au sein de la boucle, comme illustré par l'exemple de la figure 9.37. Ainsi, la partie de désinclinaison coin de la corde rectiligne conduit à une boucle de désinclinaison coin. En utilisant la relation *(9.73)* dans laquelle d est remplacée par R on obtient très facilement la contribution $\boldsymbol{q}_\theta^{disclin} = -2\pi R\Theta = 2\pi R\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{m}}$ de cette partie de désinclinaison à la charge scalaire de courbure. On en déduit que la *charge de courbure globale* $\boldsymbol{q}_\theta$ de la boucle due à la fois à la partie disclocative coin et à la partie de désinclinaison coin de la corde initiale vaut

$$\boldsymbol{q}_\theta = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{coin}} - 2\pi R\Theta = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{m}} + 2\pi R\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{m}} \qquad (9.80)$$

Le fait d'avoir refermé sur elle-même une corde contenant une charge linéique Λ, associée à un vecteur de Burgers vis $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}} = -\Lambda\vec{\boldsymbol{t}}$, implique que ce vecteur de Burgers vis $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}}$ ne peut plus être un vecteur de dislocation conservé le long de la boucle, ce qui semble de prime abord assez paradoxal. Mais cela est parfaitement possible précisément parce que Λ est un scalaire. En refermant sur elle-même la corde, la dislocation vis $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}}$ perd donc son identité de dislocation au profit de l'apparition d'une boucle de désinclinaison du même type que celle décrite à la figure 9.39. L'ex-vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}}$ devient alors un simple déplacement $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{d}}$ le long de la boucle, lié à la rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis}$ du plan supérieur d'un angle $\alpha = \boldsymbol{\Omega}_{vis} = -\Pi$ par rapport au plan inférieur de la boucle. Il doit par conséquent apparaître une charge surfacique de rotation Π sur le plan de la boucle, de telle sorte que

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{d}} = R\alpha\vec{\boldsymbol{t}} = -R\Pi\vec{\boldsymbol{t}} \qquad (9.81)$$

Mais la conservation de la longueur $\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}}\right|$ qui devient $\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{d}}\right|$ au cours du processus de courbure de la corde pour en former une boucle implique que

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}} = -\Lambda\vec{\boldsymbol{t}} \quad \rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{d}} = -R\Pi\vec{\boldsymbol{t}} \quad \Rightarrow \quad \Pi = \Lambda / R \qquad (9.82)$$

La charge linéique scalaire initiale Λ de rotation de la corde disparaît donc au profit d'une charge surfacique scalaire Π de rotation de la boucle, satisfaisant la relation simple de transformation $\Pi = \Lambda / R$.

La boucle devient donc une *boucle de désinclinaison vis* vis-à-vis de l'ex-vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{vis}}$, qui est donc porteuse d'une *charge scalaire globale* $\boldsymbol{q}_\lambda$ *de rotation*, avec

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \pi R\Lambda = \pi R^2\Pi \qquad (9.83)$$

Les règles de transformation permettant de transformer une corde rectiligne en boucle fermée sont résumées dans le tableau 9.5.

corde rectiligne	$\Rightarrow$	***boucle fermée***	***charge associée***
dislocation vis $\Lambda \Rightarrow \vec{\boldsymbol{B}}_{vis} = -\Lambda\vec{\boldsymbol{t}}$	$\Rightarrow$	boucle de désinclinaison vis $\Pi = \dfrac{\Lambda}{R} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis} = -\Pi\vec{\boldsymbol{n}} = -\dfrac{\Lambda}{R}\vec{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{q}_\lambda = \pi R\Lambda$ $= \pi R^2\Pi$ $= -\pi R^2\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis}\vec{\boldsymbol{n}}$
dislocation coin $\vec{\Lambda} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{B}}_{coin} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$	$\Rightarrow$	boucle de dislocation prismatique $\vec{\Lambda} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{B}}_{coin} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}$	$\boldsymbol{q}_\theta = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{m}}$ $= -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}$
désinclinaison coin $\Theta \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin} = -\Theta\vec{\boldsymbol{t}}$	$\Rightarrow$	boucle de désinclinaison coin $\vec{\Pi} = -\Theta\vec{\boldsymbol{m}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin} = \left(\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{m}}\right)\vec{\boldsymbol{t}} = -\Theta\vec{\boldsymbol{t}}$	$\boldsymbol{q}_\theta = -2\pi R\Theta$ $= 2\pi R\vec{\Pi}\vec{\boldsymbol{m}}$ $= 2\pi R\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{coin}\vec{\boldsymbol{t}}$

Tableau 9.5 - *règles de transformation d'une corde rectiligne en boucle fermée*

La quantification du rayon d'une boucle localisée dans un réseau ordonné

Une boucle localisée peut contenir, comme on vient de le voir, une *charge scalaire globale de courbure* $\boldsymbol{q}_\theta$ et/ou une *charge scalaire globale de rotation* $\boldsymbol{q}_\lambda$. On peut maintenant montrer que l'existence d'une charge scalaire de rotation $\boldsymbol{q}_\lambda$ non nulle peut impliquer, sous certaines conditions, une quantification du rayon R de la boucle si celle-ci se trouve dans un réseau ordonné. En effet, si on admet que, lors de la formation de la boucle, le milieu considéré impose que la mâchoire supérieure se recolle à la mâchoire inférieure en respectant l'orientation de la structure du réseau, l'angle de rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis}$ ne peut alors prendre que des valeurs quantifiées $\boldsymbol{\Omega}_{(q)}$ dépendant de la structure du réseau (par exemple $\boldsymbol{\Omega}_{(q)} = \pm n\pi/2$ dans un réseau présentant une symétrie cubique ou $\boldsymbol{\Omega}_{(q)} = \pm n\pi/3$ dans un réseau présentant une symétrie hexagonale). Ceci implique que la charge surfacique $\Pi = -\boldsymbol{\Omega}_{vis}$ prend aussi des valeurs quantifiées $\Pi_{(q)} = -\boldsymbol{\Omega}_{(q)}$. Mais comme, d'autre part, la longueur du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ de la corde initiale doit aussi prendre des valeurs quantifiées dans un réseau ordonné, la charge linéique Λ présente déjà elle-même des valeurs quantifiées $\Lambda_{(k)}$.

La conséquence de la quantification de Π et de Λ est immédiate, et se traduit par une quantification du rayon R de la boucle, qui ne peut prendre que des valeurs propres $R_{(q,k)}$

$$R_{(q,k)} = \Lambda_{(k)} / \Pi_{(q)} \qquad (9.84)$$

Il existe plusieurs conséquences très intéressantes de la quantification du rayon des boucles de désinclinaisons vis, que nous allons énumérer ici:

- la première conséquence très importante se trouve dans le fait que cette quantification de R

entraîne d'office une *quantification de la charge scalaire globale* $\boldsymbol{q}_\lambda$ *de torsion* de la boucle, puisqu'en ce cas

$$\boldsymbol{q}_\lambda = \pi R^2_{(q,k)} \Pi_{(q)} = \pi R_{(q,k)} \Lambda_{(k)} = \pi \Lambda^2_{(k)} / \Pi_{(q)} \qquad (9.85)$$

- la deuxième conséquence intéressante est liée aux expressions du rayon quantifié et de la charge de torsion quantifiée, à savoir $R_{(q,k)} = \Lambda_{(k)} / \Pi_{(q)}$ et $\boldsymbol{q}_\lambda = \pi \Lambda^2_{(k)} / \Pi_{(q)}$, car elles montrent clairement que le rayon et la charge globale de rotation de la boucle augmentent avec la valeur de la charge $\Lambda_{(k)}$ de la corde à partir de laquelle est formée la boucle. Ceci implique entre autre qu'il ne peut exister une relation linéaire entre $\boldsymbol{q}_\lambda$ et $\Lambda_{(k)}$, pour une série de boucles données, que si le rapport $\Lambda_{(k)} / \Pi_{(q)}$ reste constant, ce qui implique aussi que le rayon $R_{(q,k)}$ ne change pas d'une boucle à l'autre.
- la troisième conséquence importante est que la valeur de la charge globale de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ peut dépendre de la quantification de R, mais c'est seulement sa partie de désinclinaison coin $2\pi R \vec{\Pi} \vec{\boldsymbol{m}}$ qui en dépend, alors que sa partie de dislocation coin $2\pi \vec{\Lambda} \vec{\boldsymbol{m}}$ n'en dépend pas.
- finalement, pour une boucle dont la charge de rotation $\boldsymbol{q}_\lambda$ serait nulle, il n'existe pas de conditions imposant une quantification du rayon R de la boucle dans un réseau ordonné, de sorte que ce rayon peut prendre n'importe quelle valeur.

9.6 – Amas de dislocations, de désinclinaisons et de dispirations

Étant donné que les *cordes de dislocation, de désinclinaison* et *de dispiration* contenant des densités de charges tensorielles non nulles peuvent être refermées sur elles-mêmes sous forme de boucles, il est tout-à-fait possible d'imaginer l'existence de petits amas très localisés de telles boucles au sein d'un milieu solide, tel que l'amas représenté dans le référentiel absolu à la figure 9.42.

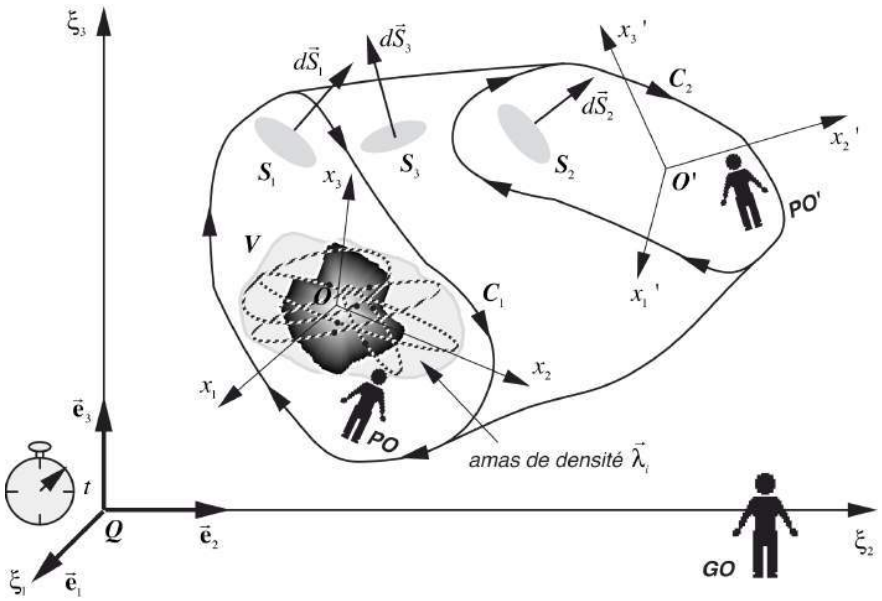


Figure 9.42 - *amas localisé de cordes de dislocations et de désinclinaisons*

De tels amas sont en principe entièrement caractérisés par leur densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, qui prennent une valeur non nulle au sein des cordes, dans le domaine représenté par une zone grisée à la figure 9.42. En définissant alors un volume $\boldsymbol{V}$ tel que sa surface $\boldsymbol{S}_1$ coupe l'amas de charges, la section de coupure étant représenté par la zone grise sombre dans la figure 9.42, il est possible de décomposer la surface entourant le volume $\boldsymbol{V}$ en trois parties $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ et $\boldsymbol{S}_3$. En utilisant alors la relation *(9.5)*, on peut montrer que, dans ce cas, les composantes $\boldsymbol{B}_i$ des vecteurs de Burgers, et par conséquent aussi les composantes Ω_i des vecteurs de Frank, obtenus dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ par intégration sur la surface $\boldsymbol{S}_1$ traversant l'amas sont identiquement nulles

$$\boldsymbol{B}_i = -\iint_{\boldsymbol{S}_1} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_1 = -\iint_{\boldsymbol{S}_2} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S}_2 = \boldsymbol{B}_i' \qquad (9.86)$$

Ceci est dû au fait que chaque boucle de cordes ou super-cordes de l'amas traverse deux fois la surface $\boldsymbol{S}_1$, une fois dans une direction et la seconde fois dans la direction opposée, de sorte que les contributions associées à chacune de ces traversées se compensent exactement.

Dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, l'absence de vecteurs $\vec{\boldsymbol{B}}$ et $\vec{\Omega}$ non nuls sur tout contour entourant l'amas sans le traverser implique qu'il n'existe pas de discontinuités du champ de déplacement virtuel $\vec{u}^{(\delta)}$ ni de discontinuités du champ de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ dans la partie du solide entourant l'amas, et que, par conséquent, *le solide reste parfait en-dehors de l'amas*.

Cependant, la présence de l'amas au sein du solide doit assurément impliquer un champ de distorsion élastique et anélastique du *solide parfait entourant l'amas* et jusqu'à une certaine distance de celui-ci, tout comme la présence d'une densité de charges électriques ρ localisée implique un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ à distance de ces charges.

Pour trouver ce champ, il faut faire intervenir ici le fait qu'il n'existe, hormis l'équation de conservation de la charge tensorielle $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$, aucune restriction sur les densités scalaires λ et θ de charges de rotation et de flexion. Par conséquent, il est tout-à-fait possible que, suivant la nature des charges composant l'amas, celui-ci puisse posséder des *charges scalaires globales de rotation et de courbure* $\boldsymbol{Q}_\lambda$ et $\boldsymbol{Q}_\theta$ non nulles, définies dans le référentiel local par les sommes sur toutes les boucles fermées des charges globales $\boldsymbol{q}_{\lambda(i)}$ et $\boldsymbol{q}_{\theta(i)}$ telles que nous les avons définies pour chaque boucle individuelle dans la section précédente [17]. Ces considérations permettent alors de retrouver les champs de distorsions élastiques et anélastiques qu'implique *à grande distance* la présence d'un amas localisé de charges, comme vont le montrer les sections suivantes.

Le champ de torsion divergent associé à un amas localisé de charges

L'équation de géométrocompatibilité $\lambda = \mathrm{div}\vec{\omega}$ pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ fait apparaître le scalaire de densité de charges de torsion λ, lié à la trace du tenseur de densité de charges de distorsion $\vec{\lambda}_i$. Elle permet d'écrire une relation intégrale de compatibilité sous la forme suivante dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

---

[17] *On peut imaginer par exemple que la charge de courbure d'un amas puisse être due à des boucles de dislocation prismatiques, de nature lacunaire ou interstitielle (fig. 19.44) et/ou des boucles de désinclinaison coin (fig. 9.39), et que la charge de rotation puisse être due à des boucles de désinclinaison vis (fig. 9.40).*

$$\oiint_S \vec{\omega} d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{\omega}\, dV = \iiint_V \lambda\, dV = \boldsymbol{Q}_\lambda \neq 0 \qquad (9.87)$$

Cette relation implique qu'une charge scalaire globale $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de rotation, localisée et non nulle, se comporte comme la source d'un champ divergent de rotation $\vec{\omega}$ au sein du solide parfait avoisinant l'amas de charges (fig. 9.43). Le champ de rotation présente alors une *singularité topologique* à l'endroit où se situe l'amas de charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$, et sa norme $|\vec{\omega}|$ présente une décroissance en $1/R^2$ à grande distance de l'amas.

Tout se passe en fait exactement comme en électromagnétisme, où une densité ρ localisée de charges électriques, conduisant à une charge électrique macroscopique localisée $\boldsymbol{Q}$, se comporte comme une singularité responsable d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ divergent dans l'espace environnant.

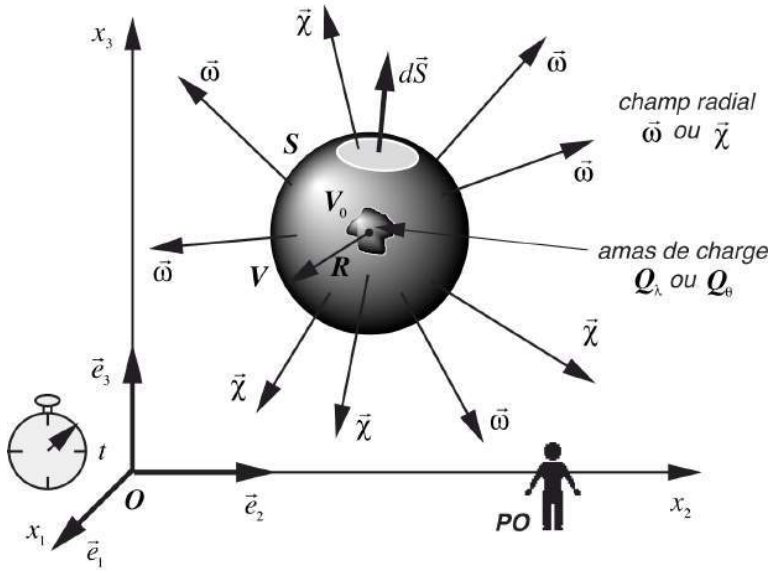


Figure 9.43 - *champs divergents de rotation et de flexion au voisinage d'un amas de charges*

Le champ divergent de flexion associé à un amas localisé de charges

L'équation de géométrocompatibilité $\theta = \mathrm{div}\vec{\chi}$ pour le vecteur de flexion $\vec{\chi}$ fait apparaître le scalaire de densité de charges de courbure θ. Elle permet d'écrire une relation intégrale de compatibilité sous la forme suivante dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\oiint_S \vec{\chi} d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{\chi}\, dV = \iiint_V \theta\, dV = \boldsymbol{Q}_\theta \neq 0 \qquad (9.88)$$

Cette relation implique qu'une charge scalaire macroscopique de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$, localisée et non nulle, se comporte comme la source d'un champ de flexion $\vec{\chi}$ divergent au sein du solide parfait avoisinant l'amas de charges (figure 9.430). Le champ de flexion présente alors une *singularité topologique* à l'endroit où se situe l'amas de charge $\boldsymbol{Q}_\theta$, et sa norme $|\vec{\chi}|$ présente aussi une décroissance en $1/R^2$ à grande distance de l'amas. Autrement dit, au voisinage d'une charge globale $\boldsymbol{Q}_\theta$ localisée de courbure, le solide présente des courbures par flexions de symétrie sphérique autour de la singularité.

La singularité des cisaillements et de l'expansion volumique au voisinage d'un amas

Comme le champ de flexion $\vec{\chi}$ est directement lié aux champs de cisaillement $\vec{\alpha}_i$ et d'expansion volumique τ par la relation *(8.35)*, on peut écrire la relation *(9.88)* sous la forme suivante dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$-\oiint_{S}\left(\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\alpha}_k + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau\right)d\vec{S} = \iiint_{V}\theta\, dV = \boldsymbol{Q}_\theta \neq 0 \qquad (9.89)$$

qui implique que la présence d'une charge scalaire globale $\boldsymbol{Q}_\theta$ localisée induit des champs radiaux de cisaillement et d'expansion volumique dont les normes $|\vec{\alpha}_i|$ et $|\tau|$ doivent décroître en $1/R$ au voisinage de l'amas. Cependant, il est clair que l'équation *(9.89)* ne permet pas de déterminer de manière univoque les champs $\vec{\alpha}_i$ et τ, au contraire des champs $\vec{\omega}$ et $\vec{\chi}$ qui sont définis de manière univoque par les équations *(9.87)* et *(9.88)*. En fait, la détermination exacte des champs de distorsion $\vec{\alpha}_i$ et τ nécessitera une équation supplémentaire traduisant les conditions d'équilibre des forces élastiques au sein du solide parfait entourant l'amas de charges, équation forcément liée aux modules élastiques du solide considéré.

La description simplifiée d'un solide en présence d'amas localisés de charges

Soit un *solide hypothétique* dans lequel les charges sont confinées dans des amas localisés, comme illustré par exemple à la figure 9.44, et donc dans lequel *il n'existe pas de cordes de dislocations et de désinclinaisons se propageant sur de grandes distances* par rapport à l'échelle à laquelle le solide est étudié. Il est clair que, suivant la complexité de la structure interne de ces amas, autrement dit la complexité de l'intrication des boucles composant ces amas, la description des champs de distorsion et de contorsion au sein même des amas peut être très complexe. Mais si ces amas ont des structures internes stables et qu'ils peuvent se mouvoir individuellement au sein du solide, mais sans interagir suffisamment entre eux pour modifier leur structure interne, il est possible de simplifier grandement la description des champs de distorsion régnant dans ce solide.

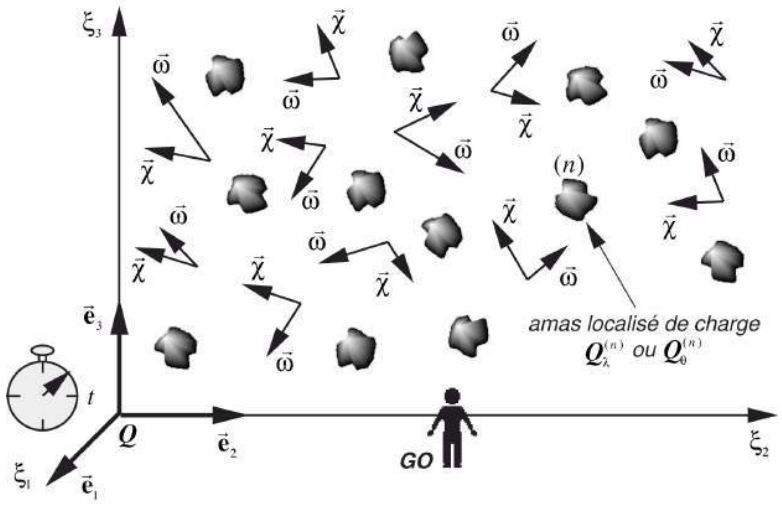


Figure 9.44 - *description d'un solide contenant des amas localisés de charges*

Dans ce cas en effet, et dans la mesure où l'on est essentiellement intéressé à décrire les champs de distorsion et de contorsion élastiques et anélastiques dans les domaines du solide parfait, c'est-à-dire à une certaine distance à l'extérieur des amas de charges, le problème peut être résolu beaucoup plus simplement en ne considérant que les densités scalaires de charge λ et θ à l'intérieur des amas, qui peuvent se traduire à grande distance par l'existence de deux charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ pour chaque amas numéro (n).
En fait, la connaissance de la distribution des densité de charge λ et θ à l'intérieur d'un amas permet de trouver des conditions purement topologiques, et par conséquent indépendantes des propriétés élastiques du solide considéré, qui sont imposées aux champs de rotation $\vec{\omega}$ et de flexion $\vec{\chi}$ régnant dans le solide parfait à l'extérieur de l'amas. Ces conditions sont simplement exprimées par les équations scalaires de géométrocompatibilité $\lambda = \mathrm{div}\vec{\omega}$ et $\theta = \mathrm{div}\vec{\chi}$.
Suivant l'inhomogénéité de la distribution interne des densités de charge λ et θ dans l'amas, il peut alors apparaître *à courte et moyenne distance* de chaque amas des *champs* $\vec{\omega}$ *et* $\vec{\chi}$ *dipolaires ou multipolaires*.
Par contre, *à grande distance* des amas de charges, c'est essentiellement la présence de charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ différentes de zéro qui sera responsable de l'apparition de *champs radiaux monopolaires de rotation* $\vec{\omega}$ *et de flexion* $\vec{\chi}$, comme on l'a déjà illustré à la figure 9.43.
Ainsi, dans ce cas particulier de charges localisées dans des amas, ce sont *les deux champs vectoriels invariants*, à savoir les champs de rotation $\vec{\omega}$ et de flexion $\vec{\chi}$, qui sont affectés à une certaine distance des amas de charges. Et il est tout-à-fait remarquable que chacun de ces amas peut être individuellement et complètement caractérisé, quant à ses effets à grande distance sur les champs de distorsion et de contorsion, par ses deux seules charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$, quand bien même ces amas peuvent avoir des structures de coeur très complexes, de nature tensorielle, donc très fortement dépendante de leur orientation spatiale dans le référentiel local.
Dans l'analogie développée précédemment avec l'électromagnétisme, le champ de rotation $\vec{\omega}$ est l'analogue du déplacement électrique $\vec{D}$, et la charge macroscopique de rotation $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ est l'analogue de la charge électrique macroscopique $\boldsymbol{Q}$ d'un corpuscule en électromagnétisme. Mais existe-t-il aussi une analogie similaire pour le champ de flexion $\vec{\chi}$ et la charge globale de courbure $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$? Une réponse partiellement positive peut être donnée ici. En effet, la présence d'un amas de charge macroscopique $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ est responsable d'un champ vectoriel de flexion $\vec{\chi}$ non nul et divergent dans son voisinage, donc d'une *courbure spatiale du réseau solide* entourant cet amas, ce qui se traduit par l'apparition de champs non nuls de cisaillement et d'expansion volumique. Ainsi, la présence d'un amas de charges tel que $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)} \neq 0$ implique, vis-à-vis du réseau solide, un résultat présentant une certaine analogie avec celui que stipule la théorie de la gravitation générale d'Einstein vis-à-vis de l'espace-temps en présence de matière, à savoir qu'un amas de matière situé en un endroit de l'espace est directement responsable d'une *courbure de l'espace-temps* l'avoisinant. On reviendra plus tard sur cette analogie.

Chapitre 10

Flux de charges de dislocation et relations d'Orowan

Dans ce chapitre, on cherche à interpréter le concept de flux de charges de dislocation, et à le relier au concept de densité de charges de dislocation que nous avons décrit au chapitre précédent.
On retrouve alors le lien existant entre la *vitesse de la déformation plastique macroscopique* décrite à la section 7.9 et l'existence de *flux de charges de dislocation* au sein du milieu solide, sous la forme de *relations d'Orowan*.

10.1 – Interprétation des flux de charges

L'interprétation macroscopique des tenseurs de densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation ainsi que l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ à laquelle satisfont ces tenseurs ont fait apparaître les notions de cordes et de boucles de dislocation, de désinclinaison et de dispiration. Il a aussi été montré qu'à grande distance d'amas de charges plastiques, ce sont essentiellement les deux champs vectoriels invariants, à savoir les champs de rotation $\vec{\omega}$ et de courbure $\vec{\chi}$, qui sont affectés par les composantes scalaires λ et θ des charges. Il nous reste à faire le lien entre ces grandeurs et les flux de charges $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ introduits au chapitre 9.

L'équation de continuité des charges de dislocation

Considérons un tube rempli d'une densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, qui se déplace à *la vitesse relative* $\vec{\boldsymbol{v}}$ *par rapport au réseau*, qui lui-même se meut à vitesse $\vec{\varphi}$ dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ d'un ***PO***. Définissons un contour $\boldsymbol{C}$ mobile entourant le tube de charges, de surface mobile $\boldsymbol{S}$, qui se déplace avec le tube à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}$ par rapport à $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ (fig. 10.1).

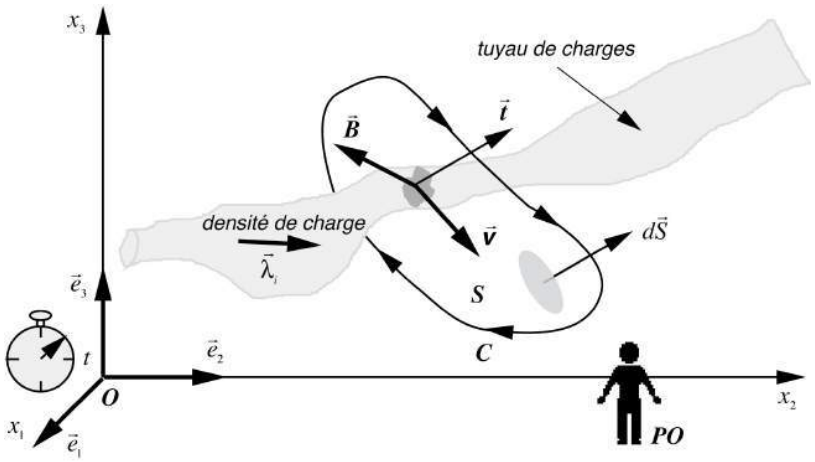


Figure 10.1 - *tube de charges* $\vec{\lambda}_i$ *se déplaçant à vitesse* $\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}$ *dans le référentiel* $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

D'après la relation *(9.3)*, le vecteur de Burgers global $\vec{\boldsymbol{B}}$ défini par ce contour est donné par

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \sum_i \boldsymbol{B}_i \vec{e}_i = -\sum_i \vec{e}_i \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_i d\vec{S} \qquad (10.1)$$

de sorte que la variation temporelle du vecteur de Burgers sur le tube de charges en mouvement peut s'écrire

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{B}}}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{B}_i}{dt} \vec{e}_i = -\sum_i \vec{e}_i \frac{d}{dt} \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_i \, d\vec{S} \qquad (10.2)$$

Il est possible d'appliquer la formule donnant la dérivé d'une intégrale sur une surface mobile *(voir annexe F)* à la relation *(10.2)* et on obtient

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{B}}}{dt} = -\sum_i \vec{e}_i \iint_{\boldsymbol{S}} \left[\frac{\partial \vec{\lambda}_i}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}) \operatorname{div} \vec{\lambda}_i - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[(\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}) \wedge \vec{\lambda}_i \right] \right] d\vec{S} \qquad (10.3)$$

Comme les composantes du vecteur de Burgers sont conservées localement dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, pour qu'il existe une variation du vecteur de Burgers global $\vec{\boldsymbol{B}}$ défini par le contour mobile, il faut nécessairement qu'il existe une source de charges $\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}$ non nulle au sein du réseau, de sorte que

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{B}}}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{B}_i}{dt} \vec{e}_i = -\sum_i \vec{e}_i \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} \, d\vec{S} \qquad (10.4)$$

Pour que l'égalité entre les relations *(10.3)* et *(10.4)* soit satisfaite quelle que soit la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}$, il faut nécessairement que

$$\frac{\partial \vec{\lambda}_i}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}) \operatorname{div} \vec{\lambda}_i - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[(\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}) \wedge \vec{\lambda}_i \right] = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} \qquad (10.5)$$

La géométrocompatibilité imposant que $\operatorname{div} \vec{\lambda}_i \equiv 0$, on obtient la relation suivante, définie dans le réseau mobile à vitesse $\vec{\phi} \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\lambda}_i}{\partial t} &= \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[(\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\varphi}) \wedge \vec{\lambda}_i \right] = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i \right] + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[\vec{\varphi} \wedge \vec{\lambda}_i \right] \\ &= \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i \right] + \left[\vec{\varphi} \underbrace{\operatorname{div} \vec{\lambda}_i}_{\equiv 0} - \vec{\lambda}_i \operatorname{div} \vec{\varphi} + \left(\vec{\lambda}_i \vec{\nabla} \right) \vec{\varphi} - \left(\vec{\varphi} \vec{\nabla} \right) \vec{\lambda}_i \right] \end{aligned} \qquad (10.6)$$

Il vient alors l'équation de continuité décrivant la dérivé particulaire de la densité de charges dans un réseau qui se déplace à vitesse $\vec{\phi} \neq 0$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$,

$$\frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} = \left[\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \vec{\lambda}_i \operatorname{div} \vec{\varphi} + \left(\vec{\lambda}_i \vec{\nabla} \right) \vec{\varphi} \right] + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i \right] \qquad (10.7)$$

Le terme de sources de charges de dislocation

Cette relation de continuité peut maintenant être comparée à l'équation de continuité des charges $\vec{\lambda}_i$ *(8.14)* qui stipule que

$$\frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{\beta}_i \right) - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{d\vec{\beta}_i}{dt} \right) \right] - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{J}_i \qquad (10.8)$$

Ainsi, dans le cas d'un tube de charges se déplaçant à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau, le

terme de non-commutativité entre crochet, qui exprime la création de non-compatibilité locale due aux charges, peut être relié à l'existence d'une source de charges $\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}$ non nulle, ainsi qu'aux termes $\vec{\lambda}_i \operatorname{div}\vec{\varphi}$ et $\left(\vec{\lambda}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi}$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\beta}_i\right)-\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{d\vec{\beta}_i}{dt}\right)=\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}+\left(\vec{\lambda}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi}-\vec{\lambda}_i\operatorname{div}\vec{\varphi} \qquad (10.9)$$

Le *terme de source de charges* $\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}$ ne peut être dû qu'à l'existence d'un processus créant des charges au sein du solide, par exemple *une production de dislocations par un mécanisme de type Frank-Read* (voir section 12.9).

Le *terme de source* $\vec{\lambda}_i \operatorname{div}\vec{\varphi}$ correspond à une diminution ou une augmentation de la densité de charges $\vec{\lambda}_i$ dues respectivement à *une augmentation ou une diminution de l'expansion volumique locale* $\operatorname{div}\vec{\varphi}$. Dans le cas où l'expansion volumique locale varie *de manière homogène*, ce terme assure que la densité de charge $\vec{\lambda}_i$ évolue bien selon la relation *(9.16)*.

Quant au *terme de source* $\left(\vec{\lambda}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi}$, il assure une augmentation ou une diminution de la densité de charges $\vec{\lambda}_i$ dues respectivement *à un allongement ou un rétrécissement du milieu dans la direction de la corde de dislocation* puisque les vecteurs $\vec{\lambda}_i$ sont orientés dans la direction de la corde. Dans le cas où le milieu ne s'allonge que dans la direction de la corde de dislocation, on peut vérifier que ce terme $\left(\vec{\lambda}_i\vec{\nabla}\right)\vec{\varphi}$ compense très exactement le terme $\vec{\lambda}_i \operatorname{div}\vec{\varphi}$, ce qui assure donc que la densité de charges $\vec{\lambda}_i$ ne change pas en ce cas.

Mais au voisinage de l'origine du repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, la vitesse $\vec{\varphi}$ est par définition très faible, et si on suppose de plus que $\vec{\boldsymbol{v}} > \vec{\varphi}$, l'équation de continuité des charges peut s'écrire simplement sous la forme suivante, forme que nous allons adopter dans la suite de ce chapitre

$$\frac{\partial\vec{\lambda}_i}{\partial t}\cong\frac{d\vec{\lambda}_i}{dt}\cong\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}+\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left[\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\lambda}_i\right] \qquad (10.10)$$

Les relations entre flux et densités de charges

La comparaison des équations *(10.7)* et *(10.8)* permet aussi d'écrire une correspondance simple entre les opérateurs rotationnels appliqués à $\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\lambda}_i$ et à $-\vec{J}_i$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\lambda}_i\right)=-\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}_i \qquad (10.11)$$

dont on déduit la relation devant exister entre la densité de charge $\vec{\lambda}_i$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau et le flux de charges $\vec{J}_i$ qui est associé à ce mouvement

$$\vec{J}_i=\vec{\lambda}_i\wedge\vec{\boldsymbol{v}}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\boldsymbol{A}_i \qquad (10.12)$$

Dans cette relation, on a introduit le terme $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\boldsymbol{A}_i$, qui est un champ vectoriel, gradient d'un scalaire $\boldsymbol{A}_i$ quelconque, et qui satisfait parfaitement la relation *(10.10)*.

On peut alors déduire la relation existant entre le flux vectoriel de charge $\vec{J}$ et la densité de charges $\vec{\lambda}_i$ en utilisant la relation *(8.20)*

$$\vec{J}=-\frac{1}{2}\sum_k\vec{e}_k\wedge\vec{J}_k=-\frac{1}{2}\sum_k\vec{e}_k\wedge\left(\vec{\lambda}_k\wedge\vec{\boldsymbol{v}}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\boldsymbol{A}_k\right)=\frac{1}{2}\sum_k\left(\vec{e}_k\vec{\lambda}_k\right)\vec{\boldsymbol{v}}-\frac{1}{2}\sum_k\left(\vec{e}_k\vec{\boldsymbol{v}}\right)\vec{\lambda}_k-\frac{1}{2}\sum_k\vec{e}_k\wedge\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\boldsymbol{A}_k \qquad (10.13)$$

Le premier terme de cette relation peut être exprimé en fonction de la charge scalaire λ de torsion grâce à la relation *(8.16),* et le troisième terme n'est rien d'autre que le rotationnel du

vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ construit avec les composantes $\boldsymbol{A}_i$

$$\vec{J} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{2}\sum_k \left(\vec{e}_k\vec{\boldsymbol{v}}\right)\vec{\lambda}_k + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \qquad (10.14)$$

Quant au deuxième terme, on peut utiliser la relation suivante

$$\sum_k \left(\vec{e}_k\vec{\boldsymbol{v}}\right)\vec{\lambda}_k = \sum_k \underbrace{\left(\vec{\lambda}_k\vec{\boldsymbol{v}}\right)}_{=0}\vec{e}_k - \sum_k \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \left(\vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) = -\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda} \qquad (10.15)$$

dans laquelle le terme $\vec{\lambda}_k\vec{\boldsymbol{v}}$ est nul car $\vec{\lambda}_k$ est parallèle à $\vec{\boldsymbol{t}}$ alors que $\vec{\boldsymbol{v}}$ est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{t}}$, et dans laquelle la somme des termes $\vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k$ peut être remplacée par $\vec{\lambda}$ grâce à la relation *(8.36)*. Le flux vectoriel de charge $\vec{J}$ est par conséquent formé de deux composantes $\vec{J}^{(\lambda)}$ et $\vec{J}^{(\vec{\lambda})}$ qui dépendent respectivement de la densité scalaire λ et de la densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charges

$$\vec{J} = \vec{J}^{(\lambda)} + \vec{J}^{(\vec{\lambda})} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \qquad (10.16)$$

Finalement, on peut calculer la trace du flux vectoriel $\vec{J}_i$ en utilisant la relation *(8.25)*

$$\frac{S_n}{n} = \sum_k \vec{e}_k\vec{J}_k = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{\lambda}_k \wedge \vec{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\boldsymbol{A}_k\right) = \sum_k \vec{\boldsymbol{v}}\left(\vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) + \sum_k \vec{e}_k\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\boldsymbol{A}_k \qquad (10.17)$$

En utilisant encore la relation *(8.36),* et en remarquant que le deuxième terme n'est rien d'autre que la divergence du vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ construit avec les composantes $\boldsymbol{A}_i$, il vient

$$\frac{S_n}{n} = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} + \mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} \qquad (10.18)$$

Les trois relations principales que nous avons obtenues entre tenseurs de densité de charges et tenseurs de flux de charges sont reportées dans le tableau 10.1. Comme nous n'avons pour l'instant pas d'interprétation directe pour le vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ apparaissant dans ces relations de continuité, si ce n'est que ce vecteur est à l'origine de flux $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ et de source S_n / n qui ne sont pas liés directement aux charges $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ et λ puisque ces flux et cette source disparaissent dans l'équation de continuité *(10.10)* des charges, nous les négligerons dans le tableau 10.1.

Les équations de continuité des densités de charges de dislocation

Pour les mouvements de charges à vitesse homogène $\vec{\boldsymbol{v}}$ telle que $\vec{\boldsymbol{v}} >> \vec{\varphi}$, il est aisé de montrer, grâce à l'équation de conservation *(8.12)*, que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i\right) = \vec{\boldsymbol{v}}\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i}_{\equiv 0} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i = -\left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i \qquad (10.19)$$

ce qui permet de réécrire l'équation de continuité *(10.10)* pour la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges sous les formes équivalentes suivantes

$$\frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} \underset{\vec{\boldsymbol{v}} >> \vec{\varphi}}{\cong} \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i\right) = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{J}_i \qquad (10.20)$$

En appliquant la relation *(8.36)* à cette dernière relation, l vient l'équation de continuité pour la densité $\vec{\lambda}$ de charges de flexion

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \cong -\sum_k \vec{e}_k \wedge \frac{d\vec{\lambda}_k}{dt} \underset{\vec{\boldsymbol{v}} >> \vec{\phi}}{\cong} -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} + \sum_k \vec{e}_k \wedge \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_k = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} \qquad (10.21)$$

dans laquelle on a introduit la source $\vec{S}^{(\vec{\lambda})}$ de charges $\vec{\lambda}$, définie comme

$$\vec{S}^{(\vec{\lambda})} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} \qquad (10.22)$$

En utilisant encore la relation suivante, avec la densité de charges de courbure $\theta = \operatorname{div}\vec{\lambda}$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}\right) = -2\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}^{(\vec{\lambda})} = \vec{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\vec{\lambda} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} = \vec{\boldsymbol{v}}\theta - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} \qquad (10.23)$$

qui fait appel à la densité de charges de courbure $\theta = \operatorname{div}\vec{\lambda}$, au flux vectoriel de charges de flexion $\vec{J}^{(\vec{\lambda})} = (\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}})/2$ et au flux vectoriel de charges de courbure $\theta\vec{\boldsymbol{v}}$, l'équation de continuité pour les charges $\vec{\lambda}$ peut s'écrire sous les diverses formes suivantes

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \cong \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}\right) - \vec{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - 2\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}^{(\vec{\lambda})} - \vec{\boldsymbol{v}}\theta \qquad (10.24)$$

Tableau 10.1 - Relations entre tenseurs de densité de charges et tenseurs de flux de charges

Relations entre flux et densités de charges à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} & (1) \\ \vec{J} = \vec{J}^{(\lambda)} + \vec{J}^{(\vec{\lambda})} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \dfrac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) & (2) \\ \dfrac{S_n}{n} = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} & (3) \end{cases}$$

Equations de continuité des charges dans le cas $\vec{\boldsymbol{v}} >> \vec{\varphi}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\lambda}_i}{dt} \cong \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i\right) = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}_i & (4) \\ \dfrac{d\vec{\lambda}}{dt} \cong \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}\right) - \vec{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - 2\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}^{(\vec{\lambda})} - \vec{\boldsymbol{v}}\theta & (5) \\ \dfrac{d\lambda}{dt} \cong S^{(\lambda)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\lambda = S^{(\lambda)} - \operatorname{div}\left(\lambda\vec{\boldsymbol{v}}\right) = S^{(\lambda)} - \operatorname{div}\vec{J}^{(\lambda)} & (6) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{S}^{(\vec{\lambda})} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} & (7) \\ S^{(\lambda)} = \dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} & (8) \end{cases}$$

En appliquant la relation *(8.17)* à *(10.20)*, il vient l'équation de continuité pour la densité λ de charges de rotation

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \frac{d\vec{\lambda}_k}{dt} \underset{\vec{\boldsymbol{v}} >> \vec{\varphi}}{\cong} \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} - \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_k = S^{(\lambda)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\lambda \qquad (10.25)$$

dans laquelle on a introduit la source scalaire $S^{(\lambda)}$ de charges λ, définie comme

$$S^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} \qquad (10.26)$$

En utilisant encore la relation suivante

$$\mathrm{div}\left(\lambda\vec{\boldsymbol{v}}\right) = \vec{\boldsymbol{v}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\lambda = \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\lambda \qquad (10.27)$$

qui fait appel au flux vectoriel $\vec{J}^{(\lambda)} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}}$, l'équation de continuité pour les charges scalaires λ peut s'écrire sous les diverses formes suivantes

$$\frac{d\lambda}{dt} \cong S^{(\lambda)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\lambda = S^{(\lambda)} - \mathrm{div}\left(\lambda\vec{\boldsymbol{v}}\right) = S^{(\lambda)} - \mathrm{div}\,\vec{J}^{(\lambda)} \qquad (10.28)$$

Les équations de continuité pour les densités de charges $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ et λ sont aussi reportées dans le tableau 10.1, avec les définitions des sources de charges $\vec{S}^{(\vec{\lambda})}$ et $S^{(\lambda)}$.

10.2 – Charges et flux linéiques pour des lignes de dislocation

Pour interpréter les relations du tableau 10.1, il est utile de les appliquer au cas des lignes de dislocation. Considérons donc une ligne comme celle reportée à la figure 10.2, qui se déplace par rapport au réseau à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$.

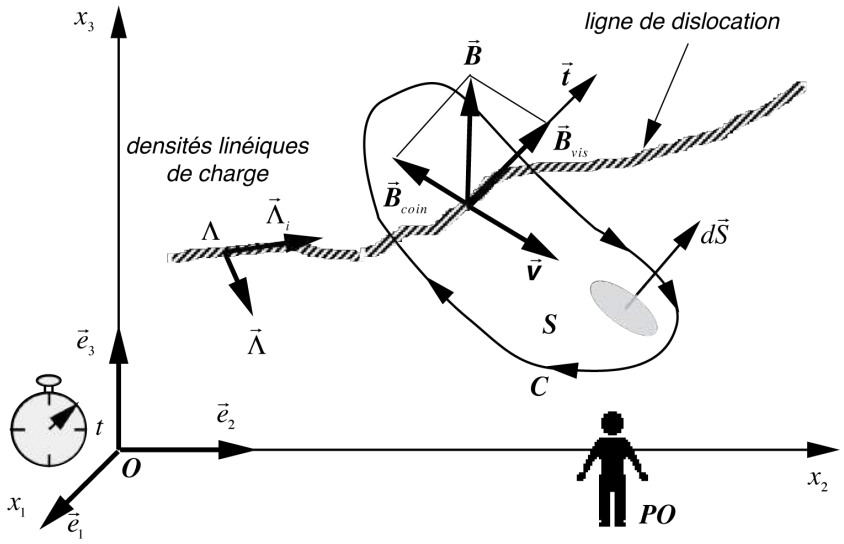


Figure 10.2 - *ligne de dislocation se déplaçant à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$*

Il est clair que, dans le cas d'une ligne, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ ne peut être que perpendiculaire en tous points à la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ de la ligne. Dans le cas d'une ligne, on peut intégrer les relations du tableau 10.1 sur le contour $\boldsymbol{C}$ mobile. Les intégrations sur la surface du contour des flux de charges $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ vont donner les *flux linéiques associés à la dislocation mobile*, qu'on représentera par les symboles $\vec{\Upsilon}_i$ et $\vec{\Upsilon}$. Comme les flux $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ ont comme dimension l'inverse d'un temps (1/s), les flux linéiques $\vec{\Upsilon}_i$ et $\vec{\Upsilon}$ auront comme dimension une surface par unité de temps (m²/s).

Quant à la source de sites de réseau S_n / n, son intégrale représentera aussi une surface par unité de temps (m²/s), et on l'écrira Υ. Il vient, en tenant compte des relations *(9.5), (9.8)* et *(9.9)* donnant les charges linéiques $\vec{\Lambda}_i$, $\vec{\Lambda}$ et Λ de la dislocation

$$\begin{cases} \vec{\Upsilon}_i = \iint_S \vec{J}_i \, dS = \iint_S \vec{\lambda}_i \, dS \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} \\ \vec{\Upsilon} = \iint_S \vec{J} \, dS = \Lambda \vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) \\ \Upsilon = \iint_S \frac{S_n}{n} dS = -\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases} \qquad (10.30)$$

On peut maintenant introduire les relations liant la charge linéique d'une ligne de dislocation avec le vecteur de Burgers de cette dislocation, à savoir

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{B}} = -\sum_i \left(\vec{\boldsymbol{t}}\,\vec{\Lambda}_i\right)\vec{e}_i & \Rightarrow \quad \vec{\Lambda}_i = -\vec{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}_i \\ \vec{\boldsymbol{B}}_{vis} = \left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{t}} = -2\,\Lambda\vec{\boldsymbol{t}} & \Rightarrow \quad \Lambda = -\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}} \,/\, 2 \\ \vec{\boldsymbol{B}}_{coin} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\boldsymbol{t} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda} & \Rightarrow \quad \vec{\Lambda} = \vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}} \end{cases} \qquad (10.31)$$

dans les relations *(10.30)* et on obtient les expressions suivantes des flux linéiques

$$\begin{cases} \vec{\Upsilon}_i = \vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = -\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{B}_i = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_i\right) \\ \vec{\Upsilon} = \Lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{2}\left[\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\,\vec{\boldsymbol{B}}\right)\vec{\boldsymbol{t}} \\ \Upsilon = -\vec{\Lambda}\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases} \qquad (10.32)$$

Grâce à ces relations, on va pouvoir interpréter les différents termes de flux de charges associés au mouvement des dislocations.

Le flux associé au mouvement de glissement d'une dislocation vis

Si la dislocation ne comporte qu'une composante vis, le flux $\vec{\Upsilon}$ sera donné par la relation

$$\vec{\Upsilon}_{vis} = \Lambda_{vis}\vec{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (10.33)$$

Cette relation montre que, comme la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ est toujours perpendiculaire à la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ de la ligne, les dislocations purement vis peuvent se mouvoir dans toutes les directions perpendiculaires à la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$. On parle en ce cas d'un mouvement de *glissement* des dislocations vis, et les plans sur lesquels la dislocation vis se déplace sont appelés des *plans de glissement*.

Les flux associés aux mouvements de glissement ou de montée d'une dislocation coin

Dans le cas d'une dislocation purement coin, les flux $\vec{\Upsilon}$ et Υ peuvent apparaître, puisque la dislocation coin est entièrement représentée par la charge $\vec{\Lambda}$, de sorte que

$$\begin{cases} \vec{\Upsilon}_{coin}^{(glissement)} = \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda}_{coin} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{coin} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{t}} \\ \Upsilon_{coin}^{(montée)} = -\vec{\boldsymbol{v}}\,\vec{\Lambda}_{coin} = \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases} \qquad (10.34)$$

Avec les relations *(10.33)* et *(10.34)*, on comprend bien les dimensions (m²/s) des flux linéiques

Υ et $\vec{\Upsilon}$ puisque ces flux sont le produit de la longueur d'un vecteur de Burgers avec la vitesse relative de la ligne par rapport au réseau.

D'après *(10.34)*, il apparaît alors deux types de mouvement de la dislocation coin:

- le mouvement pour lequel $\vec{\boldsymbol{v}}$ est perpendiculaire à $\vec{\Lambda}$, et qui est responsable d'un flux de charge vectoriel $\vec{\Upsilon}_{coin}^{(glissement)}$. Ce mouvement est représenté à la figure 10.3a. Il correspond à un mouvement conservatif de *glissement* de la dislocation coin sur son *plan de glissement,* défini comme le plan perpendiculaire à $\vec{\Lambda}$, donc le plan qui contient à la fois le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}$, la direction $\vec{\boldsymbol{t}}$ de la ligne et le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$.
- le mouvement pour lequel $\vec{\boldsymbol{v}}$ est parallèle à $\vec{\Lambda}$, et qui est responsable d'un flux de charge scalaire $\Upsilon_{coin}^{(montée)}$. Ce mouvement est représenté à la figure 10.3b. Il correspond à un mouvement non conservatif de *montée* de la dislocation coin perpendiculairement à son *plan de glissement.* La dislocation *«monte»* dans le réseau, en créant ou en annihilant un plan du réseau. Ce mouvement est donc non conservatif au sens qu'il détruit ou construit du réseau, et c'est ce mouvement qui est responsable de l'existence d'une source S_n de sites de réseau dans l'équation géométrocinétique de l'expansion volumique *(8.25),* et qui vaut

$$S_n = -n\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\Lambda}_{coin} = n\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (10.35)$$

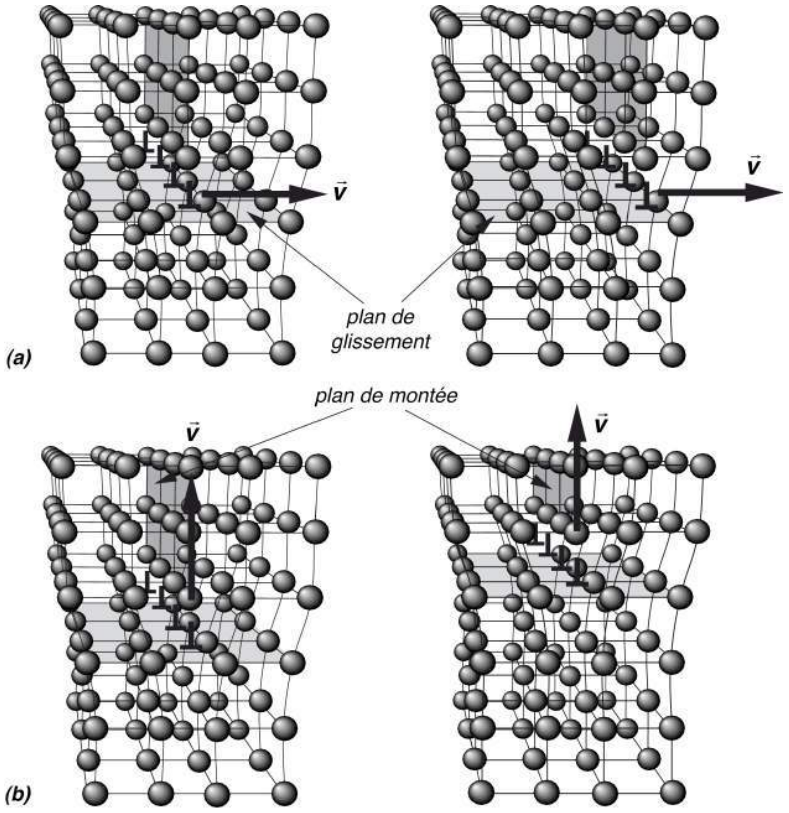


Figure 10.3 - *mouvement de glissement* ***(a)*** *et de montée* ***(b)*** *d'une dislocation coin*

Les divers flux associés aux mouvements de glissement et de montée des dislocations sont résumés dans le tableau 10.2.

Tableau 10.2 - Relations entre tenseurs de densité et de flux pour une corde de dislocation

$\vec{\boldsymbol{v}}$ = *vitesse relative de la corde par rapport au réseau* $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{\Upsilon}_i = \vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = -\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{B}_i = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_i\right) & (1) \\ \vec{\Upsilon} = \vec{\Upsilon}_{vis} + \vec{\Upsilon}_{coin}^{(glissement)} = \Lambda_{vis}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda}_{coin} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{t}} & (2) \\ \Upsilon = \Upsilon_{coin}^{(montée)} = -\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\Lambda}_{coin} = \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}} & (3) \end{cases}$$

Le flux associé au mouvement d'une charge localisée de rotation

Si on considère une charge localisée $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de rotation en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au milieu solide, on obtient la relation entre charge et flux en intégrant la relation *(10.13)* sur le volume de la charge, en posant que $\vec{\lambda} = 0$. Il vient alors, en introduisant un courant $\vec{I}$ qui a pour dimension un volume par unité de temps (m³/s)

$$\vec{I} = \iiint_V \vec{J}\, dV = \iiint_V \lambda\vec{\boldsymbol{v}}\, dV = \boldsymbol{Q}_\lambda\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (10.36)$$

Cette relation implique qu'une charge scalaire localisée de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$, qui a pour analogie une charge électrique localisée, devient, lorsqu'elle se déplace au sein du milieu solide, la source d'un courant $\vec{I}$ analogue au courant électrique.

10.3 – Relations d'Orowan

A partir de la connaissance des flux $\vec{J}_i$ de charges de dislocation, il est possible de remonter aux *distorsions plastiques macroscopiques* $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ du solide, telles que définies au chapitre 8, grâce à la relation *(8.8)*. Les dérivés totales $\dot{\vec{\beta}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\varepsilon}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\alpha}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\omega}}^{pl}$ et $\dot{\tau}^{pl}$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} \dot{\vec{\beta}}_i^{\,pl} = \vec{J}_i = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\vec{\omega}}^{pl} = \vec{J} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_i^{\,pl} = \vec{J}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{J} = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} - \left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\lambda - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) \\ \dot{\tau}^{pl} = \frac{S_n}{n} = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\vec{\alpha}}_i^{\,pl} = \vec{J}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{J} - \frac{1}{3}\vec{e}_i\frac{S_n}{n} = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} - \left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\lambda - \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) + \frac{1}{3}\vec{e}_i\left(\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}}\right) \end{cases} \qquad (10.37)$$

Des relations similaires peuvent être établies dans le cas de nombreuses dislocations se mouvant à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au milieu solide. Imaginons par exemple des dislocations identiques, toutes parallèles à une direction, et se mouvant toutes à la même vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$. L'intégrale de $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ sur une surface $\boldsymbol{S}$ perpendiculaire à la direction des lignes s'écrit

$$\iint_{\boldsymbol{S}} \dot{\vec{\beta}}_i^{pl}\, dS = \dot{\vec{\beta}}_i^{pl}\boldsymbol{S} = \iint_{\boldsymbol{S}} \left(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) dS = \iint_{\boldsymbol{S}} \vec{\lambda}_i\, dS \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N}\left(\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) \tag{10.38}$$

où $\boldsymbol{N}$ est le nombre de lignes qui traversent perpendiculairement la surface $\boldsymbol{S}$. Il vient donc

$$\dot{\vec{\beta}}_i^{pl} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{S}}\left(\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \boldsymbol{\Lambda}\left(\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) \tag{10.39}$$

dans laquelle $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{N} / \boldsymbol{S}$ est *la densité des dislocations actives*, c'est-à-dire le nombre de lignes de dislocations qui traversent perpendiculairement l'unité de surface. On peut s'assurer que la dimension de la dérivé totale $\dot{\vec{\beta}}_i^{\,pl}$ correspond bien à l'inverse d'un temps (1/s), puisque la densité $\boldsymbol{\Lambda}$ a pour dimension l'inverse d'une surface (1/m²) et que le produit $\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}$ a pour dimension des (m²/s). La grandeur $\boldsymbol{\Lambda}$ peut aussi s'interpréter comme *la longueur de lignes de dislocations actives par unité de volume de réseau* puisque sa dimension peut aussi s'écrire comme des (m/m³).

En appliquant le même traitement à toutes les relations *(10.36)*, on obtient le set d'équations suivantes, dans lesquelles on peut introduire les flux linéiques de charges $\vec{\Upsilon}_i$, $\vec{\Upsilon}$ et Υ associés au mouvement des lignes de dislocation

$$\begin{cases}
\dot{\vec{\beta}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right] = \boldsymbol{\Lambda}\vec{\Upsilon}_i \\
\dot{\vec{\omega}}^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\Lambda_{vis}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda}_{coin} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\right] = \boldsymbol{\Lambda}\vec{\Upsilon} \\
\dot{\vec{\varepsilon}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{e}_i\right)\Lambda_{vis} + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\Lambda}_{coin}\right)\right] = \boldsymbol{\Lambda}\left(\vec{\Upsilon}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\Upsilon}\right) \\
\dot{\tau}^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[-\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\Lambda}_{coin}\right] = \boldsymbol{\Lambda}\Upsilon \\
\dot{\vec{\alpha}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\vec{\Lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{e}_i\right)\Lambda_{vis} + \frac{1}{2}\vec{e}_i \wedge \left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\Lambda}_{coin}\right) + \frac{1}{3}\vec{e}_i\left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\Lambda}_{coin}\right)\right] = \boldsymbol{\Lambda}\left(\vec{\Upsilon}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\Upsilon} - \vec{e}_i\Upsilon / 3\right)
\end{cases} \tag{10.40}$$

Ces relations entre les vitesses de déformation macroscopique et les vitesses de déplacement des dislocations à l'échelle microscopique sont habituellement appelées les *relations d'Orowan*[1]. On peut aussi exprimer ces relations d'Orowan en fonction des vecteurs de Burgers des dislocations en lieu et place des densités linéiques de charge des lignes de dislocation

$$\begin{cases}
\dot{\vec{\beta}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_i\right)\right] \\
\dot{\vec{\omega}}^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[-\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{t}}\right] \\
\dot{\vec{\varepsilon}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\right] \\
\dot{\tau}^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}}\right] \\
\dot{\vec{\alpha}}_i^{pl} = \boldsymbol{\Lambda}\left[\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{e}_i \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right) - \frac{1}{3}\vec{e}_i\left[\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}}\right]\right]
\end{cases} \tag{10.41}$$

[1] *E. Orowan, Z. Phys., vol. 89, p. 605, 614, 634, 1934*

Chapitre 11

Equations d'évolution d'un réseau chargé et force de Peach et Koehler

La densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ et le flux tensoriel $\vec{J}_i$ de charges de dislocation, définis dans les chapitres précédents, permettent de trouver dans ce chapitre l'ensemble des équations fondamentales et phénoménologiques d'évolution spatio-temporelle auxquelles doit satisfaire un réseau solide anélastique et auto-diffusif contenant des charges de dislocation.

D'autre part, à partir de l'équation de bilan énergétique des solides chargés, il est possible de retrouver les forces qui agissent sur les charges de dislocation en présence de champs de contrainte non nulles. Ces forces portent le nom de *forces de Peach et Koehler.*

11.1 - Remplacement du tenseur des distorsions plastiques

Pour écrire les équations d'évolution spatio-temporelles d'un solide élastique et anélastique contenant des charges de dislocation, il suffit de reprendre toutes les équations d'évolution obtenues au chapitre 6, et reportées dans le tableau 6.1, et d'y remplacer tous les termes faisant apparaître le tenseur $\vec{\beta}_i^{pl}$ de distorsions plastiques par les concepts de densité de charges de dislocation et de flux de charges de dislocation que nous avons développés dans les chapitres précédents. Autrement dit, il faut effectuer les remplacements systématiques suivants des tenseurs de distorsions plastiques

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\beta}_i \rightarrow \vec{\beta}_i + \vec{\beta}_i^{\,pl} \\ d\vec{\beta}_i^{\,pl}/dt \rightarrow \vec{J}_i \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i^{\,pl} \rightarrow -\vec{\lambda}_i \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} + \vec{\omega}^{\,pl} \\ d\vec{\omega}^{\,pl}/dt \rightarrow \vec{J} \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega}^{\,pl} \rightarrow -\vec{\lambda} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \tau \rightarrow \tau + \tau^{\,pl} \\ d\tau^{\,pl}/dt \rightarrow S_n/n \end{array}\right. \qquad (11.1)$$

En réalité, le nombre de transformations à effectuer est relativement faible. En effet, on constate que seules les équations topologiques, les équations thermiques et l'équation de bilan énergétique sont touchées par ces remplacements. Alors que les transformations des équations topologiques sont immédiates puisque nous les avons établies en détail dans le chapitre précédent, ce ne sont donc que les modifications des équations thermiques et de l'équation de bilan énergétique que nous devons discuter plus en détail dans la suite de ce chapitre.

L'équation de la chaleur et la source d'entropie

En reprenant les équations *(6.23)* et *(6.30),* et en y effectuant les changements nécessaires d'après *(11.1)*, il vient

$$
\begin{aligned}
nT\frac{ds}{dt} &= -\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \left(\mu_L^* + h^*\right)S_L^{pl} - \left(\mu_I^* - h^*\right)S_I^{pl} \\
&+\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right)\vec{J}_L + \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right)\vec{J}_I \\
&+\vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - \text{div}\,\vec{J}_q
\end{aligned}
\qquad (11.2)
$$

$$
\begin{aligned}
S_e &= -\frac{1}{T}\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \frac{1}{T}\left(\mu_L^* + g^*\right)S_L^{pl} - \frac{1}{T}\left(\mu_I^* - g^*\right)S_I^{pl} \\
&+\frac{\vec{J}_L}{T}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right) + \frac{\vec{J}_I}{T}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right) \\
&+\frac{1}{T}\left(\vec{s}_k^{\,dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J}\right) + \vec{J}_q\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}
\qquad (11.3)
$$

Les équations dissipatives de plasticité

Les termes de source d'entropie liés à la déformation plastique générée par le mouvement des charges plastiques dans l'équation *(11.3)* sont les suivants

$$
S_e^{pl} = -\frac{1}{T}\left(\mu_L^* + g^*\right)S_L^{pl} - \frac{1}{T}\left(\mu_I^* - g^*\right)S_I^{pl} + \frac{1}{T}\left(\vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J}\right) \qquad (11.4)
$$

A partir de ces termes de la source d'entropie, il est possible de définir les équations dissipatives de plasticité qui caractériseront le flux tensoriel $\vec{J}_k$ de charges de dislocation. La première de ces relations concerne la trace de $\vec{J}_k$, qui est associée à la source $S_n / n = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}}$ de création ou d'annihilation de sites de réseau via *le phénomène de montée des dislocations coin* à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$. Cette montée est contrôlée par les sources de lacunes et d'interstitiels S_L^{pl} et S_I^{pl}, qui dépendent essentiellement des énergies de création-annihilation $\mu_L^* + g^*$ et $\mu_I^* - g^*$, mais assurément aussi par l'état local de pression p au sein du milieu et par la densité locale de charges de dislocation $\vec{\lambda}$ de type coin capables de laisser une *«trace»* de leur passage

$$
\begin{cases}
\dfrac{S_n}{n} = \displaystyle\sum_k \vec{e}_k\vec{J}_k = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{n}\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) \\
S_L^{pl} = S_L^{pl}\left[\left(\mu_L^* + g^*\right), p, \vec{\lambda}, v, T, C_L, C_I, \ldots\right] \\
S_I^{pl} = S_I^{pl}\left[\left(\mu_I^* - g^*\right), p, \vec{\lambda}, v, T, C_L, C_I, \ldots\right]
\end{cases}
\qquad (11.5)
$$

Les deux autres relations sont déduites des produits des flux de charges $\vec{J}_k$ et $\vec{J}$ par les forces thermodynamiques $\vec{s}_k / T$ et $\vec{m} / T$. Ces produits montrent bien que le flux tensoriel de charges $\vec{J}_k$ doit dépendre essentiellement du tenseur des contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$, alors que le flux vectoriel de charges $\vec{J}$ doit dépendre du torseur de moment $\vec{m}$, de sorte que

$$
\begin{cases}
\vec{J}_k = \vec{\lambda}_k \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{J}_k\left(\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, \ldots\right) \\
\vec{J} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \vec{J}\left(\vec{m}, \lambda, v, T, \ldots\right)
\end{cases}
\qquad (11.6)
$$

Ces deux relations ne sont en fait rien d'autre que les *équations dynamiques du mouvement*

des charges $\vec{\lambda}_k$ et λ au sein du milieu. On verra en effet à la section 11.2 qu'il s'applique des forces dépendant de $\vec{s}_k$ et $\vec{m}$ sur les charges de dislocation $\vec{\lambda}_k$ et λ. De la sorte, les flux associés $\vec{J}_k = \vec{\lambda}_k \wedge \vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{J} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}} + \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)/2$ doivent bien dépendre de $\vec{s}_k$ et $\vec{m}$ via une équation dynamique qui doit permettre de calculer la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ des charges connaissant les forces dépendant de $\vec{s}_k$ et $\vec{m}$. On reviendra plus tard sur ce problème de l'équation dynamique du mouvement des charges de dislocation, qui nous conduira au *modèle de la corde*.

Les équations dissipatives de sources de charges plastiques

En reprenant les équations de continuité des charges de dislocation du tableau 10.1, il y apparaît des sources de charge $\vec{S}_i^{\vec{\lambda}_i}$, $\vec{S}^{(\vec{\lambda})}$ et S^{λ}, qui sont notamment en partie responsables de la non-commutativité des opérateurs de temps et d'espace sur les tenseurs de distorsion $\vec{\beta}_i$ et $\vec{\omega}$. L'expression de ces sources $\vec{S}_i^{\vec{\lambda}_i}$, $\vec{S}^{(\vec{\lambda})}$ et S^{λ} va assurément dépendre des variables $\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, \ldots$, mais ne pourra être obtenue que par la description de la dynamique des charges de dislocation à l'échelle du réseau lui-même. On ne pourra en comprendre la nature que lorsqu'on traitera du *modèle de la corde*, l'équation dynamique du mouvement des dislocations, qui permettra de décrire l'existence de sources de dislocation (voir section 12.9).

L'équation de bilan énergétique

La modification essentielle apportée à l'équation de bilan énergétique est l'apparition dans celle-ci de nouveaux termes dissipatifs associés aux flux de charges $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$, ainsi qu'à la source de sites de réseau S_n

$$\begin{aligned} n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \left(\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt}\right) \\ = -\left(\vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - p\frac{S_n}{n}\right) + \rho\vec{g}\vec{\phi} - \mathrm{div}\left[-\phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) + p\vec{\phi}\right] \end{aligned} \qquad (11.7)$$

Ces termes $\vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - pS_n/n$ vont permettre de retrouver dans la section suivante les forces qui agissent sur les charges de dislocation en présence de champs de contrainte non nuls.

11.2 - Force de Peach et Koehler agissant sur les charges de dislocation

Dans l'équations de bilan énergétique, la puissance $\boldsymbol{P}_{ch}$ fournie aux charges par les champs de contrainte correspond au terme du bilan contenant les flux de charges

$$\boldsymbol{P}_{ch} = \vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - p\frac{S_n}{n} \qquad (11.8)$$

Dans ce terme de puissance, il est possible de remplacer les flux $\vec{J}_k$, $\vec{J}$ et S_n/n par leurs expressions en fonction de la vitesse des charges $\vec{\boldsymbol{v}}$, tirées du tableau 10.1. Il vient une expression de $\boldsymbol{P}_{ch}$ contenant cette fois les densités de charges $\vec{\lambda}_k$, $\vec{\lambda}$ et λ

$$\boldsymbol{P}_{ch} = \sum_k \vec{s}_k\left(\vec{\lambda}_k\wedge\vec{\boldsymbol{v}}\right) + \vec{m}\lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\vec{m}\left(\vec{\lambda}\wedge\vec{\boldsymbol{v}}\right) + p\lambda\vec{\boldsymbol{v}} = \left[\sum_k\left(\vec{s}_k\wedge\vec{\lambda}_k\right) + \lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m}\wedge\vec{\lambda}\right) + \vec{\lambda}p\right]\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (11.9)$$

La puissance $\boldsymbol{P}_{ch}$ fournie aux charges est donc le produit d'une vitesse par un terme qui ne peut être qu'une force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ agissant sur les densités de charges $\vec{\lambda}_k,\ \vec{\lambda},\ \lambda$ par unité de volume

$$\boldsymbol{P}_{ch} = \vec{\boldsymbol{f}}_{PK}\vec{\boldsymbol{v}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{s}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) + \lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\lambda}\right) + \vec{\lambda}p + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} \qquad (11.10)$$

Cette force qui dépend des tenseurs de contrainte $\vec{s}_k$, $\vec{m}$ et/ou p est généralement appelée la *force de Peach et Koehler* [1]. L'utilisation des tenseurs de contrainte $\vec{s}_k$, $\vec{m}$ et/ou p dépend évidemment, comme on l'a vu au chapitre 5, du choix de l'écriture de la fonction d'état énergie libre du milieu solide considéré.

Comme la dimension des $\vec{\lambda}_k,\ \vec{\lambda},\ \lambda$ est l'inverse d'une longueur (1/m) et que la dimension du torseur des moments est un moment par unité de volume, à savoir des (Nm/m^3), la force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ a pour dimension une force par unité de volume (N/m^3).

Le dernier terme contenant un vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ est rajouté ici car c'est un terme de force possible qui ne produirait pas de travail, et donc qui n'apparaîtrait pas dans l'expression *(11.9)* de la puissance. Nous verrons d'ailleurs plus tard que ce terme correspond en fait à une force relativiste analogue à la *force de Lorentz* en électromagnétisme.

La force de Peach et Kohler agissant sur une ligne de dislocation

La force de Peach et Koehler peut aussi être écrite dans le cas d'une dislocation, en intégrant la relation *(11.10)* sur la surface d'une section de la corde. Il vient alors, en négligeant le terme contenant le vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \iint_S \vec{\boldsymbol{f}}_{PK}\, dS = \iint_S \left[\sum_k \left(\vec{s}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) + \lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\lambda}\right) + \vec{\lambda}p\right] dS \qquad (11.11)$$

L'intégrale des $\vec{\lambda}_k,\ \vec{\lambda},\ \lambda$ sur la section d'une corde de dislocation donne les densités linéiques, de sorte que la force de Peach et Koehler agissant sur la ligne de dislocation est donnée par

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{s}_k \wedge \vec{\Lambda}_k\right) + \Lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right) + \vec{\Lambda}p \qquad (11.12)$$

La dimension de la force $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ agissant sur la dislocation est une force par unité de longueur (N/m). C'est en fait la *force par unité de longueur de la ligne* en présence de champs de contrainte $\vec{s}_k, \vec{m}, p$. L'écriture de la force de Peach et Koehler $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ en utilisant les tenseurs de contrainte $p,\ \vec{m},\ \vec{s}_k$ est très intéressante, car elle permet de s'en faire une représentation beaucoup plus claire qu'avec la notation $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \sum\left(\vec{\sigma}_k \wedge \vec{\Lambda}_k\right)$ habituellement utilisée avec le tenseur de contrainte symétrique $\vec{\sigma}_k$. En effet, supposons un solide dans lequel l'expansion volumique est nulle, et donc qui possèderait une pression p négligeable. En ce cas, on sait déjà qu'on peut remplacer le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_k$ par le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, de sorte que la force devient *une force de glissement* qui s'écrit $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \Lambda\vec{m} + \left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right)/2$, dans laquelle le terme $\Lambda\vec{m}$ est la force agissant sur la composante vis Λ de la dislocation et le terme $\left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right)/2$ est la force agissant sur la composante coin $\vec{\Lambda}$ de la dislocation. Comme la composante m_k du moment de rotation est associée aux composantes de cisaillement σ_{ij} et σ_{ji} du tenseur de contrainte, on peut se faire immédiatement une représentation très claire des forces agissant sur une dislocation. De même en va-t-il concernant la force de pression $\vec{\Lambda}p$, qui n'agit que sur

[1] *M. O. Peach, J. S. Koehler, Phys. Rev. , vol. 80,, p. 436, 1950*

la composante coin $\vec{\Lambda}$ des dislocations et qui correspond, vu sa direction (figure 10.3b), à *une force de montée des dislocations*.

On peut encore utiliser les relations *(10.31)* pour exprimer la force de Peach et Koehler directement à partir du vecteur de Burgers de la dislocation

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{s}_k\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_k\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{m} - \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \wedge \vec{m}\right] + \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) p \qquad (11.13)$$

Tableau 11.1 - Force de Peach et Koehler

Force volumique sur une densité volumique de charges de dislocation

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{s}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) + \lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\lambda}\right) + \vec{\lambda} p + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} \qquad (1)$$

Force linéique sur une ligne de dislocation

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{s}_k \wedge \vec{\Lambda}_k\right) + \Lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right) + \vec{\Lambda} p \qquad (2)$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \sum_k \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{s}_k\right)\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{e}_k\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{m} - \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \wedge \vec{m}\right] + \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) p \qquad (3)$$

Force globale sur une charge localisée de rotation

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \iiint_V \vec{\boldsymbol{f}}_{PK}\, dV = \vec{m} \iiint_V \lambda\, dV = \boldsymbol{Q}_\lambda \vec{m} \qquad (4)$$

La force de Peach et Kohler agissant sur une charge localisée de rotation

Dans le cas d'une charge localisée $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de rotation, on obtient la force de Peach et Koehler en intégrant la relation *(11.10)* sur le volume de la charge localisée. Il vient alors

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \iiint_V \vec{\boldsymbol{f}}_{PK}\, dV = \vec{m} \iiint_V \lambda\, dV = \boldsymbol{Q}_\lambda \vec{m} \qquad (11.14)$$

En ce cas, la dimension de $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ est celle d'une pure force, exprimée en (N), et qui est l'analogue de la force électrique agissant sur une charge électrique localisée ($\vec{\boldsymbol{F}}_{électrique} = q\vec{E}$).
Les différentes expressions possibles de la force de Peach et Koehler sont reportées dans le tableau 11.1.

11.3 - Equations d'évolution spatio-temporelle des solides chargés

Il est simple de combiner maintenant l'ensemble des résultats obtenus dans ce chapitre avec les équations des tableaux 6.1 et 10.1 pour obtenir les équations complètes d'évolution spatio-

temporelle d'un réseau solide auto-diffusif, présentant des comportements phénoménologiques d'élasticité et d'anélasticité, et contenant des densités et des flux de charges de dislocation. Comme le montre le tableau 11.2, ce système d'équations est assez complexe, surtout au niveau du nombre élevé d'équations phénoménologiques d'état et d'équations phénoménologiques de dissipation nécessaires à une description complète de tous les phénomènes possibles dans un tel milieu.

On peut déjà s'imaginer que les nouveaux concepts de densités et de flux de charges de dislocation devraient permettre de décrire les phénomènes de plasticité et d'anélasticité au niveau microscopique du réseau solide discret, en y introduisant une microstructure évolutive de charges plastiques qui devrait permettre de traduire les comportements non-markoviens de la plasticité. De plus, l'approche par des charges plastiques au niveau microscopique du réseau solide discret devrait aussi permettre en principe de trouver des expressions locales exactes pour les équations dissipatives *(11.5)* à *(11.9)* liées aux charges plastiques.

Tableau 11.2 - Equations fondamentales d'évolution des solides auto-diffusifs, élastiques et anélastiques, avec charges de dislocation

Equations topologiques

$$\begin{cases} \vec{J}_i = -\dfrac{d\vec{\beta}_i}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i & (1) \\ \vec{J} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = -\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\phi} & (2) \\ \dfrac{S_n}{n} = \sum_k \vec{e}_k \vec{J}_k = -\dfrac{d\tau}{dt} + \text{div}\,\vec{\phi} & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\lambda}_i = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i \quad avec \quad \text{div}\,\vec{\lambda}_i = 0 & (4) \\ \vec{\lambda} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\beta}_k & (5) \\ \lambda = \dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{\lambda}_k = \text{div}\,\vec{\omega} & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{(\delta)} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) = \vec{\beta}_i^{él} + \vec{\beta}_i^{an} + \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}_o(t) & (7) \\ \vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\beta}_k = \vec{\omega}^{(\delta)} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) & (8) \\ \tau = \sum_k \vec{\beta}_k \vec{e}_k = \sum_k \vec{\beta}_k^{(\delta)} \vec{e}_k = \tau^{él} \quad (\tau^{an} \equiv 0 \ \textit{par hypothèse}) & (9) \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega} = \vec{\beta}_i^{(\delta)} - \vec{e}_i \wedge \vec{\omega}^{(\delta)} = \vec{\varepsilon}_i^{él} + \vec{\varepsilon}_i^{an} & (10) \\ \vec{\alpha}_i = \vec{\varepsilon}_i - \dfrac{1}{3}\tau \vec{e}_i = \vec{\alpha}_i^{él} + \vec{\alpha}_i^{an} & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/dt = \partial/\partial t + (\vec{\varphi}\vec{\nabla}) & (12) \\ \vec{\varphi} = \vec{\phi} - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t) \wedge \vec{r} & (13) \end{cases}$$

Equations dynamique

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{g} + \sum_k \vec{e}_k \,\text{div}\,\vec{s}_k \; - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{m} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} n = 1/v = n_0 e^{-\tau} & (15) \\ \vec{p} = m\left(\vec{\phi} + C_I\vec{\phi}_I - C_L\vec{\phi}_L\right) = m\vec{\phi} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \dfrac{m}{n}\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right) = \dfrac{1}{n}\left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] & (16) \\ \rho = mn\left(1 + C_I - C_L\right) & (17) \end{cases}$$

Equations de diffusion

$$\begin{cases} n\dfrac{dC_L}{dt} = \left(S_{I-L} + S_L{}^{pl}\right) - C_L\left(S_L{}^{pl} - S_I{}^{pl}\right) - \text{div}\,\vec{J}_L & (18) \\ n\dfrac{dC_I}{dt} = \left(S_{I-L} + S_I{}^{pl}\right) - C_I\left(S_L{}^{pl} - S_I{}^{pl}\right) - \text{div}\,\vec{J}_I & (19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{J}_L = nC_L\Delta\vec{\varphi}_L = nC_L\left(\vec{\phi}_L - \vec{\phi}\right) = nC_L\left(\vec{\varphi}_L - \vec{\varphi}\right) & (20) \\ \vec{J}_I = nC_I\Delta\vec{\varphi}_I = nC_I\left(\vec{\phi}_I - \vec{\phi}\right) = nC_I\left(\vec{\varphi}_I - \vec{\varphi}\right) & (21) \end{cases}$$

Equations thermiques

$$nT\frac{ds}{dt} = -\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \left(\mu_L^* + h^*\right)S_L^{pl} - \left(\mu_I^* - h^*\right)S_I^{pl} + T\vec{J}_L\vec{X}_L + T\vec{J}_I\vec{X}_I + \vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - \operatorname{div}\vec{J}_q \quad (22)$$

$$\begin{cases} \mu_L^* = \mu_L - \frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_L^2 - 2\Delta\vec{\varphi}_L^2\right) & (23) \\ \mu_I^* = \mu_I + \frac{1}{2}m\vec{\phi}_I^2 & (24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{X}_q = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{1}{T} & (25) \\ \vec{X}_L = \frac{1}{T}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \mu_L^* + m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_L - 2\Delta\vec{\varphi}_L\right) - m\vec{g}\right) & (26) \\ \vec{X}_I = \frac{1}{T}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \mu_I^* - m\frac{d}{dt}\left(\vec{\phi}_I\right) + m\vec{g}\right) & (27) \end{cases}$$

$$h^* = f + Ts + pv + \frac{1}{2}m\vec{\phi}^2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \quad (28)$$

Equations liées aux charges

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\lambda}_i}{dt} \cong \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda}_i = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}_i\right) = \vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}_i & (29) \\ \frac{d\vec{\lambda}}{dt} \cong \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\lambda}\right) - \vec{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\vec{\lambda} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})} - 2\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{J}^{(\vec{\lambda})} - \vec{\boldsymbol{v}}\theta & (30) \\ \frac{d\lambda}{dt} \cong S^{(\lambda)} - \left(\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\nabla}\right)\lambda = S^{(\lambda)} - \operatorname{div}\left(\lambda\vec{\boldsymbol{v}}\right) = S^{(\lambda)} - \operatorname{div}\vec{J}^{(\lambda)} & (31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}} & (32) \\ \vec{J} = \vec{J}^{(\lambda)} + \vec{J}^{(\vec{\lambda})} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)/2 & (33) \\ S_n / n = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} & (34) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{S}^{(\vec{\lambda})} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} & (35) \\ S^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} & (36) \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \sum_k\left(\vec{s}_k \wedge \vec{\lambda}_k\right) + \lambda\vec{m} + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\lambda}\right) + \vec{\lambda}p + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} \quad (37)$$

Equations phénoménologiques d'évolution des solides auto-diffusifs, élastiques et anélastiques, avec charges de dislocation

Fonctions et équations d'état

$$f = f\left(\alpha_{ij}^{él}, \alpha_{ij}^{an}, \omega_k^{él}, \omega_k^{an}, \tau^{él}, C_L, C_I, T\right) \qquad (38)$$

$$\begin{cases} s_{ij} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{él}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{él}}\right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij}\displaystyle\sum_k \frac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{él}} = s_{ij}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (39) \\ m_k = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{él}} = m_k(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (40) \\ p = -n\dfrac{\partial f}{\partial \tau^{él}} = p(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (41) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{ij}^{dis} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}^{an}} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ji}^{an}}\right) - \dfrac{n}{3}\delta_{ij}\displaystyle\sum_k \frac{\partial f}{\partial \alpha_{kk}^{an}} = s_{ij}^{dis}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (42) \\ m_k^{dis} = n\dfrac{\partial f}{\partial \omega_k^{an}} = m_k^{dis}(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (43) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\dfrac{\partial f}{\partial T} = s(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (44) \\ \mu_L = \dfrac{\partial f}{\partial C_L} = \mu_L(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (45) \\ \mu_I = \dfrac{\partial f}{\partial C_I} = \mu_I(\alpha_{lm}^{él}, \omega_n^{él}, \tau^{él}, \alpha_{lm}^{an}, \omega_n^{an}, C_L, C_I, T) & (46) \end{cases}$$

Equations de dissipation: auto-diffusion et création-annihilation de paires

$$\begin{cases} \vec{J}_q = \vec{J}_q(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, \ldots) & (47) \\ \vec{J}_L = \vec{J}_L(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, \ldots) & (48) \\ \vec{J}_I = \vec{J}_I(\vec{X}_q, \vec{X}_L, \vec{X}_I, n, T, C_L, C_I, \ldots) & (49) \end{cases}$$

$$S_{I-L} = S_{I-L}\left(\mu_L^* + \mu_I^*, n, T, C_L, C_I, \ldots\right) \qquad (50)$$

Equations de dissipation: anélasticité

$$\begin{cases} \vec{s}_i = \vec{s}_i^{cons}\left(\vec{\alpha}_m^{an}, v, T, \ldots\right) + \vec{s}_i^{dis}\left(\dfrac{d\vec{\alpha}_m^{an}}{dt}, v, T, \ldots\right) & (51) \\ \vec{m} = \vec{m}^{cons}\left(\vec{\omega}^{an}, v, T, \ldots\right) + \vec{m}^{dis}\left(\dfrac{d\vec{\omega}^{an}}{dt}, v, T, \ldots\right) & (52) \end{cases}$$

Equations de dissipation: flux de charges de dislocation

$$\begin{cases} \vec{J}_k = \vec{\lambda}_k \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{J}_k\left(\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, ...\right) & (53) \\ \vec{J} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \vec{J}\left(\vec{m}, \lambda, v, T, ...\right) & (54) \\ \frac{S_n}{n} = \sum_k \vec{e}_k \vec{J}_k = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{n}\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) & (55) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_L^{pl} = S_L^{pl}\left[\left(\mu_L^* + g^*\right), p, \vec{\lambda}, v, T, C_L, C_I, ...\right] & (56) \\ S_I^{pl} = S_I^{pl}\left[\left(\mu_I^* - g^*\right), p, \vec{\lambda}, v, T, C_L, C_I, ...\right] & (57) \end{cases}$$

$$g^* = f + pv + m\vec{\phi}^2 / 2 - \mu_L C_L - \mu_I C_I \quad (58)$$

Equations de dissipation: sources de charges de dislocation

$$\vec{S}_i^{\vec{\lambda}_i} = \vec{S}_i^{\vec{\lambda}_i}(\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, ...) \quad (59) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{S}^{(\vec{\lambda})} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} = \vec{S}^{(\vec{\lambda})}(\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, ...) & (60) \\ S^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{S}_k^{(\vec{\lambda}_i)} = S^{(\lambda)}(\vec{s}_m, \vec{\lambda}_n, v, T, ...) & (61) \end{cases}$$

Equations additionnelles d'évolution

Continuité de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] = -\mathrm{div}\left(n\vec{p}\right) \quad \text{dans } \boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3 \quad (62)$$

Flux de travail et force de surface

$$\vec{J}_w = \mu_L^*\vec{J}_L + \mu_I^*\vec{J}_I - \phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi} \wedge \vec{m}\right) + p\vec{\phi} \quad (63)$$

$$\vec{F}_S = \sum_k \vec{e}_k\left(\vec{s}_k\vec{\boldsymbol{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{m} \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right) - \vec{\boldsymbol{n}}p \quad (64)$$

Source d'entropie

$$\begin{aligned} S_e = &-\frac{1}{T}\left(\mu_L^* + \mu_I^*\right)S_{I-L} - \frac{1}{T}\left(\mu_L^* + g^*\right)S_L^{pl} - \frac{1}{T}\left(\mu_I^* - g^*\right)S_I^{pl} + \vec{J}_L\vec{X}_L \\ &+ \vec{J}_I\vec{X}_I + \frac{1}{T}\left(\vec{s}_k^{dis}\frac{d\vec{\beta}_k^{an}}{dt} + \vec{m}^{dis}\frac{d\vec{\omega}^{an}}{dt} + \vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J}\right) + \vec{J}_q\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \quad (65)$$

Bilan énergétique

$$\begin{aligned} &n\vec{\phi}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} - m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} + m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}\right) + \left(\vec{s}_k\frac{d\vec{\beta}_k}{dt} + \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - p\frac{d\tau}{dt}\right) \\ &+ \left(\vec{s}_k\vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - p\frac{S_n}{n}\right) = \rho\vec{g}\vec{\phi} - \mathrm{div}\left[-\phi_k\vec{s}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{\phi} \wedge \vec{m}\right) + p\vec{\phi}\right] \end{aligned} \quad (66)$$

PARTIE I

D

Application: éléments de théorie des dislocations dans les solides usuels

Equations de Maxwell à expansion constante

Champs et énergies des dislocations vis et coin

Interactions entre dislocations

Modèle de la corde

Chapitre 12 - Eléments de théorie des dislocations dans les solides usuels

Dans ce chapitre, on introduit le solide le plus simple qu'il est possible de considérer, à savoir le *solide parfait isotrope*, et on discute l'équation de Newton de ce solide. On peut alors montrer que ce solide est parfaitement décrit par des équations analogues aux équations de Maxwell lorsque l'expansion volumique est homogène au sein du solide.

On calcul ensuite les champs de distorsions, les énergies et les interactions des dislocations dans ce solide parfait. Dans le cas de dislocations immobiles dans le réseau solide, les *distorsions statiques du réseau* induites par celles-ci stockent de l'*énergie élastique* au sein du réseau. Cette énergie stockée peut alors être considérée comme l'*énergie de repos des dislocations*. Dans le cas où les dislocations sont mobiles dans le réseau, les *déplacements du réseau* induits par le mouvement des dislocations sont associés à une *énergie cinétique*. A basse vitesse, cette énergie cinétique est directement liée à l'énergie de repos de ces dislocations via des relations similaires à la fameuse *expression d'Einstein* $E_0 = M_0 c^2$, ce qui permet d'introduire *de manière tout-à-fait classique* la notion de *masse d'inertie des dislocations*.

A partir des champs de distorsion induits par les dislocations et de la force de Peach et Koehler, on décrit ensuite quelques interactions pouvant intervenir entre dislocations. Finalement, on introduit le *modèle de la corde*, qui permet de traiter la dynamique d'une dislocation qui se déplace dans le réseau en se déformant.

12.1 – Le solide parfait et son équation de Newton

On appellera *réseau parfait* le réseau isotrope tel qu'on l'a défini à la section 7.1, avec la fonction d'état *(7.7)*. On supposera de plus que, de manière très générale, seul le module k_2 est strictement positif dans cette fonction d'état, alors que les modules k_1 et k_0 peuvent être positifs, négatifs ou nuls, et que ces modules peuvent dépendre de la température (section 7.3). La partie purement élastique de la fonction d'état du *réseau parfait* ne dépend que de τ, de τ^2 et de $(\vec{\alpha}_i^{\,él})^2$

$$f^{él} = -k_0(T)\tau + k_1\tau^2 + k_2\sum_i \vec{\alpha}_i^{\,2} \qquad (12.1)$$

de sorte que les équations d'état qui caractérisent complètement l'élasticité du *réseau parfait* se limitent au scalaire de pression p et au tenseur symétrique transverse de contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$

$$\vec{s}_i = n\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2nk_2\,\vec{\alpha}_i^{él} \quad \text{et} \quad p = -n\frac{\partial f}{\partial \tau^{él}} = n\left(k_0(T) - 2k_1\tau^{él}\right) \qquad (12.2)$$

On constate que le scalaire de pression p dépend à la fois du module $k_0(T)$, qui peut contenir

des effets de température, et de l'expansion volumique τ via le module k_1.

L'équation de Newton du solide parfait

En négligeant la force de gravité, l'équation de Newton *(6.11)* s'écrit, sachant que le torseur de moment $\vec{m}$ est nulle, et en utilisant les équations d'état *(12.2)*, comme

$$\begin{aligned} n\frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{s}_k - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \\ &= 2k_2 \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\left(n\vec{\alpha}_i^{\,él}\right) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(nk_0(T) - 2nk_1\tau^{él}\right) + nm\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \end{aligned} \qquad (12.3)$$

En tenant compte du fait que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n = -n\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau$, on obtient l'équation de Newton suivante

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2k_2 \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k - 2k_2 \sum_k \left(\vec{e}_k \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\left(2k_1(1-\tau)+k_0\right)\tau\right] + m\vec{\phi}_I \frac{dC_I}{dt} - m\vec{\phi}_L \frac{dC_L}{dt} \qquad (12.4)$$

Ecrite sous cette forme, l'équation de Newton ne permet pas de séparer les effets conduisant à une quantité de mouvement de nature «rotationnelle», qui serait liée à des cisaillements purs du réseau sans expansion volumique, de ceux conduisant à une quantité de mouvement de nature «divergente», qui serait liée aux expansions volumiques locales du réseau.
Mais il est possible de trouver une autre formulation de l'équation de Newton permettant de séparer ces effets. En effet, on peut utiliser les relations donnant le *vecteur de flexion* pour relier les dérivés spatiales des tenseurs de distorsion

$$\vec{\chi} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \vec{\lambda} \qquad (12.5)$$

En émettant l'hypothèse de l'existence d'une anélasticité du réseau, mais *uniquement par cisaillement*, les déformations du réseau sont entièrement caractérisées par $\vec{\alpha}_i$ et τ tels que

Hypothèse 1: $\vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}_i^{\,él} + \vec{\alpha}_i^{\,an}$ et $\tau = \tau^{él}$ *(12.6)*

l'expression *(12.5)* peut s'écrire

$$\sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\left(\vec{\alpha}_k^{\,él} + \vec{\alpha}_k^{\,an}\right) = \vec{\lambda} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{él} \qquad (12.7)$$

Cette relation combine les effets d'élasticité avec les effets d'anélasticité, qui ne peuvent être séparés de par la présence de la densité $\vec{\lambda}$ de charges de flexion, ce qui limite grandement l'applicabilité de cette relation. Mais on peut supposer que la présence d'une densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charges de flexion dans le réseau doit essentiellement être liée au comportement des distorsions élastiques, de sorte qu'on va émettre l'hypothèse simplificatrice que la relation *(12.7)* peut sans autre se scinder en deux relations distincts, une pour la partie élastique et l'autre pour la partie anélastique des distorsions, sous la forme suivante

Hypothèse 2:
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k^{\,él} = \vec{\lambda} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{\,él} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{él} \\ \displaystyle\sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k^{\,an} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{\,an} \end{cases} \qquad (12.8)$$

En utilisant alors la première relation *(12.8)*, l'équation de Newton *(12.4)* peut aussi s'écrire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} - 2k_2\sum_k\left(\vec{e}_k\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k + \overrightarrow{\text{grad}}\left[\left(\frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau) + k_0\right)\tau\right] + m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} + 2k_2\vec{\lambda} \qquad (12.9)$$

Sous cette nouvelle forme, l'équation de Newton devient vraiment intéressante, car il est maintenant possible de séparer les effets de purs cisaillement du réseau sans expansion volumique des effets de pure expansion volumique du réseau. Le seul terme de cette équation qui ne soit pas linéaire est le terme de couplage $2k_2\sum\left(\vec{e}_k\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k$. Pour de faibles déformations, comme dans les solides usuels, ce terme de deuxième ordre peut être généralement négligé.

12.2 - Analogie avec les équations de Maxwell à expansion homogène

En supposant un solide dans lequel l'expansion volumique est homogène, donc satisfaisant

Hypothèse 3: $\tau = \tau(t) \neq \tau(\vec{r},t)$ *(12.10)*

et en supposant de plus que les concentrations de lacunes et d'interstitiels sont indépendantes du temps

Hypothèse 4: $\frac{dC_I}{dt} = \frac{dC_L}{dt} = 0$ *(12.11)*

l'équation de Newton devient simplement

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} + 2k_2\vec{\lambda} \qquad (12.12)$$

En ce cas, il est possible d'introduire dans l'équation *(12.12)* une nouvelle grandeur, à savoir un *torseur de moment* $\vec{m}$ calqué sur le torseur de moment apparaissant dans l'équation de Newton *(6.11)*, en écrivant

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} + 2k_2\vec{\lambda} = -\frac{1}{2n}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{m} + 2k_2\vec{\lambda} \qquad (12.13)$$

Ainsi, dans le *réseau parfait* à expansion volumique homogène, le torseur de moment $\vec{m}$ est lié au vecteur de rotation élastique $\vec{\omega}^{él}$ par la relation très simple

$$\vec{m} = 4nk_2\,\vec{\omega}^{él} \qquad (12.14)$$

Par conséquent, en imaginant que le torseur de moment $\vec{m}$ dérive d'une équation d'état, on obtient la *densité d'énergie libre de rotation élastique* par site de réseau, à expansion volumique homogène, sous la forme

$$m_k = n\frac{\partial f^{él}_{rotation}}{\partial\omega^{él}_k} = 4nk_2\vec{\omega}^{él} \;\Rightarrow\; f^{él}_{rotation} = 2k_2\left(\vec{\omega}^{él}\right)^2 \qquad (12.15)$$

Ainsi, la *densité volumique d'énergie libre de rotation élastique*, liée aux déformations par pures rotations élastiques à expansion volumique homogène, est égale à l'énergie élastique des déformations par purs cisaillements à expansion volumique homogène

$$f^{él}_{rotation}\Big|_{\tau=\tau_0} = 2k_2\left(\vec{\omega}^{él}\right)^2 = k_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{él})^2 = f^{\,él}_{\,cisaillement}\Big|_{\tau=\tau_0} \qquad (12.16)$$

Finalement, en utilisant la deuxième relation de l'hypothèse *(12.8)*, à savoir qu'il existe une relation univoque $\sum\vec{e}_k\,\text{div}\,\vec{\alpha}_k^{an} = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{an}$ entre les dérivés spatiales des cisaillements anélas-

tiques et des rotations anélastiques, on déduit que l'anélasticité du réseau par cisaillements anélastiques purs sans variations de l'expansion volumique peut aussi se réduire, à expansion volumique homogène, à une simple *anélasticité du réseau par pure rotation anélastique*. Cette anélasticité peut alors être représentée au sein d'un vecteur de rotation global $\vec{\omega}$ du réseau, en écrivant la relation

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) = \frac{\vec{m}}{4nk_2} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) \qquad (12.17)$$

où $\vec{\omega}_0(t)$ représente la rotation globale uniforme du réseau.

On en conclue que, dans les endroits du réseau où l'expansion volumique peut être considérée comme homogène, il est possible de traiter de manière univoque les cisaillements purs élastiques et anélastiques du réseau à l'aide des seuls vecteurs de rotation $\vec{\omega}^{él}$ et $\vec{\omega}^{an}$, ce qui est très utile pour traiter le problème des champs, énergies et interactions des dislocations au sein d'un réseau parfait.

Comme la densité $\vec{\lambda}$ de charges de flexion est associée aux charges de dislocation de type coin, qui sont susceptibles d'apporter localement une variation d'expansion volumique du solide, on va supposer ici à priori un solide dans lequel ce type de charges est négligeable, en posant

Hypothèse 5: $\vec{\lambda} \approx 0$ *(12.18)*

Comme n est une constante en ce cas, on peut réécrire l'équations de Newton *(12.13)* comme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} = -\frac{1}{2n} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{m} \qquad (12.19)$$

Les équations nécessaires à la description complète des cisaillements purs d'un solide parfait doivent encore incorporer les équations topologiques pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, à savoir l'équation géométrocinétique et l'équation de géométrocompatibilité en présence de charges de dislocation

$$\vec{J} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = -\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \vec{\lambda}_k = \mathrm{div}\,\vec{\omega} \qquad (12.20)$$

Avec l'hypothèse 4, on a que $C_L = cste$ et $C_I = cste$, de sorte que la densité de masse ρ devient égale à une constante

$$\rho = m\left(n + n_I - n_L\right) = mn\left(1 + C_I - C_L\right) = cste \qquad (12.21)$$

et que l'équation d'évolution de cette densité dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ permet de déduire que la divergence de $n\vec{p}$ est nulle

$$\partial\rho / \partial t = 0 = -\mathrm{div}\left(n\vec{p}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{p} = 0 \qquad (12.22)$$

La grandeur $\vec{p}$ peut alors se déduire grâce aux relations suivantes

$$\vec{p} = \frac{1}{n}\left(\rho\vec{\phi} + \vec{J}_m\right) = \frac{1}{n}\left[\rho\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] = m\left[\vec{\phi} + \left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \frac{1}{n}\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right] \qquad (12.23)$$

De plus, en imaginant qu'il n'existe pas de sources S^λ de charges de rotation

Hypothèse 6: $S^\lambda = 0$ *(12.24)*

on obtient aussi une équation pour la continuité des charges de rotation

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\operatorname{div}\vec{J} \qquad (12.25)$$

Finalement, on peut établir l'équation de continuité de l'énergie à partir des équations *(12.19)* et *(12.20)*

$$-\vec{m}\vec{J} = \vec{m}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\phi}\frac{d(n\vec{p})}{dt} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\vec{\phi}\wedge\vec{m}\right) \qquad (12.26)$$

Les relations ainsi obtenues pour les cisaillements purs d'un solide parfait dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ en translation $\vec{\phi}_o(t)$ et en rotation $\dot{\vec{\omega}}_o(t)$ dans le référentiel absolu sont reportées au tableau 12.1, et comparées avec les *équations de Maxwell de l'électromagnétisme*.

Tableau 12.1 - Formulation «maxwellienne» des équations d'un solide parfait à expansion volumique τ homogène dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} -\dfrac{d(2\vec{\omega})}{dt} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\phi} = (2\vec{J}) \\ \operatorname{div}(2\vec{\omega}) = (2\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{H} = \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(n\vec{p})}{dt} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) \\ \operatorname{div}(n\vec{p}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\vec{\omega}) = \left(\dfrac{1}{nk_2}\right)\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) + (2\vec{\omega}^{an}) + \left(2\vec{\omega}_0(t)\right) \\ (n\vec{p}) = (nm)\left[\vec{\phi} + \left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + \left(\dfrac{1}{n}\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)\right)\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} + \vec{P}_0(t) \\ \vec{B} = \mu_0\left[\vec{H} + \left(\chi^{para} + \chi^{dia}\right)\vec{H} + \vec{M}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(2\lambda)}{dt} = -\operatorname{div}(2\vec{J}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)(2\vec{J}) = \\ \quad \vec{\phi}\dfrac{d(n\vec{p})}{dt} + \left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\dfrac{d(2\vec{\omega})}{dt} - \operatorname{div}\left(\vec{\phi}\wedge\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{E}\vec{j} = \\ \quad \vec{H}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\vec{H}\wedge\vec{E}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_t = \sqrt{\dfrac{nk_2}{nm}} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} \end{cases}$$

On constate qu'il existe une analogie remarquable et absolument complète entre ces deux ensembles d'équations, hormis le fait que les équations d'évolution font intervenir la dérivée parti-

culaire, alors que les équations de Maxwell font intervenir la dérivée partielle par rapport au temps. Cependant, on rappelle ici que la dérivée particulaire dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ peut être remplacée sans problème par la dérivée partielle par rapport au temps si les déformations restent suffisamment faibles et/ou lentes au voisinage de l'origine du référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$! Cette analogie sera discutée plus longuement dans la troisième partie de ce livre. Pour l'instant, on se contentera de constater qu'il existe les analogies suivantes:

- le *champ de rotation* $2\vec{\omega}$ est l'analogue du *champ de déplacement électrique* $\vec{D}$,
- la *quantité de mouvement* et *flux de masse* $n\vec{p}$ est l'analogue du *champ d'induction magnétique* $\vec{B}$,
- le *torseur de moment* $\vec{m}/2$ est l'analogue du *champ électrique* $\vec{E}$,
- le *champ de vitesse* $\vec{\phi}$ est l'analogue du *champ magnétique* $\vec{H}$,
- la *densité* 2λ *de charges de rotation* est l'analogue de la *densité* ρ *de charges électriques*,
- le *flux* $2\vec{J}$ *de charges de rotation* est l'analogue de la *densité* $\vec{j}$ *de courant électrique*,
- l'*anélasticité* $2\vec{\omega}^{an}$ est l'analogue de la *polarisation diélectrique* $\vec{P}$ *de la matière*,
- le *transport de masse* $nm\vec{\phi}$ *par le mouvement du réseau* est l'analogue du terme $\mu_0\vec{H}$ de l'*induction magnétique dans le vide*,
- le *transport de masse* $nm(C_I - C_L)\vec{\phi}$ *par le mouvement d'entraînement des défauts ponctuels par le réseau* est l'analogue du terme $\mu_0(\chi^{para} + \chi^{dia})\vec{H}$ de *paramagnétisme* et de *diamagnétisme de la matière*,
- le *transport de masse* $m(\vec{J}_I - \vec{J}_L)$ *dû au phénomène d'auto-diffusion des lacunes et des interstitiels* est l'analogue de la *magnétisation* $\vec{M}$ *de la matière,*
- *l'inverse du module élastique* $1/K_2$ est l'analogue de la *permittivité diélectrique du vide* ε_0,
- la *densité de masse* $nm\vec{\phi}$ est l'analogue de la *perméabilité magnétique du vide* μ_0,
- la *célérité des ondes transversales* c_t est l'analogue de la vitesse de la lumière c,
- le *flux d'énergie élastique* $\vec{\phi} \wedge \vec{m}/2$ est l'analogue du vecteur de Poynting $\vec{H} \wedge \vec{E}$.

12.3 – Champs et énergies d'une dislocation vis

Le champ de rotation d'une dislocation vis

Considérons une *corde de dislocation de type vis,* sous la forme d'un cylindre rectiligne de longueur infinie et de rayon R, contenant une densité λ de charges de rotation (figure 12.1).
Appliquons la relation de compatibilité $\mathrm{div}\vec{\omega}^{él} = \lambda$ sous forme d'une intégration sur un volume cylindrique de rayon r et de longueur unité. Il vient

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{\omega}^{vis}\, dV = \oiint_S \vec{\omega}^{vis}\vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \vec{\omega}^{vis}\vec{\boldsymbol{n}}\, 2\pi r = \iiint_V \lambda\, dV \qquad (12.27)$$

dans laquelle $\vec{\boldsymbol{n}}$ est le vecteur normale à la surface cylindrique.
A l'extérieur de la charge, c'est-à-dire pour $r > R$, cette relation fournit le champ $\vec{\omega}$ suivant

$$\vec{\omega}^{vis}_{ext}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2\pi r}\left(\lambda\pi R^2\right) = \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}^{vis}_{ext} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2} \quad (r > R) \qquad (12.28)$$

où Λ est la *charge linéique de rotation de la corde* donnée par l'intégration de la densité λ sur l'unité de longueur de la corde

$$\Lambda = \pi R^2 \lambda \qquad (12.29)$$

A l'intérieur de la charge, c'est-à-dire pour $r < R$, on a alors

$$\vec{\omega}_{int}^{vis}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2\pi r}\left(\pi\lambda r^2\right) = \frac{\Lambda}{2\pi R^2} r \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{int}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi R^2}\vec{r} \quad (r < R) \qquad (12.30)$$

Le comportement du module de $\vec{\omega}^{vis}$ en fonction de la distance r du centre du cylindre est reporté à la figure 12.2.

Le champ de déplacement par rotation d'une dislocation vis

Connaissant le champ des rotations élastiques $\vec{\omega}_{ext}^{vis}$ extérieur à la corde, il est possible de déduire assez facilement le champ de déplacement $\vec{u}_{ext}^{vis}$ élastique associé à la rotation due à la présence de la corde chargée puisqu'à l'extérieur de la corde λ est nulle. Il vient

$$\vec{\omega}_{ext}^{vis} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_{ext}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3}{x_1^2 + x_3^2} \quad (r > R) \qquad (12.31)$$

Il est clair que le champ $\vec{u}_{ext}^{vis}$ doit être parallèle à $\vec{e}_2$ pour satisfaire cette relation, de sorte que

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = f\vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_{ext}^{vis} = -\frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_3 \qquad (12.32)$$

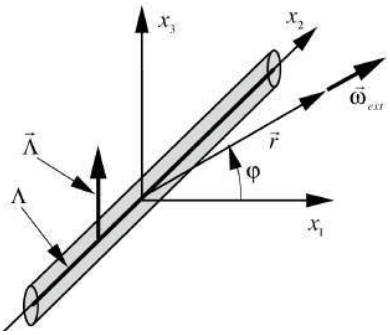


Figure 12.1 *- charge cylindrique de rayon R et de densité λ*

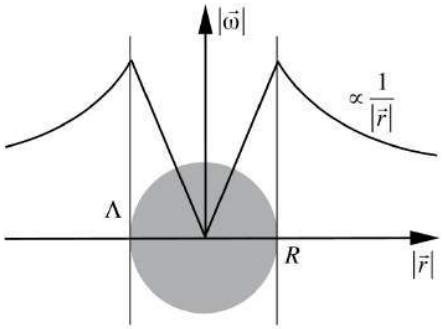


Figure 12.2 *- la norme du champ $\vec{\omega}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la ligne de charge linéique Λ*

de sorte qu'on obtient le système suivant d'équations différentielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = +\frac{\Lambda}{\pi}\frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2} \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\Lambda}{\pi}\frac{x_3}{x_1^2 + x_3^2} \qquad (12.33)$$

dont la solution est donnée par

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = -\vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\arctan\frac{x_1}{x_3} \qquad (12.34)$$

En introduisant des coordonnées polaires $x_1 = r\cos\varphi$ et $x_2 = r\sin\varphi$ dans le plan du cylindre, le champ de déplacement peut s'écrire

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (12.35)$$

En coordonnées polaires, ce champ ne dépend pas de r et il s'accroît avec l'angle φ. Il cor-

respond donc bien à un déplacement de type « vis » le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$.

L'énergie de repos de rotation d'une dislocation vis dans le réseau parfait

Comme le champ de rotation de la dislocation vis ne dépend pas du champ d'expansion volumique, on peut utiliser sans problème la relation *(12.15)*, et écrire l'énergie élastique de rotation stockée à l'extérieur de la corde par unité de longueur, dans un milieu «quasi-infini», comme

$$E_0^{vis\,ext} = 2nk_2 \int_R^{R_\infty} \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r\, dr = \frac{nk_2\Lambda^2}{\pi} \ln\frac{R_\infty}{R} \qquad (12.36)$$

et l'énergie stockée à l'intérieur de la corde comme

$$E_0^{vis\,int} = 2nk_2 \int_0^{R} \frac{\Lambda^2 r^2}{4\pi^2 R^4} 2\pi r\, dr = \frac{nk_2\Lambda^2}{4\pi} \qquad (12.37)$$

Il est tout-à-fait remarquable de constater que l'énergie de coeur $E_0^{vis\,int}$ ainsi obtenue ne dépend pas de l'extension du coeur de la corde, puisqu'elle ne dépend pas du rayon R .
La somme des deux énergies stockées dans le réseau peut alors être considérée comme *l'énergie de repos* E_0^{vis} de la ligne de dislocation, exprimée par unité de longueur de la corde de rayon R , et elle vaut donc

$$E_0^{vis} = E_0^{vis\,int} + E_0^{vis\,ext} = \frac{nk_2\Lambda^2}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_\infty}{R}\right) \qquad (12.38)$$

On constate que l'énergie interne de la corde, qui ne dépend pas de son rayon R , est beaucoup plus petite que l'énergie stockée à l'extérieur de la corde, qui dépend elle du rayon R de la corde et de la taille $R_\infty >> R$ du réseau. Comme l'énergie interne par unité de longueur ne dépend pas de R , on peut évidemment la négliger par rapport à $E_0^{vis\,ext}$ et écrire approximativement l'*énergie de repos de la dislocation* sous les formes suivantes, en utilisant la relation $\Lambda = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\,/\,2$ et le *coefficient de Lamé* $\mu = K_2$

$$E_0^{vis} \cong \frac{nk_2\Lambda^2}{\pi} \ln\frac{R_\infty}{R} = \frac{nk_2\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi} \ln\frac{R_\infty}{R} = \frac{\mu\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi} \ln\frac{R_\infty}{R} \qquad (12.39)$$

Dans les expressions de l'énergie de repos d'une dislocation vis apparaît la dimension externe $R_\infty >> R$ du réseau considéré. Ainsi, l'énergie de repos d'une seule ligne de dislocation dans un réseau infini devrait être infinie. Cependant, hormis le fait qu'un solide réel n'est pas de taille infinie et que la présence d'une seule dislocation dans un solide est un fait exceptionnel, la grandeur R_∞ est en général limitée à des valeurs plus petites que la taille R_∞ du solide. En effet, s'il existe dans le réseau considéré un grand nombre de dislocations séparées en moyenne d'une distance d , et que ces dislocations ont des orientations aléatoires dans le solide, il apparaît un *effet d'écrantage* des champs de déplacement individuels de chacune des lignes par les lignes de signe opposé situées dans son voisinage immédiat, de sorte que l'énergie stockée à grande distance par une ligne individuelle devient négligeable (on peut montrer qu'elle décroît en fait en $\sim 1/r^2$ pour des distances r supérieures à d). En ce cas, une assez bonne estimation de l'énergie de repos de la dislocation est obtenue en choisissant pour R_∞ la distance moyenne d entre deux lignes voisines de signe contraire. A noter que R_∞ intervient dans un logarithme, ce qui atténue fortement les effets liés à de grandes variations de d .
Il faut aussi noter que *l'énergie associée à un certain segment de longueur* L *de ligne de dislo-*

cation vis ne dépend pas de l'état d'expansion volumique du réseau solide. En effet, on vérifie aisément que

$$E_0^{vis}\Big|_L = L\frac{nk_2\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi}\ln\frac{R_\infty}{R} = L_0\frac{n_0k_2\,\vec{\boldsymbol{B}}_{0vis}^2}{4\pi}\ln\frac{R_{\infty 0}}{R_0} = E_{00}^{vis}\Big|_{L_0} \qquad (12.40)$$

L'énergie cinétique de rotation à basse vitesse d'une dislocation vis

Dans le cas où une dislocation vis est en mouvement dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ faible par rapport à la célérité des ondes transversales c_t, le champ de déplacement dynamique associé aux rotations s'obtient en remplaçant x_1 par $x_1(t) = x_1 - \boldsymbol{v}t$ dans l'expression *(12.34)*

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = -\vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\arctan\frac{x_1-\boldsymbol{v}t}{x_3} \qquad (12.41)$$

Le champ de vitesse est alors obtenu par la dérivation temporelle de cette expression

$$\vec{\phi}_{ext}^{vis} = -\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\arctan\frac{x_1-\boldsymbol{v}t}{x_3}\right) = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\frac{-x_3}{x_3^2+\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2}\boldsymbol{v} \qquad (12.42)$$

L'énergie cinétique par particule du réseau peut alors s'en déduire. Pour cela, il est commode de l'exprimer dans le repère $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$ en translation à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ avec la ligne de dislocation, dans lequel $x_1 - \boldsymbol{v}t$ devient x_1', puis de passer en coordonnées polaires dans ce repère, avec $x_1' = r'\cos\varphi'$ et $x_3' = r'\sin\varphi'$ dans le plan du cylindre mobile. Il vient

$$e_{cin}^{vis} = \frac{1}{2}m\left(\vec{\phi}_{ext}^{vis}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2\left(\frac{x_3'}{x_3'^2+x_1'^2}\right)^2\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2\left(\frac{\sin^2\varphi'}{r'}\right)^2\boldsymbol{v}^2 \qquad (12.43)$$

L'énergie cinétique stockée dans le réseau par le champ dynamique de rotation, exprimée par unité de longueur de la dislocation vis en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ s'obtient par l'intégration de la densité d'énergie $e_{cin}^{\vec{\omega}}$ sur un cylindre de rayon R_∞ et de longueur unité

$$E_{cin}^{vis} = \frac{1}{2}m\int_R^{R_\infty}\int_0^{2\pi}n\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2\frac{\sin^2\varphi'}{r'^2}\boldsymbol{v}^2r'\,d\varphi'\,dr' = \frac{1}{2}mn\boldsymbol{v}^2\frac{\Lambda^2}{\pi}\ln\frac{R_\infty}{R} \qquad (12.44)$$

En utilisant le fait que $\Lambda = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}}\,/\,2$ et que la masse spécifique du milieu vaut $\rho = mn$, on peut écrire l'énergie cinétique associée au mouvement à basse vitesse de la dislocation vis sous les diverses formes suivantes

$$E_{cin}^{vis} = \frac{mn\Lambda^2}{2\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 = \frac{mn\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{8\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 = \frac{\rho\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{8\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 \qquad (12.45)$$

En comparant l'énergie cinétique E_{cin}^{vis} stockée dans le milieu par le mouvement de la ligne avec l'énergie potentielle élastique E_0^{vis} stockée dans le milieu par la présence de cette même ligne, en utilisant l'expression *(12.39)* de l'énergie de repos de la dislocation vis et la relation $c_t^2 = k_2\,/\,m$ de la vitesse des ondes transversales dans le milieu *(7.59)*, on trouve la relation suivante entre l'énergie de repos et l'énergie cinétique d'une dislocation vis

$$E_{cin}^{vis} = \frac{1}{2}\frac{m}{k_2}\frac{nk_2\Lambda^2}{\pi}\ln\frac{R_\infty}{R}\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{E_0^{vis}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 \qquad (12.50)$$

Cette énergie cinétique E_{cin}^{vis} qui est stockée dans le réseau solide par la dislocation mobile peut être considérée comme l'énergie cinétique de la dislocation en mouvement, et on peut donc

introduire une *masse d'inertie* M_0^{vis} de la dislocation en écrivant les relations

$$E_{cin}^{vis} = \frac{1}{2} M_0^{vis} \boldsymbol{v}^2 \quad \Rightarrow \quad M_0^{vis} = \frac{1}{c_t^2} E_0^{vis} \quad \Rightarrow \quad E_0^{vis} = M_0^{vis} c_t^2 \tag{12.51}$$

On retrouve donc pour la ligne de dislocation vis la fameuse *expression d'Einstein* reliant la masse d'inertie à l'énergie de repos via la célérité des ondes transversales. Mais ici, cette relation est trouvée *sans aucunement faire appel à une dynamique relativiste de la ligne*, car elle est due au fait que l'énergie de repos et l'énergie cinétique de la ligne sont de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie cinétique stockée au sein du réseau par la déformation dynamique imposée à ce réseau par la présence de la dislocation vis mobile!

12.4 – Champs et énergies d'une dislocation coin

Les champs de rotation et d'expansion volumique d'une dislocation coin

Considérons maintenant une *corde de dislocation de type coin,* sous la forme d'un cylindre rectiligne de longueur infinie et de rayon R, comme représentée à la figure 12.1, contenant cette fois une densité vectorielle de charge $\vec{\lambda}$ de flexion perpendiculaire à la direction de la corde, qui pointe dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_3$. Dans les milieux solides usuels, l'expansion volumique reste toujours très faible, et le module k_0 associé aux effets thermiques est aussi négligeable vis-à-vis des modules k_1 et k_2. On peut donc émettre trois hypothèses simplificatrices: l'expansion volumique τ reste toujours très petite ($\tau_0 \cong 0$) et elle peut par conséquent être traitée comme une perturbation $\tau^{(p)} << 1$, et le module k_0 peut être négligé

Hypothèses: $\tau = \tau^{(p)} << 1 \quad et \quad k_0 \cong 0 \quad et \quad \tau_0 \cong 0$ *(12.52)*

On peut alors utiliser l'équation de Newton linéarisée *(12.9)*, exprimée en termes de $\tau^{(p)}$ et $\vec{\omega}^{él}$, pour trouver les champs statiques de torsion élastique $\vec{\omega}^{él}$ et de perturbation $\tau^{(p)}$ d'expansion volumique associés à la présence de la densité de charge vectoriel $\vec{\lambda}$. On obtient ainsi l'équation d'équilibre suivante autour de la charge

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} - \frac{2k_2 + 3k_1}{3k_2} \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau^{(p)} \cong \begin{cases} \vec{\lambda} & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \tag{12.53}$$

Pour éviter de manipuler des expressions contenant les modules élastiques k_1 et k_2, on peut utiliser le *module de Poisson* du solide *(7.25 et 7.30),* et écrire cette équation d'équilibre

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau^{(p)} \cong \begin{cases} \vec{\lambda} & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \tag{12.54}$$

En-dehors de la corde de dislocation coin $(r > R)$, le vecteur de rotation $\vec{\omega}^{él}$ ne doit posséder qu'une seule composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ qui doit dépendre de $\cos\varphi$, alors que le scalaire d'expansion $\tau^{(p)}$ doit dépendre de $\sin\varphi$. D'autre part, les deux grandeurs $\vec{\omega}^{él}$ et $\tau^{(p)}$ doivent décroître avec la distance en $1/r$ de la même façon que pour la corde de dislocation vis traitée précédemment, de sorte que la solution doit assurément pouvoir s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{él} = A\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_2 = A\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 \\ \qquad\qquad (r>R) \\ \tau^{(p)} = B\dfrac{\sin\varphi}{r} = B\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \tag{12.55}$$

où A et B sont des constantes d'intégration.
On peut alors calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau^{(p)}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} = A\left[\dfrac{2x_1x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_1 + \dfrac{x_3^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_3\right] \\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau^{(p)} = -B\left[\dfrac{2x_1x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_1 + \dfrac{x_3^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_3\right] \end{cases} \tag{12.56}$$

qui, introduits dans l'équation d'équilibre, fournissent la relation existant entre A et B

$$A + \frac{1-\nu}{1-2\nu}B = 0 \tag{12.57}$$

A l'intérieur de la corde, on peut intégrer l'équation d'équilibre sur un cylindre contenant la densité de charge $\vec{\lambda}$, de rayon R et de longueur unité. Il vient la relation intégrale

$$\iiint_V \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él}\,dV - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau^{(p)}\,dV \cong \iiint_V \vec{\lambda}\,dV \tag{12.58}$$

Comme l'intégrale de $\vec{\lambda}$ sur le cylindre de longueur unité fournit la charge linéique $\vec{\Lambda}$ de la ligne, la relation précédente se transforme aisément en

$$\oiint_{cylindre} d\vec{S}\wedge\vec{\omega}^{él} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\oiint_{cylindre}\tau^{(p)}\,d\vec{S} \cong \vec{\Lambda} \tag{12.59}$$

Par symétrie, les intégrales sur les deux sections (faces latérales) du cylindre s'annulent, de sorte que, avec $d\vec{S} = R\left(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_3\sin\varphi\right)d\varphi$

$$\begin{cases} \iint_S d\vec{S}\wedge\vec{\omega}^{él} = \iint_S A\dfrac{\cos\varphi}{R}\left(d\vec{S}\wedge\vec{e}_2\right) = \int_0^{2\pi} A\dfrac{\cos\varphi}{R}R\left(\vec{e}_3\cos\varphi - \vec{e}_1\sin\varphi\right)d\varphi = A\pi\vec{e}_3 \\ \iint_S \tau^{(p)}\,d\vec{S} = \iint_S B\dfrac{\sin\varphi}{R}d\vec{S} = \int_0^{2\pi} B\dfrac{\sin\varphi}{R}R\left(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_3\sin\varphi\right)d\varphi = B\pi\vec{e}_3 \end{cases} \tag{12.60}$$

Il vient donc comme résultat de l'équation d'équilibre à l'intérieur de la corde

$$A\pi\vec{e}_3 - \frac{1-\nu}{1-2\nu}B\pi\vec{e}_3 \cong \vec{\Lambda} \quad\Rightarrow\quad A - \frac{1-\nu}{1-2\nu}B \cong \frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi} \tag{12.61a}$$

Des relations *(12.57)* et *(12.61)*, on déduit les valeurs des constantes A et B

$$A = \frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \quad\text{et}\quad B = -\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \tag{12.61b}$$

A l'aide des relations *(12.55)*, en se rappelant que la charge linéique $\vec{\Lambda}$ vaut $\vec{\Lambda} = \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\wedge\vec{\boldsymbol{t}}$, les champs $\vec{\omega}^{él}$ et $\tau^{(p)}$ en-dehors de la charge de dislocation sont alors complètement connus

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{él} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 \\ \tau^{(p)} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\dfrac{\sin\varphi}{r} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (r > R) \qquad (12.62)$$

Le champ de déplacement d'une dislocation coin

Il est possible de retrouver le champ de déplacement $\vec{u}$ à l'extérieur de la corde de dislocation coin. En effet, comme le champ $\vec{u}$ ne peut avoir de composantes que selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$, et que $\vec{u}$ ne doit pas dépendre de x_2, on doit avoir

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_3)\vec{e}_1 + u_3(x_1, x_3)\vec{e}_3 \qquad (12.63)$$

de sorte qu'on obtient deux équations différentielles

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{él} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\vec{e}_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi}\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} \\ \tau^{(p)} = -\text{div}\,\vec{u} = -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (12.64)$$

On peut alors essayer la solution classique[1] suivante pour le champ de déplacement $\vec{u}$

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_3) = \boldsymbol{\alpha}\arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right) + \boldsymbol{\beta}\dfrac{x_1 x_3}{x_1^2+x_3^2} \\ u_3(x_1, x_3) = \boldsymbol{\gamma}\ln\left(x_1^2+x_3^2\right) + \boldsymbol{\delta}\dfrac{x_1^2-x_3^2}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (12.65)$$

où $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}$ sont des constantes à déterminer. Les champs $\vec{\omega}^{él}$ et $\tau^{(p)}$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{él} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = \left[-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma})\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} + (\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\delta})\dfrac{x_1 x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right]\vec{e}_2 \\ \tau^{(p)} = -\text{div}\,\vec{u} = \left[(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma})\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} + 2(\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\delta})\dfrac{x_1^2 x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right] \end{cases} \qquad (12.66)$$

En comparant ces relations avec *(12.62)*, on déduit trois relations

$$\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} = -\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta} = -\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\frac{1-2\nu}{1-\nu} \quad ; \quad \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\delta} = 0 \qquad (12.67)$$

dont les solutions sont

$$\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \quad ; \quad \boldsymbol{\beta} = -\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\frac{1}{2(1-\nu)} \quad ; \quad \boldsymbol{\delta} = \frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\frac{1}{4(1-\nu)} \qquad (12.68)$$

Avec ce système, les constantes $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ sont encore indéterminées et il existe donc une infinité de solutions d'équilibre possibles. La détermination de ces constantes est en fait un problème de minimisation de l'énergie d'équilibre dans le cas d'un solide libre de toutes contraintes

[1] *Hirth and Lothe, theory of dislocations, second edition, John Wiley and Sons, 1982, p.78*

externes, ou de conditions aux limites du milieu solide dans le cas d'un solide soumis à des contraintes externes restrictives. Résolvons pour l'instant le problème de manière générale sans faire de choix préalable quant aux valeurs respectives de α et γ. Introduisons par conséquent un *paramètre ajustable* ς tel qu'on puisse écrire

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\varsigma \\ \gamma = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\left[\dfrac{3-4\nu}{4(1-\nu)} - \dfrac{\varsigma}{2}\right] \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} \beta = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\dfrac{1}{2(1-\nu)} \\ \delta = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\dfrac{1}{4(1-\nu)} \end{cases} \qquad (12.69)$$

Le champ de déplacement s'écrit alors

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_3) = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\varsigma \arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right) - \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{x_1 x_3}{x_1^2+x_3^2} \\ u_3(x_1,x_3) = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\left[\dfrac{3-4\nu}{4(1-\nu)} - \dfrac{\varsigma}{2}\right]\ln\left(x_1^2+x_3^2\right) + \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\,\dfrac{1}{4(1-\nu)}\dfrac{x_1^2-x_3^2}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (12.70)$$

La façon dont on a obtenu ici le champ de déplacement associé à une dislocation coin est tout-à-fait originale. En effet, elle est basée ici sur la recherche des conditions d'équilibre du solide sur la base de l'équation de Newton *(12.9)* contenant une densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charge de flexion, alors que, dans l'approche classique[2], le champ de déplacement est obtenu à partir d'une solution particulière de l'équation différentielle pour la *fonction d'Airy* des contraintes planes, ce qui est beaucoup plus compliqué, et qui suppose à priori un solide non soumis à des contraintes externes restrictives!

Les champs de déformation et de cisaillement d'une dislocation coin

A partir de ces expressions, en appliquant les relations *(2.48),* on peut déduire le tenseur de déformation élastique $\vec{\varepsilon}_i^{\,él}$ ainsi que le tenseur de cisaillement élastique $\vec{\alpha}_i^{\,él}$ à l'extérieur de la ligne de dislocation

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1^{\,él} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2^{\,él} = 0 \\ \vec{\varepsilon}_3^{\,él} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\vec{e}_3 \end{cases} \qquad (12.71)$$

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1^{\,él} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_3 \\ \vec{\alpha}_2^{\,él} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\vec{e}_2 \\ \vec{\alpha}_3^{\,él} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - 2\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3 \end{cases} \qquad (12.72)$$

Les dérivés des composantes du champ de déplacement qui apparaissent dans ces relations sont déduites de *(23.56)*

---

[2] *Hirth and Lothe, theory of dislocations, second edition, John Wiley and Sons, 1982, p.75*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\ \left[2(1-\nu)\varsigma - 1\right]\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} + \dfrac{2x_1^2 x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right\} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{-\left[2(1-\nu)\varsigma + 1\right]\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} + \dfrac{2x_1 x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right\} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\left[4(1-\nu) - 2(1-\nu)\varsigma\right]\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} + \dfrac{x_1 x_3^2 - x_1^3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right\} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\left[2(1-2\nu) - 2(1-\nu)\varsigma\right]\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} + \dfrac{x_3^3 - x_1^2 x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\right\} \end{cases} \tag{12.73}$$

Comme il sera préférable par la suite, pour des raisons de simplicité, de travailler en coordonnées polaires $x_1 = r\cos\varphi$ et $x_2 = r\sin\varphi$ dans le plan du cylindre (fig. 12.1), les relations

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{x_1}{x_1^2+x_3^2} \Rightarrow x_1 = r\cos\varphi \quad \& \quad \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \Rightarrow x_3 = r\sin\varphi \tag{12.74}$$

permettent d'obtenir les dérivés en fonction des coordonnées $[r,\varphi]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\ \left[2(1-\nu)\varsigma - 1\right] + 2\cos^2\varphi\right\}\dfrac{\sin\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{-\left[2(1-\nu)\varsigma + 1\right] + 2\sin^2\varphi\right\}\dfrac{\cos\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\left[4(1-\nu) - 2(1-\nu)\varsigma\right] - \cos 2\varphi\right\}\dfrac{\cos\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\ \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left\{\left[2(1-2\nu) - 2(1-\nu)\varsigma\right] - \cos 2\varphi\right\}\dfrac{\sin\varphi}{r} \end{cases} \tag{12.75}$$

Les tenseurs de déformation élastique $\vec{\varepsilon}_i^{\,él}$ et de cisaillement élastique $\vec{\alpha}_i^{\,él}$ peuvent alors s'exprimer en coordonnées polaires en introduisant ces dérivés dans *(23.58)* et *(23.59)*

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1^{\,él} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\left\{\left[2(1-\nu)\varsigma + \cos 2\varphi\right]\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_1 + \left[2(1-\nu)(1-\varsigma) - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_3\right\} \\ \vec{\varepsilon}_2^{\,él} = 0 \\ \vec{\varepsilon}_3^{\,él} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\left\{\left[2(1-\nu)(1-\varsigma) - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_1 + \left[2(1-2\nu) - 2(1-\nu)\varsigma - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_3\right\} \end{cases} \tag{12.76}$$

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1^{\,él} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\left\{\left[2(1-\nu)\varsigma - \dfrac{2}{3}(1-2\nu) + \cos 2\varphi\right]\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_1 + \left[2(1-\nu)(1-\varsigma) - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_3\right\} \\ \vec{\alpha}_2^{\,él} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\left[\dfrac{2}{3}(1-2\nu)\right]\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_2 \\ \vec{\alpha}_3^{\,él} = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\left\{\left[2(1-\nu)(1-\varsigma) - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_1 + \left[-2(1-\nu)\varsigma + \dfrac{4}{3}(1-2\nu) - \cos 2\varphi\right]\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_3\right\} \end{cases} \tag{12.77}$$

L'énergie de repos d'une dislocation coin

L'énergie de repos de la ligne de dislocation coin est obtenue à partir de l'énergie potentielle élastique stockée en-dehors de la corde par site de réseau

$$e_0 = k_2 \sum_i \left(\vec{\alpha}_i^{\,él}\right)^2 + k_1 \left(\tau^{(p)}\right)^2 \qquad (12.78)$$

On déduit par l'intégration suivante

$$E_0^{coin} = \int_R^{R_\infty} \int_0^{2\pi} n e_0(r,\varphi)\, r d\varphi\, dr = \int_R^{R_\infty} \int_0^{2\pi} n \left[k_2 \sum_i \left(\vec{\alpha}_i^{\,él}\right)^2 + k_1 \left(\tau^{(p)}\right)^2 \right] r d\varphi\, dr \qquad (12.79)$$

l'énergie de repos E_0^{coin} par unité de longueur de ligne de dislocation coin en utilisant les relations *(12.77)* et *(12.62)*

$$E_0^{coin} = \frac{n\vec{\Lambda}^2}{4\pi} \left\{ k_2 \left[4\varsigma^2 - 8\varsigma + \frac{2}{3}\left(\frac{7\nu^2 - 13\nu + 7}{(1-\nu)^2} \right) \right] + k_1 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^2 \right\} \ln \frac{R_\infty}{R} \qquad (12.80)$$

On constate que cette énergie de repos contient un terme dépendant du module k_2 associé aux déformations de cisaillement du milieu, et un terme dépendant du module k_1 associé aux déformations par expansion volumique du milieu. L'énergie de repos par unité de longueur de la ligne de dislocation coin peut aussi être exprimée plus simplement en utilisant la relation *(7.30)*

$$E_0^{coin} = \frac{n k_2 \vec{\Lambda}^2}{4\pi} \left[4\varsigma^2 - 8\varsigma + \frac{4\nu^2 - 9\nu + 5}{(1-\nu)^2} \right] \ln \frac{R_\infty}{R} \qquad (12.81)$$

Il faut noter ici que *l'énergie associée à un certain segment de longueur* L *de ligne de dislocation coin ne dépend pas de l'état d'expansion volumique du réseau solide*. En effet, on vérifie sans peine que

$$E_0^{coin}\big|_L = L_0 \frac{n_0 k_2 \left(\vec{\Lambda}_0\right)^2}{4\pi} \left[4\varsigma^2 - 8\varsigma + \frac{4\nu^2 - 9\nu + 5}{(1-\nu)^2} \right] \ln \frac{R_{\infty 0}}{R_0} = E_{00}^{coin}\big|_{L_0} \qquad (12.82)$$

Pour comparer la valeur de l'énergie de repos d'une dislocation coin avec celle d'une dislocation vis, il suffit de se rappeler que la relation entre la charge linéique $\vec{\Lambda}$ et le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}$ s'écrit simplement $\vec{\Lambda}^2 = \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}^2$ et que le module k_2 est lié au *coefficient de Lamé* par la relation $\mu = n k_2$. On constate alors que, pour des vecteurs de Burgers de longueurs égales, la dislocation coin présente une énergie de repos différente de la dislocation vis d'un facteur qui dépend à la fois du paramètre ajustable ς et du module de Poisson ν du matériau

$$\begin{cases} E_0^{vis} = \dfrac{\mu \vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi} \ln \dfrac{R_\infty}{R} \\ E_0^{coin} = \dfrac{\mu \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}^2}{4\pi} \ln \dfrac{R_\infty}{R} \left[4\varsigma^2 - 8\varsigma + \dfrac{4\nu^2 - 9\nu + 5}{(1-\nu)^2} \right] \end{cases} \qquad (12.83)$$

L'énergie cinétique à basse vitesse d'une dislocation coin

Dans le cas où une corde de dislocation coin est en mouvement dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ faible par rapport à la célérité des ondes transversales c_t, les composantes du champ

de vitesse s'obtiennent en remplaçant x_1 par $x_1(t) = x_1 - \boldsymbol{v}t$ dans les expressions *(12.70)* des composantes du champ de déplacement, puis en effectuant la dérivation $\vec{\phi} = -d\vec{u}/dt$

$$\begin{cases} \phi_1(x_1,x_3,t) = +\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\boldsymbol{\varsigma}\arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1-\boldsymbol{v}t}\right)+\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{(x_1-\boldsymbol{v}t)x_3}{(x_1-\boldsymbol{v}t)^2+x_3^2}\right\} \\ \phi_3(x_1,x_3,t) = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\dfrac{3-4\nu}{4(1-\nu)}-\dfrac{\boldsymbol{\varsigma}}{2}\right)\ln\left[(x_1-\boldsymbol{v}t)^2+x_3^2\right]+\dfrac{1}{4(1-\nu)}\dfrac{(x_1-\boldsymbol{v}t)^2-x_3^2}{(x_1-\boldsymbol{v}t)^2+x_3^2}\right\} \end{cases} \quad (12.84)$$

Après dérivation, il est utile de passer dans le système de coordonnées $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$ en translation à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ avec la ligne de dislocation, dans lequel $x_1 - \boldsymbol{v}t$ devient x_1'

$$\begin{cases} \phi_1(x_1',x_3') = +\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\left[\left(\boldsymbol{\varsigma}+\dfrac{1}{2(1-\nu)}\right)\dfrac{x_1'^2x_3'}{\left(x_1'^2+x_3'^2\right)^2}+\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{1}{2(1-\nu)}\right)\dfrac{x_3'^3}{\left(x_1'^2+x_3'^2\right)^2}\right]\boldsymbol{v} \\ \phi_3(x_1',x_3') = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\left[\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{5-4\nu}{2(1-\nu)}\right)\dfrac{x_3'^2x_1'}{\left(x_1'^2+x_3'^2\right)^2}+\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\right)\dfrac{x_1'^3}{\left(x_1'^2+x_3'^2\right)^2}\right]\boldsymbol{v} \end{cases} \quad (12.85)$$

et d'utiliser dans $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$ les coordonnées polaires $x_1' = r'\cos\varphi'$ et $x_3' = r'\sin\varphi'$ exprimées dans le plan du cylindre mobile

$$\begin{cases} \phi_1(r',\varphi') = +\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1}{r'}\left[\left(\boldsymbol{\varsigma}+\dfrac{1}{2(1-\nu)}\right)\cos^2\varphi'\sin\varphi'+\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{1}{2(1-\nu)}\right)\sin^3\varphi'\right]\boldsymbol{v} \\ \phi_3(r',\varphi') = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1}{r'}\left[\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{5-4\nu}{2(1-\nu)}\right)\sin^2\varphi'\cos\varphi'+\left(\boldsymbol{\varsigma}-\dfrac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\right)\cos^3\varphi'\right]\boldsymbol{v} \end{cases} \quad (12.86)$$

L'énergie cinétique de la dislocation coin s'obtient alors en effectuant l'intégrale suivante

$$E_{cin}^{coin} = \frac{1}{2}m\int_R^{R_\infty}\int_0^{2\pi} n\vec{\phi}^2(r',\varphi')\,r'\,d\varphi'\,dr' \quad (12.87)$$

C'est un calcul assez long qui conduit finalement à l'énergie cinétique de la dislocation coin. Cette énergie est donnée par unité de longueur, et elle dépend évidemment du paramètre $\boldsymbol{\varsigma}$ et du module de Poisson ν, tout comme l'énergie de repos de la dislocation coin *(12.81)*

$$E_{cin}^{coin} = \frac{mn\vec{\Lambda}^2}{64\pi}\ln\frac{R_\infty}{R}\left[16\boldsymbol{\varsigma}^2-32\boldsymbol{\varsigma}+\frac{26-56\nu+32\nu^2}{(1-\nu)^2}\right]\boldsymbol{v} \quad (12.88)$$

12.5 – Effets des conditions aux limites et de la nature du réseau

La dislocation coin dans un milieu solide usuel, fini et libre

Dans le cas d'un *réseau fini et libre*, c'est-à-dire ne subissant aucune contraintes aux limites, la présence d'une dislocation coin peut courber le solide, comme illustré par le modèle de la figure 9.11, ce qui est pris en compte par une valeur non nulle de la constante $\boldsymbol{\gamma}$ dans les relations *(12.65)*. Pour déterminer complètement les constantes $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\gamma}$, il faut chercher la valeur du

paramètre ajustable ς, de sorte qu'il minimise l'énergie de repos de la dislocation coin. A partir de la relation *(12.81)*, on a

$$\frac{\partial E_0^{coin}}{\partial \varsigma} = \frac{n k_2 \vec{\Lambda}^2}{\pi} 2(\varsigma - 1) \ln \frac{R_\infty}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varsigma = 1 \tag{12.89}$$

Ainsi, la valeur de ς qui minimise l'énergie de repos de la corde coin dans un réseau fini et libre est 1. On peut vérifier que, si la corde se déplace par rapport au réseau à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$, la valeur de ς qui minimise la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique reste toujours égale à 1. En effet, on a aussi, à partir de la relation *(12.88)*

$$\partial E_{cin}^{coin} / \partial \varsigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varsigma = 1 \tag{12.90}$$

Ainsi, dans le cas d'un *milieu solide usuel, fini et libre*, les énergies de la dislocation coin s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} E_0^{coin} = \dfrac{n k_2 \vec{\Lambda}^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \dfrac{R_\infty}{R} = \left[\dfrac{4(1-\nu)}{8\nu^2 - 12\nu + 5} \right] M_0^{coin} c_t^2 \\ E_{cin}^{coin} = \dfrac{mn\vec{\Lambda}^2}{8\pi} \left[\dfrac{8\nu^2 - 12\nu + 5}{4(1-\nu)^2} \right] \left(\ln \dfrac{R_\infty}{R} \right) \boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{2} M_0^{coin} \boldsymbol{v}^2 \end{cases} \tag{12.91}$$

L'énergie de repos correspond alors à la valeur classique obtenue dans la littérature [3].
Comme les milieux solides usuels présentent en général un module de Poisson voisin de 1/3, la relation d'Einstein modifiée y vaut alors approximativement $E_0^{coin} \cong 1.41\, M_0^{coin} c_t^2$.
Il est intéressant de constater que le champ de déplacement s'écrit en ce cas

$$\begin{cases} u_1^{coin}(x_1, x_3) = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \left[-\arctan \dfrac{x_3}{x_1} - \dfrac{1}{2(1-\nu)} \dfrac{x_1 x_3}{x_1^2 + x_3^2} \right] \\ u_3^{coin}(x_1, x_3) = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \left[\dfrac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln\left(x_1^2 + x_3^2\right) + \dfrac{1}{4(1-\nu)} \dfrac{x_1^2 - x_3^2}{x_1^2 + x_3^2} \right] \end{cases} \tag{12.92}$$

et qu'il correspond alors exactement à celui trouvé par les théories classiques de dislocations[3]. Seul le signe des expressions de $u_1^{coin}(x_1, x_3)$ et $u_3^{coin}(x_1, x_3)$ est inversé, ce qui est l'expression du fait que le champ de déplacement exprimé en coordonnées d'Euler a un signe opposé au champ de déplacement exprimé en coordonnées de Lagrange. Le tenseur de déformation élastique $\vec{\varepsilon}_i^{coin}$ et de cisaillement élastique $\vec{\alpha}_i^{coin}$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1^{\,coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)} \dfrac{1}{r} \left[-(2 - 2\nu + \cos 2\varphi) \sin\varphi \vec{e}_1 + \cos 2\varphi \cos\varphi \vec{e}_3 \right] \\ \vec{\varepsilon}_2^{\,coin} = 0 \\ \vec{\varepsilon}_3^{\,coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)} \dfrac{1}{r} \left[\cos 2\varphi \cos\varphi \vec{e}_1 + (2\nu + \cos 2\varphi) \sin\varphi \vec{e}_3 \right] \end{cases} \tag{12.93}$$

---

[3] *Hirth and Lothe, theory of dislocations, second edition, John Wiley and Sons, 1982, p.78*

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\,\dfrac{1}{r}\left\{\left[-2(2-\nu)/3-\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\,\vec{e}_1+\cos 2\varphi\cos\varphi\,\vec{e}_3\right\} \\ \vec{\alpha}_2^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\,\dfrac{1}{r}\left\{2(1-2\nu)\sin\varphi\,\vec{e}_2/3\right\} \\ \vec{\alpha}_3^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi(1-\nu)}\,\dfrac{1}{r}\left\{\left[2(1+\nu)/3+\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\,\vec{e}_3+\cos 2\varphi\cos\varphi\,\vec{e}_1\right\} \end{cases} \qquad (12.94)$$

La dislocation coin dans un milieu usuel, empêché de se courber

Si le milieu solide est soumis à des conditions aux limites, c'est le paramètre ajustable $\boldsymbol{\varsigma}$ qui devra être choisi de telle sorte à satisfaire ces conditions aux limites. Le cas le plus simple qu'on puisse envisager est par exemple de supposer un solide parallélépipédique dans lequel on introduit une dislocation coin dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$ avec une charge linéique $\vec{\Lambda}$ pointant dans la direction $\boldsymbol{O}x_3$. Dans le cas où le solide est parfaitement libre, on sait que celui-ci se courbe dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$ à cause du terme en $\ln\left(x_1^2+x_3^2\right)$ de la composante $u_3^{coin}(x_1,x_3)$ dans les relations *(12.65)*. Mais si, par des conditions aux limites imposées au solide, celui-ci est empêché de se courber, le terme en $\ln\left(x_1^2+x_3^2\right)$ dans les relations *(12.65)* doit être imposé nul, ce qui est possible puisqu'il existe le paramètre libre $\boldsymbol{\varsigma}$ permettant d'ajuster $u_1^{coin}(x_1,x_3)$ et $u_3^{coin}(x_1,x_3)$. Il vient alors pour $\boldsymbol{\varsigma}$

$$\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}-\frac{\boldsymbol{\varsigma}}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\varsigma}=\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \qquad (12.95)$$

Les énergies de la dislocation dans ce réseau contraint se déduisent de *(12.81)* et *(12.88)*

$$\begin{cases} E_0^{coin} = \dfrac{nk_2\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left[\dfrac{16\nu^2-20\nu+8}{4(1-\nu)^2}\right]\ln\dfrac{R_\infty}{R} = \left[\dfrac{16\nu^2-20\nu+8}{16\nu^2-20\nu+7}\right]M_0^{coin}c_t^2 \\ E_{cin}^{coin} = \dfrac{mn\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\left[\dfrac{16\nu^2-20\nu+7}{4(1-\nu)^2}\right]\left(\ln\dfrac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \qquad (12.96)$$

Comme les milieux solides usuels présentent en général un module de Poisson voisin de 1/3, la relation d'Einstein modifiée y vaut alors $E_0^{coin}=1.47\,M_0^{coin}c_t^2$.

La dislocation coin dans un milieu solide auxétique, fini et libre

Dans un milieu plus exotique où on aurait un module k_1 négligeable vis-à-vis du module k_2, donc un milieu pour lequel le module de Poisson ν serait voisin de -1, qu'on appelle *milieu solide auxétique*, les énergies de la dislocation coin s'écrivent

$$\begin{cases} E_0^{coin} = \dfrac{nk_2\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\ln\dfrac{R_\infty}{R} = \left[\dfrac{8}{25}\right]M_0^{coin}c_t^2 \\ E_{cin}^{coin} = \dfrac{\rho\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\left[\dfrac{25}{16}\right]\left(\ln\dfrac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \qquad (12.97)$$

Dans un milieu auxétique, fini et libre, la relation d'Einstein modifiée vaut alors approximativement $E_0^{coin}\cong 0.32\,M_0^{coin}c_t^2$.

La dislocation coin dans un milieu solide auxétique empêché de se courber

Dans le cas d'un *milieu auxétique empêché de se courber*, les énergies de la coin s'écrivent

$$\begin{cases} E_0^{coin} = \dfrac{K_2 \vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left[\dfrac{11}{4}\right]\ln\dfrac{R_\infty}{R} = \left[\dfrac{44}{43}\right] M_0^{coin} c_t^2 \\ E_{cin}^{coin} = \dfrac{mn\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\left[\dfrac{43}{16}\right]\left(\ln\dfrac{R_\infty}{R}\right)\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{2} M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \qquad (12.98)$$

Dans un milieu auxétique empêché de se courber, il intervient alors une chose assez étonnante, à savoir que la relation d'Einstein modifiée devient assez proche d'une relation exacte, puisque $E_0^{coin} = 1.02\, M_0^{coin} c_t^2$.

12.6 – Interactions entre dislocations

Les champs de distorsion associés aux dislocations permettent de calculer les forces d'interaction agissant entre dislocations, via la force de Peach et Koehler. Dans cette section, on va présenter quelques cas de ces interactions, en se limitant aux dislocations contenues dans des solides usuels, finis et libres, c'est-à-dire notamment à des dislocations coins satisfaisant les relations «classiques» *(12.91)* à *(12.94)*.

Les interactions entre deux dislocations

Dans le cas des dislocations vis et coin, la force de Peach et Koehler agissant par unité de longueur sur une dislocation *(2)* de par l'effet d'une dislocation *(1)* est donnée par l'expression *(11.12),* à savoir

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = \sum_k \left(\vec{s}_{k(1)} \wedge \vec{\Lambda}_{k(2)}\right) + \Lambda_{(2)}\vec{m}_{(1)} + \frac{1}{2}\left(\vec{m}_{(1)} \wedge \vec{\Lambda}_{(2)}\right) + \vec{\Lambda}_{(2)} p_{(1)} \qquad (12.99)$$

dans laquelle les charges linéiques $\vec{\Lambda}_{k(2)}, \vec{\Lambda}_{(2)}$ et $\Lambda_{(2)}$ s'obtiennent à partir du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{(2)}$ de la dislocation *(2)* et du vecteur $\vec{\boldsymbol{t}}$ tangent à la dislocation *(2)* par les relations suivantes

$$\begin{cases} \vec{\Lambda}_{k(2)} = -\vec{\boldsymbol{t}}_{(2)}\boldsymbol{B}_{k(2)} \\ \vec{\Lambda}_{(2)} = \vec{\boldsymbol{B}}_{(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}_{(2)} \\ \Lambda_{(2)} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{(2)}\vec{\boldsymbol{t}}_{(2)} / 2 \end{cases} \qquad (12.100)$$

Quant aux champs de contrainte $\vec{m}_{(1)}$, $p_{(1)}$ et $\vec{s}_{k(1)}$ intervenant dans la force de Peach et Koehler, ils s'obtiennent à partir des champs de distorsion élastiques générés par la dislocation *(1)*, via les relations *(12.2)* et *(12.14)*, qui s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{s}_{i(1)} = 2nk_2\vec{\alpha}^{él}_{i(1)} \\ \vec{m}_{(1)} = 4nk_2\vec{\omega}^{él}_{(1)} \\ p_{(1)} = n\left(k_0 - 2k_1\tau^{él}_{(1)}\right) \end{cases} \qquad (12.101)$$

A titre d'exemple, on va calculer dans les sections suivantes les forces d'interaction qui inter-

viennent entre deux dislocations parallèles, dans le cas de milieux usuels finis et libres, et pour deux cordes vis, une corde coin et une corde vis et deux cordes coin.

L'interaction entre deux dislocations vis parallèles

Une dislocation vis de charge $\Lambda_{(1)} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis(1)}\vec{e}_2 / 2$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$, avec $\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{e}_2$, située aux coordonnées $x_1 = x_3 = 0$, est la source d'un champ de moment obtenu à partir de l'expression *(12.31),* qu'on peut exprimer en coordonnées polaires dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$

$$\vec{m}_{(1)} = 4nk_2\vec{\omega}_{(1)} = \frac{2nk_2\Lambda_{(1)}}{\pi}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{2nk_2\Lambda_{(1)}}{\pi}\frac{1}{r}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_3\right) \quad (r > R) \tag{12.102}$$

Si une deuxième corde vis parallèle à la première, avec une charge $\Lambda_{(2)} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis(2)}\vec{e}_2 / 2$, est située à une distance r de celle-ci, aux coordonnées polaires r et φ dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$, elle subit une force par unité de longueur donnée par la force de Peach et Koehler $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)}$ suivante

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = \Lambda_{(2)}\vec{m}_{vis(1)} = \frac{2nk_2}{\pi}\frac{\Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)}}{r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{nk_2}{2\pi}\frac{\boldsymbol{B}_{vis(1)}\boldsymbol{B}_{vis(2)}}{r}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_3\right) \tag{12.103}$$

La force d'interaction entre les deux dislocations vis parallèles est donc une force répulsive si $\Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)} > 0$ et attractive si $\Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)} < 0$.

L'interaction entre une dislocation coin et une dislocation vis parallèles

Une dislocation coin dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$ ($\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{e}_2$), située aux coordonnées $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$, de vecteur de Burgers dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, présente une charge $\vec{\Lambda}_{(1)} = \boldsymbol{B}_{coin(1)}\vec{e}_3$. Elle est alors la source des champs de contrainte $\vec{m}_{(1)}$, $p_{(1)}$ et $\vec{s}_{k(1)}$ obtenus à partir des expressions *(12.62)* et *(12.94)*

$$\begin{cases} \vec{m}_{(1)} = 4nk_2\vec{\omega}_{(1)} = \dfrac{2nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{\pi}\dfrac{1}{r}\cos\varphi\,\vec{e}_2 \\ p_{(1)} = -2nk_1\tau_{(1)} = \dfrac{nk_1\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{\pi}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad (r > R) \tag{12.104}$$

$$\begin{cases} \vec{s}_{1(1)} = \dfrac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\dfrac{1}{r}\left\{\sin\varphi\left[-\dfrac{2}{3}(2-\nu) - \cos 2\varphi\right]\vec{e}_1 + \cos\varphi\cos 2\varphi\vec{e}_3\right\} \\ \vec{s}_{2(1)} = \dfrac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\dfrac{1}{r}\left\{\sin\varphi\left[\dfrac{2}{3}(1-2\nu)\right]\vec{e}_2\right\} \\ \vec{s}_{3(1)} = \dfrac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\dfrac{1}{r}\left\{\sin\varphi\left[\dfrac{2}{3}(1+\nu) + \cos 2\varphi\right]\vec{e}_3 + \cos\varphi\cos 2\varphi\vec{e}_1\right\} \end{cases} \tag{12.105}$$

Si une deuxième ligne parallèle à la première, mais de type vis, est située à une distance r de celle-ci, avec une charge $\Lambda_{(2)} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis(2)}\vec{e}_2 / 2$, elle subit une force par unité de longueur donnée par la force de Peach et Koehler $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)}$ suivante

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = \vec{s}_{2(1)} \wedge \vec{\Lambda}_{2(2)} = \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\frac{1}{r}\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\nu\right)\sin\varphi\right]\boldsymbol{B}_{2(2)}\left(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2\right) = 0 \tag{12.106}$$

On en conclue donc que la force d'interaction entre une dislocation coin et une dislocation vis parallèles est toujours nulle, quelle que soit leurs positions respectives.

L'interaction entre deux dislocations coin parallèles

Soit une dislocation coin dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$ ($\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{e}_2$), située aux coordonnées $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$, de vecteur de Burgers dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, avec une charge $\vec{\Lambda}_{(1)} = \boldsymbol{B}_{coin(1)}\vec{e}_3$, qui interagit avec une dislocation coin parallèle, située aux coordonnées d'espace polaire $[r,\varphi]$ dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$ (fig. 12.3), et dont les charges $\vec{\Lambda}_{i(2)}$ ou $\vec{\Lambda}_{(2)}$ sont données par

$$\begin{cases} \vec{\Lambda}_{1(2)} = -\vec{\boldsymbol{t}}_{(2)}\,\boldsymbol{B}_{1(2)} = -\vec{e}_2\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta \\ \vec{\Lambda}_{3(2)} = -\vec{\boldsymbol{t}}_{(2)}\,\boldsymbol{B}_{3(2)} = -\vec{e}_2\boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta \\ \vec{\Lambda}_{(2)} = \vec{\boldsymbol{B}}_{coin(2)} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}_{(2)} = \boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta\vec{e}_3 - \boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta\vec{e}_1 \end{cases} \qquad (12.107)$$

La ligne (1) est la source des champs de contrainte $\vec{m}_{(1)}$, $p_{(1)}$ et $\vec{s}_{k(1)}$ donnés par *(12.104)* et *(12.105).* Dans ces champs, la ligne (2) subit la force de Peach et Koehler suivante par unité de longueur

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = \sum_k \left(\vec{s}_{k(1)} \wedge \vec{\Lambda}_{k(2)}\right) + \vec{\Lambda}_{(2)}p_{(1)} \qquad (12.108)$$

qui s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = -\vec{\Lambda}_{1(2)} \wedge \vec{s}_{1(1)} - \vec{\Lambda}_{3(2)} \wedge \vec{s}_{3(1)} + \left(\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta\vec{e}_3 - \boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta\vec{e}_1\right)p_{(1)} \qquad (12.109)$$

et finalement

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} &= \vec{e}_2\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta \wedge \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{r}\left\{\sin\varphi\left[\frac{2}{3}\nu - \frac{4}{3}\nu - \cos 2\varphi\right]\vec{e}_1 + \cos\varphi\cos 2\varphi\vec{e}_3\right\} \\ &+ \vec{e}_2\boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta \wedge \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\frac{1}{r}\left\{\sin\varphi\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\nu + \cos 2\varphi\right]\vec{e}_3 + \cos\varphi\cos 2\varphi\vec{e}_1\right\} \\ &+ \left(\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta\vec{e}_3 - \boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta\vec{e}_1\right)\frac{nk_1\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{\pi}\frac{1}{r}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\sin\varphi \end{aligned} \qquad (12.110)$$

En transformant encore cette expression, on obtient l'expression classique d'interaction entre deux dislocations coin parallèles

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} &= \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{r}\left\{\left[\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta\right]\cos\varphi\cos 2\varphi + \left[\boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta\right]\sin\varphi\cos 2\varphi\right\}\vec{e}_1 \\ &+ \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{r}\left\{\left[\boldsymbol{B}_{coin(2)}\cos\theta\right]\sin\varphi(2+\cos 2\varphi) - \left[\boldsymbol{B}_{coin(2)}\sin\theta\right]\cos\varphi\cos 2\varphi\right\}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (12.111)$$

qui peut aussi s'écrire en réintroduisant le vecteur de charge $\vec{\Lambda}^{(2)}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} &= \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{r}\left\{\left(\vec{\Lambda}_{(2)}\vec{e}_3\right)\cos\varphi\cos 2\varphi - \left(\vec{\Lambda}_{(2)}\vec{e}_1\right)\sin\varphi\cos 2\varphi\right\}\vec{e}_1 \\ &+ \frac{nk_2\left(\vec{\Lambda}_{(1)}\vec{e}_3\right)}{2\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{r}\left\{\left(\vec{\Lambda}_{(2)}\vec{e}_3\right)\sin\varphi(2+\cos 2\varphi) + \left(\vec{\Lambda}_{(2)}\vec{e}_1\right)\cos\varphi\cos 2\varphi\right\}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (12.112)$$

Dans la figure 12.4, on a reporté la direction des composantes de la force de Peach et Koehler dans le cas où la charge $\vec{\Lambda}_{(2)}$ de la ligne *(2)* pointe selon l'axe $\boldsymbol{O}x_3$.

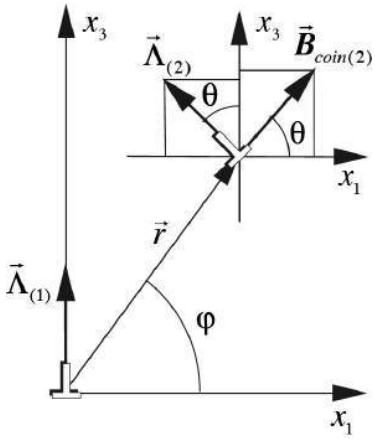


Figure 12.3 *- interaction entre deux dislocations coin parallèles à l'axe* $\boldsymbol{O}x_2$ *de charges* $\vec{\Lambda}_{(1)}$ *et* $\vec{\Lambda}_{(2)}$

La première conséquence intéressante de cette figure est liée au fait que, comme une dislocation coin ne se déplace facilement que par glissement, c'est la composante de la force de Peach et Koehler selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ qui est importante dans ce cas particulier. La deuxième conséquence intéressante de cette figure est le fait que la force selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ tend à séparer les deux lignes si l'angle φ est inférieur à 45°, mais qu'il tend à les superposer si l'angle φ est supérieur à 45°. Ce dernier cas explique pourquoi il peut y avoir formation d'un ruban stable de dislocations coins alignés, présentant des charge $\vec{\Lambda}$ orientées toutes plus ou moins dans le plan du ruban, et qui peuvent former ainsi une membrane de dislocation limitée par deux lignes de désinclinaison, appelé *joint de flexion*, comme illustré dans la figure 9.17a.

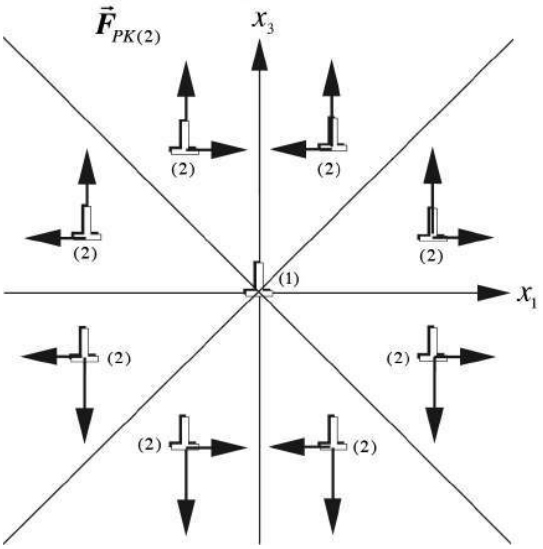


Figure 12.4*- composantes de la force de Peach et Koehler due à l'interaction entre deux dislocations coin parallèles à l'axe* $\boldsymbol{O}x_2$ *de charges* $\vec{\Lambda}_{(1)}$ *et* $\vec{\Lambda}_{(2)}$ *parallèles*

12.7 – Modèle de la corde

Le comportement dynamique d'une dislocation qui se courbe dans un solide usuel, fini et libre peut être abordé en introduisant le concept de *tension de ligne* de la dislocation, qui permet d'écrire l'équation de Newton d'un segment infinitésimal de corde.

La tension de ligne d'une dislocation

Imaginons pour commencer une dislocation qui passe par deux points fixes d'ancrage $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ séparés d'une distance L, et qui se courbe régulièrement sous forme d'arc de cercle de rayon de courbure r entre ces deux points (fig. 12.5). Aux grandes distances de cette corde, celle-ci peut être vue comme une dislocation rectiligne de longueur L, mais au voisinage de la corde, sa longueur est en réalité égale à $L+\Delta L$ à cause de sa courbure. Si on introduit la grandeur l correspondant à la distance où on passe de la faible distance à la grande distance, et qui correspond *grosso modo* à quelques fois la longueur L, on peut calculer l'énergie $\boldsymbol{E}_0$ du segment de longueur L de la dislocation en utilisant les formules *(12.43)* pour une dislocation de type vis ou *(12.99)* pour une dislocation de type coin, dont les expressions mathématiques permettent de séparer les énergies de la corde à courte et à longue distance. Il vient

$$\boldsymbol{E}_0 = L\frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi}\ln\frac{R_\infty}{l} + (L+\Delta L)\frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi}\ln\frac{l}{R} = L\frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi}\ln\frac{R_\infty}{R} + \Delta L\frac{\alpha n k K_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi}\ln\frac{l}{R} \qquad (12.113)$$

où $1 \le \alpha \le 1/(1-\nu)$, puisque α vaut 1 dans le cas d'une dislocation vis et $1/(1-\nu)$ dans le cas d'une dislocation coin.

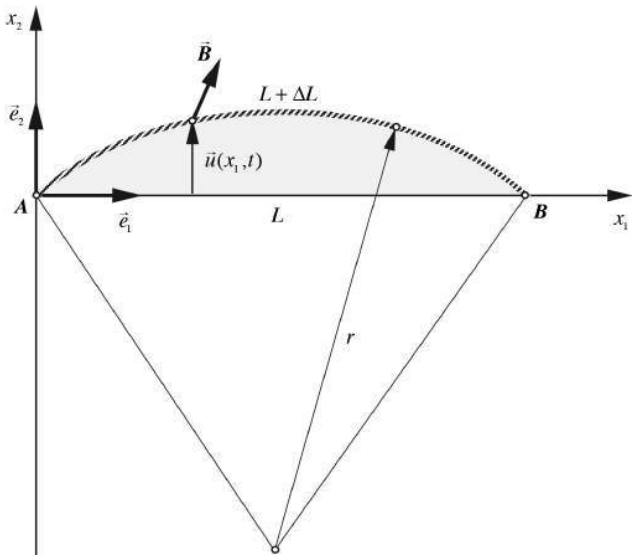


Figure 12.5 *- dislocation courbée entre deux points* ***A*** *et* ***B*** *séparés d'une distance* L

L'accroissement d'énergie $\Delta\boldsymbol{E}_0$ dû à la courbure de la corde vaut donc

$$\Delta\boldsymbol{E}_0 = \Delta L\frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi}\ln\frac{l}{R} \qquad \textit{avec} \qquad l \approx L \qquad (12.114)$$

Le fait que l'énergie d'une corde courbée est supérieure à l'énergie de la corde rectiligne implique qu'une corde courbée va chercher à redevenir rectiligne comme le ferait un élastique tendu entre deux points. Dans le cas d'un élastique, l'allongement d'une longueur ΔL demande une énergie égale à $\tau \Delta L$ où τ est la force de tension de l'élastique. Par analogie avec un élastique, on peut donc introduire un concept de *tension de ligne* τ *de la dislocation*, correspondant à une force fictive tangentielle à la corde, et qui vaut donc

$$\Delta \boldsymbol{E}_0 = \Delta L \tau = \Delta L \frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi} \ln \frac{l}{R} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\alpha n k_2 \vec{\boldsymbol{B}}^2}{4\pi} \ln \frac{l}{R} \tag{12.115}$$

En fait, cette analogie entre la tension de ligne et un élastique n'est certainement pas très rigoureuse et à quelque chose d'un peu nébuleux[4]. Mais malgré cela, elle est appelée à jouer un rôle considérable en théorie des dislocations, car c'est à elle qu'on fait très souvent appel pour résoudre les problèmes de dynamique des dislocations.

La force de Peach et Koehler agissant sur une dislocation

Imaginons une dislocation courbée située dans son plan de glissement, c'est-à-dire dans le plan contenant à la fois son vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ et le vecteur tangentielle $\vec{\boldsymbol{t}}$ à sa ligne. Supposons de plus que cette dislocation est soumise à une contrainte de cisaillement tangentielle au plan de glissement, qu'on peut entièrement caractérisée par un torseur de moment $\vec{m}$ appartenant au plan de glissement et perpendiculaire au plan du cisaillement. La force de Peach et Koehler agissant sur l'unité de longueur de la dislocation peut alors se déduire de la relation *(11.13)*, en ne prenant que les termes contenant le torseur de moment

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = -\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{m} - \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \wedge \vec{m}\right] \tag{12.116}$$

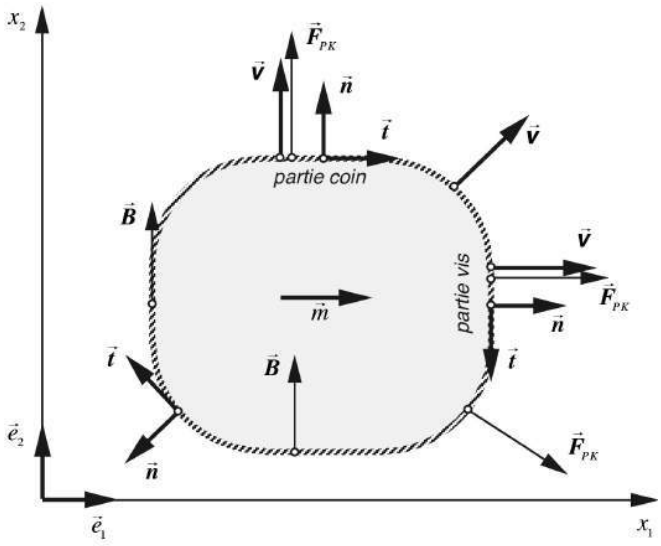


Figure 12.6 *- boucle fermée de dislocation dans son plan de glissement*

[4] *J. P. Hirth, T. Jossang, J. Lothe, J. Appl. Phys., vol. 37, p.110, 1966*

Représentons dans la figure 12.6 une boucle fermée de dislocation dans son plan de glissement $\boldsymbol{O}x_1x_2$, avec un vecteur tangentielle de ligne $\vec{\boldsymbol{t}}$ dans le sens horaire et un vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\vec{e}_2$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$. Cette dislocation est soumise à une contrainte de cisaillement pur s_{23} appliquée dans le plan $\boldsymbol{O}x_2x_3$. Cette contrainte de cisaillement peut parfaitement être représentée par un torseur de moment $\vec{m}$ dirigé dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, avec $\vec{m} = -2s_{23}\vec{e}_1$, de sorte que la force de Peach et Koehler $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ peut s'écrire aussi

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \left[\left(\vec{e}_2\vec{\boldsymbol{t}}\right)\vec{e}_1\right]\boldsymbol{B}s_{23} + \left[\left(\vec{e}_2 \wedge \vec{\boldsymbol{t}}\right) \wedge \vec{e}_1\right]\boldsymbol{B}s_{23} \qquad (12.117)$$

On vérifie alors que la force de Peach et Koehler est toujours dirigée selon le vecteur normale $\vec{\boldsymbol{n}}$ à la dislocation, contenu dans le plan de glissement $\boldsymbol{O}x_1x_2$, quelque soit la direction de $\vec{\boldsymbol{t}}$, de sorte que

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{B}s_{23} \qquad (12.118)$$

L'équation dynamique non relativiste de la corde

Considérons maintenant une dislocation similaire à celle décrite dans la section précédente, mais de forme quelconque dans son plan de glissement $\boldsymbol{O}x_1x_2$, et soumise à une contrainte de cisaillement pur $s_{23}(t)$ pouvant dépendre du temps (fig. 12.7). Décrivons encore sa forme par un vecteur de déplacement $\vec{u}(x_1,t)$ dans le plan de glissement, orienté selon la direction $\boldsymbol{O}x_2$.

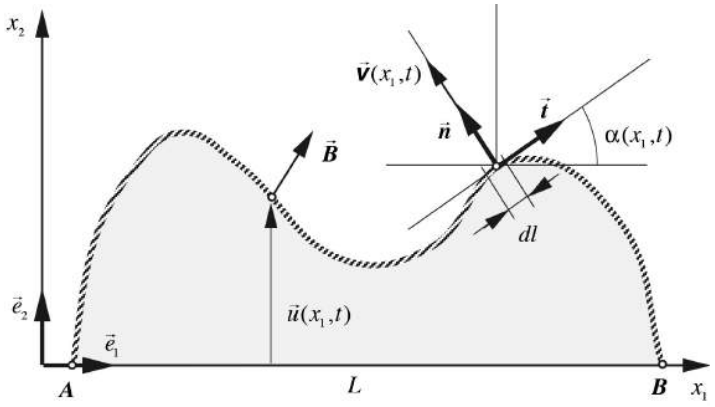


Figure 12.7 *- définition du déplacement $\vec{u}(x_1,t)$ d'une dislocation dans son plan de glissement*

Le but est alors de trouver l'équation dynamique qui gère l'évolution de la forme $\vec{u}(x_1,t)$ de la dislocation soumise à une contrainte de cisaillement. Pour cela, on va chercher à écrire l'équation de Newton d'un segment infinitésimal de corde de longueur dl, qui possède une inclinaison d'angle α par rapport à l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, avec évidemment

$$\tan\alpha(x_1,t) = \frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x_1} \qquad (12.119)$$

Si la dislocation se déplace dans le plan de glissement, sa vitesse locale $\vec{\boldsymbol{V}}(x_1,t)$ ne peut évidemment être que perpendiculaire à la corde, et sa projection sur l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ doit être égale à la dérivé temporelle $\dot{u}(x_1,t)$ du déplacement. La vitesse locale s'écrit donc

$$\vec{\boldsymbol{v}}(x_1,t) = \vec{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{v}(x_1,t) = \vec{\boldsymbol{n}}\,\frac{\dot{u}(x_1,t)}{\cos\alpha(x_1,t)} \qquad (12.120)$$

Quant à l'accélération locale $\vec{\boldsymbol{a}}(x_1,t)$ de la dislocation, elle ne peut aussi être que perpendiculaire à la corde, et de telle sorte que sa projection sur l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ soit égale à la dérivé temporelle seconde $\ddot{u}(x_1,t)$ du déplacement. L'accélération locale s'écrit par conséquent

$$\vec{\boldsymbol{a}}(x_1,t) = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}(x_1,t) = \vec{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}(x_1,t) = \vec{\boldsymbol{n}}\,\frac{\ddot{u}(x_1,t)}{\cos\alpha(x_1,t)} \qquad (12.121)$$

L'équation de Newton non relativiste du segment dl de dislocation fait alors intervenir la masse d'inertie au repos $M_0 dl$ du segment, et s'écrit par conséquent

$$M_0 dl\ \vec{\boldsymbol{a}} = \sum \vec{\boldsymbol{f}}_i \qquad (12.122)$$

où les $\vec{\boldsymbol{f}}_i$ représentent les diverses forces agissant sur le segment dl .

On peut maintenant rechercher l'ensemble des forces qui agissent sur ce segment infinitésimal (fig. 12.8), à savoir:

- *la force de Peach et Koehler* due à la contrainte de cisaillement $s_{23}(t)$

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{B}s_{23}dl \qquad (12.123)$$

- *les forces de tension de ligne* agissant tangentiellement sur les deux extrémités du segment

$$\vec{\boldsymbol{f}}_\tau^{(1)} = -\tau\vec{\boldsymbol{t}}\Big|_{x_1+dx/2} \quad et \quad \vec{\boldsymbol{f}}_\tau^{(2)} = \tau\vec{\boldsymbol{t}}\Big|_{x_1-dx/2} \qquad (12.124)$$

- *une force de freinage* liée à l'existence possible d'un frottement visqueux de la dislocation se déplaçant au sein du solide (c'est par exemple le cas du freinage des dislocations par leur interaction avec les phonons et les électrons dans les métaux). Si elle existe, cette force de freinage est au premier ordre proportionnelle à la vitesse du segment, et peut s'écrire, en introduisant un *coefficient* B_f *de frottement visqueux par unité de longueur de corde*

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{freinage} = -B_f dl\ \vec{\boldsymbol{v}}(x_1,t) \qquad (12.125)$$

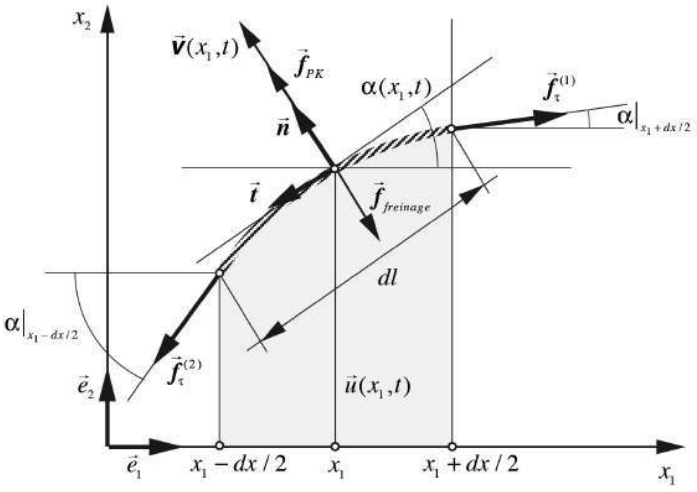


Figure 12.8 *- les forces agissant sur un segment infinitésimal de corde dans le plan de glissement*

Avec ces diverses forces, l'équation vectorielle non relativiste de Newton du segment dl s'écrit

$$M_0 dl\ \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{B}s_{23}dl - \tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1+dx/2} + \tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1-dx/2} - B_f dl\ \vec{\boldsymbol{v}} \tag{12.126}$$

qui devient, en introduisant les valeurs de $\vec{\boldsymbol{v}}(x_1,t)$ et $\vec{\boldsymbol{a}}(x_1,t)$

$$M_0 dl\ \frac{\ddot{u}}{\cos\alpha}\ \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{B}s_{23}dl\ \vec{\boldsymbol{n}} - \tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1+dx/2} + \tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1-dx/2} - B_f dl\ \frac{\dot{u}}{\cos\alpha}\ \vec{\boldsymbol{n}} \tag{12.127}$$

En tenant compte des relations suivantes

$$\begin{cases} dl = dx/\cos\alpha \\ \textit{projection de } \vec{\boldsymbol{n}} \textit{ sur } \boldsymbol{O}x_2 = \cos\alpha \\ \textit{projection de } -\tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1+dx/2} \textit{ sur } \boldsymbol{O}x_2 = \tau\sin\alpha\big|_{x_1+dx/2} \\ \textit{projection de } +\tau\vec{\boldsymbol{t}}\big|_{x_1-dx/2} \textit{ sur } \boldsymbol{O}x_2 = -\tau\sin\alpha\big|_{x_1-dx/2} \end{cases} \tag{12.128}$$

on peut projeter l'équation *(12.135)* sur l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, et il vient

$$M_0\ \frac{\ddot{u}}{\cos\alpha} + B_f\ \frac{\dot{u}}{\cos\alpha} = \boldsymbol{B}s_{23}\ + \frac{\left(\tau\sin\alpha\big|_{x_1+dx/2} - \tau\sin\alpha\big|_{x_1-dx/2}\right)}{dx} \tag{12.129}$$

Le rapport dans le dernier terme n'est rien d'autre que l'expression infinitésimale de la dérivé partielle de $\tau\sin\alpha$ par rapport à x_1, de sorte que

$$M_0\ \frac{\ddot{u}}{\cos\alpha} + B_f\ \frac{\dot{u}}{\cos\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_1}(\tau\sin\alpha) = \boldsymbol{B}s_{23} \tag{12.130}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser *(12.127)* pour exprimer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction de $\vec{u}(x_1,t)$

$$\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = 1\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2} \end{cases} \tag{12.131}$$

de sorte à obtenir l'équation différentielle suivante, appelée *modèle de la corde*

$$\left(M_0\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_f\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2}\ - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2}\right] = \boldsymbol{B}s_{23} \tag{12.132}$$

qui permet de calculer la dynamique $\vec{u}(x_1,t)$ d'une dislocation non rectiligne sur son plan de glissement, dans un solide soumis à une contrainte de cisaillement $s_{23}(t)$.

Dans cette équation, la tension de ligne τ peut dépendre de l'orientation de la corde sur le plan de glissement puisque la tension de ligne est différente pour une dislocation vis et une dislocation coin, auquel cas il faut introduire τ comme une fonction de l'angle $\alpha(x_1,t)$, donc sous la forme $\tau = \tau\left(\alpha(x_1,t)\right) = \tau\left(\arctan(\partial u(x_1,t)/\partial x_1)\right)$. Mais, en règle générale, on introduit une valeur approximative et constante de τ, ce qui permet déjà d'obtenir des résultats satisfaisants.

12.8 – Applications du modèle de la corde

Le modèle de la corde s'avère extrêmement utile et performant pour traiter les problèmes de plasticité et d'anélasticité dus au mouvement des dislocations et intervenant dans les solides usuels, tels que les métaux par exemple. Mais il n'est pas du ressort de ce livre de traiter en détail la problématique de ces phénomènes, qui peut être abordée dans de nombreux livres

traitant de ce sujet particulier. Cependant, on va tout de même ébaucher ici la façon dont ce type de problème peut être abordé sur la base du modèle de la corde.

La plasticité et l'anélasticité dues à la dynamique des dislocations

Le mouvement des dislocations interagissant avec des obstacles est l'un des principaux phénomènes responsable de la plasticité et de l'anélasticité des matériaux usuels[5]. La plasticité est alors associée aux mouvements irréversibles à longue distance des dislocations sous l'effet d'une contrainte extérieure, alors que l'anélasticité est associée aux mouvements à courte distance, de nature dissipative mais récupérable, de dislocations fortement ancrées dans le solide et soumises à une contrainte extérieure cyclique. Si ces mouvements microscopiques à longue ou à courte distance peuvent être calculés pour une dislocation grâce au modèle de la corde, il est simple ensuite de déduire la vitesse de déformation macroscopique plastique $\dot{\varepsilon}_i^{\,pl}$ ou anélastique $\dot{\varepsilon}_i^{\,an}$ du solide due à un ensemble de dislocations de densité Λ grâce aux relations d'Orowan *(10.37), (10.40)* ou *(10.41)*.

Le contrôle de la mobilité des dislocations par des obstacles

Dans les matériaux usuels, tels que les métaux par exemple, le mouvement des dislocations est généralement contrôlé par des interactions à courte ou à longue portée, avec des obstacles plus ou moins localisés, comme les phonons et les électrons, les autres dislocations, les défauts ponctuels, les précipités, les joints de grain, le réseau cristallin lui-même, etc.

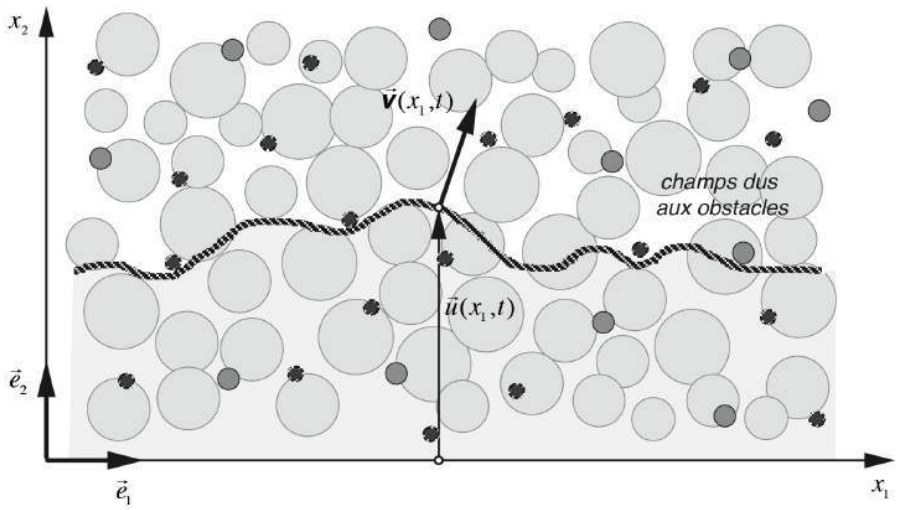


Figure 12.9 *- les champs de contrainte dus aux obstacles représentés sur le plan de glissement*

Pour introduire ce type d'interactions dans le modèle de la corde, il faut connaître la distribution spatiale des obstacles dans le solide, ainsi que les champs de contraintes internes générés par ceux-ci. Ces champs de contraintes dus aux obstacles peuvent être exprimés et visualisés au

[5] *J. P. Hirth, J. Lothe, «Theory of dislocations», second edition, John Wiley and Sons, New York, 1982, & V. L. Indenbom, J. Lothe, «Elastic strain fields and dislocation mobility», Elsevier, North-Holland, 1992*

niveau du plan de glissement de la dislocation (fig. 12.9), où ils deviennent responsables d'une force de Peach et Koehler agissant sur la dislocation (relations du tableau 11.1).
De cette manière, on peut rajouter dans l'équation de la corde *(12.132)* toutes les forces $\boldsymbol{f}_n\left(x_1, u(x_1,t)\right)$ dues aux N obstacles entourant une dislocation

$$\left(M_0\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_f\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2}\right] = \boldsymbol{B}s_{23} + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{f}_n\left(x_1, u(x_1,t)\right) \qquad (12.133)$$

Mais il est clair qu'une telle approche de la dynamique des dislocations s'avère vite très complexe. En général, on aborde ces problèmes d'interactions de dislocations avec des obstacles de manière beaucoup plus pragmatique, en développant, sur la base du modèle de la corde, des modèles simplifiés et judicieusement adaptés au problème à traiter. Pour approfondir ce sujet, on trouvera de nombreux exemples de mécanismes d'interaction des dislocations avec des obstacles, illustrés par des résultats expérimentaux et des modélisations théoriques, dans de nombreux livres traitant des dislocations, ou de manière plus résumée dans les articles de revue *«dislocation-point defect interactions»*[6] et *«dislocation-lattice interactions»*[7] .

Le rôle de l'activation thermique lors des interactions avec des obstacles

L'équation de la corde *(12.133)* en présence d'interactions avec des obstacles est une équation purement mécanique, qui ne peut pas tenir compte des effets de température, tels que la migration des obstacles par diffusion ou le franchissement des obstacles par activation thermique. Introduire les effets de température dans l'équation de la corde est théoriquement possible en développant une image *«brownienne»* de la dislocation, c'est-à-dire en introduisant un terme de fluctuations thermiques locales $\boldsymbol{F}_{fluctuation}\left(x_1, u(x_1,t), t\right)$ dans l'équation de la corde, calqué sur le terme de fluctuations thermiques dans le modèle de *l'équation de Langevin*[8]

$$\left(M_0\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_f\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tau \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2}\right] = \boldsymbol{B}s_{23} + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{f}_n\left(x_1, u(x_1,t)\right) + \boldsymbol{F}_{fluctuation}\left(x_1, u(x_1,t), t\right) \qquad (12.134)$$

Une telle approche des phénomènes de fluctuations thermiques s'avère à nouveau très complexe, de sorte que, en général, on aborde aussi ce problème de manière plus pragmatique en développant des modélisations de l'activation thermique judicieusement adaptées au problème à traiter.
Pour les lecteurs intéressés, des exemples typiques de ce type d'approche de l'activation thermique sont développés par l'auteur dans les articles *«overview on dislocation-point defect inter-*

---

[6] *G. Gremaud, chap.3.3, dans «Mechanical spectroscopy», Trans Tech Publications, Zürich, 2001, p. 178-246*

[7] *W. Benoit, chap. 3.2, dans «Mechanical spectroscopy», Trans Tech Publications, Zürich, 2001, p. 158-177*

[8] *Isihara, statistical physics, Academic Press, N.-Y., 1971, chapitre 7*

action: the brownian picture of dislocation motion»[9] et *«theory of plasticity and anelasticity due to dislocation creep through a multi-scale hierarchy of obstacles»*[10]. Dans ce dernier, on y montre entre autre que le mouvement thermiquement activé d'une dislocation se déplaçant au sein d'une hiérarchie d'obstacles différents peut présenter un *aspect fractal* (fig. 12.10), avec des conséquences très intéressantes sur la plasticité et l'anélasticité macroscopique du solide.

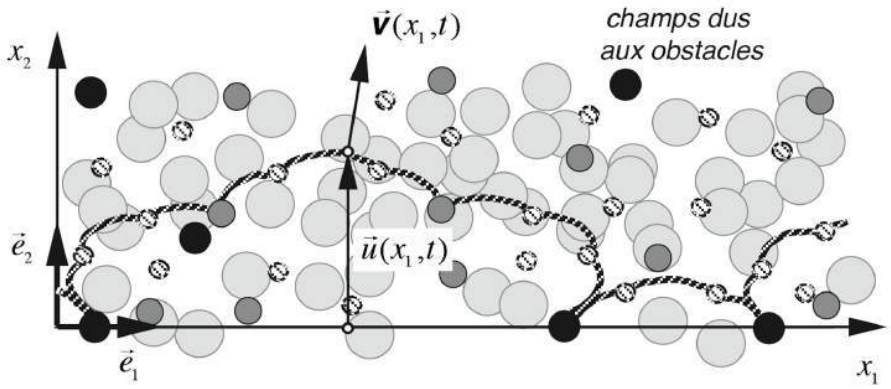


Figure 12.10 *- le comportement «fractal» d'une dislocation se mouvant parmi plusieurs type d'obstacles*

12.9 – Effets d'une contrainte statique forte sur une dislocation ancrée

Supposons un segment de dislocation de longueur L ancré sur son plan de glissement en deux points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ situés sur l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$, comme illustré dans la figure 12.7. De tels points d'ancrage peuvent être dus à l'existence d'interactions fortes et localisées de la dislocation avec des obstacles (autres dislocations, précipités, etc.).

La déformée statique d'une dislocation ancrée

Si ce segment est soumis à une contrainte de cisaillement s_{23} constante, il va prendre une forme statique courbée qu'on va essayer de déterminer. En partant de l'hypothèse simplificatrice qu'on peut utiliser une tension de ligne τ approximativement constante, indépendante de l'orientation du segment sur son plan de glissement, l'équation statique du modèle de la corde *(12.140)* s'écrit en ce cas

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2}\right] = -\frac{\boldsymbol{B}s_{23}}{\tau} \qquad (12.135)$$

Cette équation peut être aisément intégrée une première fois par rapport à x_1. Il vient, en introduisant une constante d'intégration C, une nouvelle équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x_1\right)^2} = -\frac{\boldsymbol{B}s_{23}}{\tau}x_1 + C \qquad (12.136)$$

---

[9] *G. Gremaud, Materials Science and Engineering, A 370, p. 191-198, 2004*

[10] *G. Gremaud, Materials Science and Engineering, A 521-522, p. 12-17, 2009*

Cette équation peut aussi être modifiée pour en extraire la valeur de la dérivé $\partial u / \partial x_1$, et on obtient l'équation différentielle de premier ordre suivante

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{C - x_1 / r}{\sqrt{1-\left(C - x_1 / r\right)^2}} \qquad \textit{avec} \qquad r = \frac{\tau}{\boldsymbol{B} s_{23}} \tag{12.137}$$

dont la solution est simplement

$$u(x_1) = r\sqrt{1-\left(C - x_1 / r\right)^2} + K \tag{12.138}$$

où K est une deuxième constante d'intégration. Les deux constantes d'intégration C et K s'obtiennent par les conditions aux limites du segment de corde, à savoir les points d'ancrage pour lesquels $u(0) = 0$ et $u(L) = 0$

$$C = \frac{L}{2r} \qquad \textit{et} \qquad K = -r\sqrt{1-C^2} = -\sqrt{r^2 - \left(L/2\right)^2} \tag{12.139}$$

Avec ces valeurs, la déformée du segment s'écrit

$$u(x_1) = \sqrt{r^2 - \left(L/2 - x_1\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(L/2\right)^2} \tag{12.140}$$

Cette déformée n'est rien d'autre qu'un *arc de cercle* qui passe évidemment par les points d'ancrage $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et dont le *rayon de courbure* correspond à la grandeur $r = \tau / (\boldsymbol{B} s_{23})$, comme illustré à la figure 12.5.

La limite de la déformée statique et la source de dislocations de Frank-Read

Le rayon de courbure $r = \tau / (\boldsymbol{B} s_{23})$ du segment est inversement proportionnel à la contrainte statique de cisaillement s_{23}, ce qui signifie que celui-ci diminue lorsque s_{23} augmente. Cependant, il est clair qu'il existe une limite minimum pour le rayon de courbure, qui intervient pour une contrainte critique $s_{23}\big|_{cr}$ telle que le rayon de courbure devient égal à $L/2$, donc pour

$$s_{23}\big|_{cr} = \frac{2\tau}{\boldsymbol{B} L} \tag{12.141}$$

Pour toute valeur de s_{23} supérieure à $s_{23}\big|_{cr}$, il ne peut pas exister de solution statique pour la déformée du segment de corde. Il apparaît alors une solution dynamique complexe de l'équation *(12.132),* qui correspond en fait à un mécanisme de *source de Frank-Read* [11] (fig. 12.11).

Le segment rectiligne initial représenté par *(1)* dans la figure 25.7 se courbe entre les deux points d'ancrage jusqu'à former un demi-cercle *(2)*. Puis il continue à s'étendre au-delà des points d'ancrage, étapes *(3), (4) et (5),* jusqu'à ce que le brin du segment partant de $\boldsymbol{A}$ rejoigne le brin de segment partant de $\boldsymbol{B}$ *(6)*. A cet endroit, comme les deux brins ont le même vecteur de Burgers, ils se lient entre eux en formant d'une part un nouveau segment *(1)* grandissant entre les points d'ancrage $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et d'autre part une boucle fermée *(6)* qui ne va pas cesser de grandir. Ce mécanisme constitue donc un phénomène de source ininterrompue de boucles de dislocation. C'est essentiellement ce phénomène, qui est très bien observé par microscopie électronique, qui explique pourquoi il est possible d'effectuer d'importantes déformations plastiques de certains solides comme les métaux. Et c'est bien ce type de phénomène qui peut être responsable de l'existence d'une source $\vec{S}_i^{(\vec{\lambda}_i)}$ non-nulle de charges de dislocation dans l'équ-

[11] *F. C. Frank, W. T. Read, Phys. Rev., vol.79, p.722, 1950*

ation de continuité *(10.9)* de la densité $\vec{\lambda}_i$ des charges de dislocation.

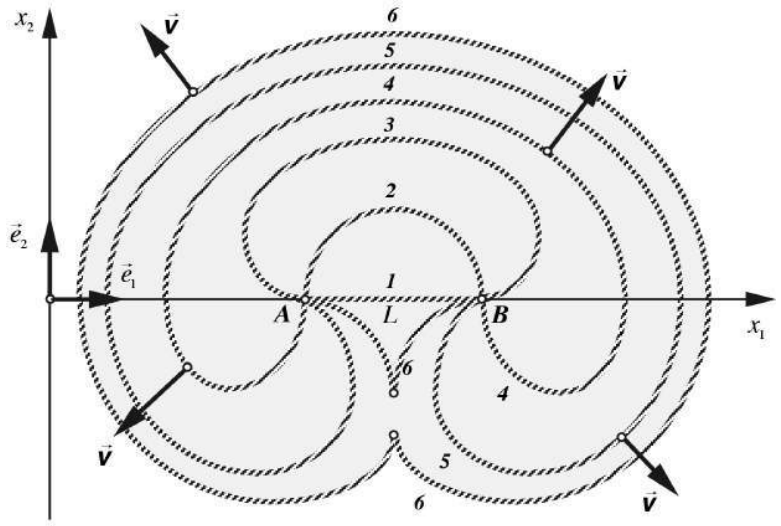


Figure 12.11 *- le mécanisme de source de dislocations de Frank-Read*

12.10 – Effets d'une contrainte dynamique sur une dislocation ancrée

Supposons à nouveau un segment de dislocation de longueur L ancré sur son plan de glissement en deux points ***A*** et ***B*** situés sur l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$, comme illustré dans la figure 12.7. Et supposons de plus que ce segment soit soumis à une contrainte dynamique extérieure $s_{23}(t)$ telle que $s_{23}(t) << s_{23}\big|_{cr}$. Pour résoudre le problème du mouvement de cette dislocation ancrée, il est clair que le modèle de la corde *(12.134)* est beaucoup trop sophistiqué. Pour ce cas de contraintes faibles, il est alors utile de développer des modèles simplifiés.

Le modèle classique de la corde pour de faibles contraintes [12]

Dans le cas où $s_{23}(t) << s_{23}\big|_{cr}$, l'angle α que forme la corde par rapport à l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ est toujours très faible, de sorte que

$$\tan\alpha = \partial u / \partial x_1 << 1 \qquad (12.142)$$

On peut par conséquent réécrire le modèle de la corde en supposant que $\partial u / \partial x_1 \cong 0$, et on obtient le *modèle classique* très connu de la corde

$$M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_f \frac{\partial u}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} = \boldsymbol{B} s_{23} \qquad (12.143)$$

Dans le cas de ce modèle, on montre que la *déformée statique* obtenue dans le cas d'un contrainte s_{23} constante est approchée par une parabole d'équation

---

[12] *A. Granato and K. Lücke, J. Appl. Phys., vol. 27, p. 583, 1956; A. Granato and K. Lücke, J. Appl. Phys., vol. 27, p. 789, 1956*

$$u(x_1) = \frac{\boldsymbol{B}s_{23}}{2\tau}(L - x_1)\ x_1 \qquad (12.144)$$

dont l'excursion maximum vaut

$$\max(u) = u(x_1 = L/2) = \frac{\boldsymbol{B}L^2}{8\tau}s_{23} \qquad (12.145)$$

Le «rigid rod model» d'une dislocation ancrée soumise à de faibles contraintes

Le modèle de la corde classique peut encore se simplifier d'avantage en cherchant à quelle équation approximative satisfait le déplacement statique moyen $\bar{u}$ de la dislocation ancrée de longueur L, défini par la relation

$$\bar{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u(x_1)dx_1 = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\boldsymbol{B}s_{23}}{2\tau}(L - x_1)x_1 dx_1 = \frac{\boldsymbol{B}L^2}{12\tau}s_{23} \qquad (12.146)$$

Pour une contrainte s_{23} constante, le déplacement statique moyen $\bar{u}$ satisfait donc l'équation suivante, en introduisant un *coefficient de rappel* K_u *dû à la tension de ligne* τ de la corde

$$K_u\bar{u} = \boldsymbol{B}s_{23} \quad \textit{avec} \quad K_u = \frac{12\tau}{L^2} \qquad (12.147)$$

On peut alors définir un modèle dynamique très approximatif de la dislocation ancrée, en écrivant très simplement que le déplacement moyen $\bar{u}(t)$ satisfait l'équation suivante

$$M_0\ \ddot{\bar{u}}(t) + B_f\ \dot{\bar{u}}(t) + K_u\ \bar{u}(t) = \boldsymbol{B}s_{23} \qquad (12.148)$$

Cette équation est appelée le *«rigid rod model»* parce qu'elle décrit le déplacement moyen de la dislocation, un peu comme si celle-ci était une barre rigide soumise à une force de rappel. Elle n'est en fait rien d'autre qu'une *équation d'oscillateur harmonique amorti*, et n'est évidemment qu'une approximation grossière de la réalité, puisqu'elle présuppose que la déformée dynamique de la dislocation reste toujours une parabole, ce qui ne sera manifestement pas le cas si la vitesse de variation de s_{23} devient très grande!

L'exemple de la «relaxation phonon» des dislocations dans les métaux

Dans un métal, il existe toujours une densité $\boldsymbol{\Lambda}$ de dislocations non négligeable. Celles-ci forment en général un réseau tridimensionnel appelé *réseau de Frank* [13], constitué de noeuds vers lesquels les dislocations convergent. Ces noeuds peuvent être considérées comme des points d'ancrage pour les dislocations du réseau, de sorte qu'on peut considérer que, pour les faibles contraintes appliquées, les dislocations se présentent comme des segments de longueur moyenne $\bar{L}$ qui se courbent sous l'effet des contraintes appliquées. Si on soumet un tel métal à une contrainte dynamique ultrasonore $s_{23}(t) = s_0 \sin\omega t$ de faible amplitude s_0, mais de haute fréquence ω, ces segments vont se mettre à vibrer.

Dans l'équation du *rigid rod model (12.148)*, il intervient la masse au repos M_0 par unité de longueur de dislocation, et le coefficient de frottement visqueux B_f par unité de longueur de

---

[13] *F. C. Frank, in Report of the Conference on Defects in Crystalline Solids, Phys. Soc., London, p. 159, 1954*

corde. En l'absence d'autres interactions, le coefficient de frottement visqueux B_f dans un métal est essentiellement dû à l'interaction des dislocations mobiles avec les phonons du réseau[14]. Le coefficient de frottement B_f est contrôlé par deux mécanismes: le *«vent phononique»* qui apparaît comme une dépendance linéaire en température de B_f, et la *«relaxation phonon lente»*, qui apparaît comme un comportement parabolique de B_f avec la température tant que la température est inférieure à la température de Debye du métal, et comme un comportement constant de B_f lorsque la température est supérieure à la température de Debye du métal. Le comportement des segments de dislocation sous l'effet des ultrasons dépend alors essentiellement des valeurs relatives de M_0 et de B_f.

Pour étudier ce comportement, on peut montrer que les mouvements microscopiques de vibration à courte distance des segments de dislocation seront perçus macroscopiquement comme une déformation anélastique de cisaillement α_{23}^{an}. En effet, en appliquant les relations d'Orowan *(10.40)* au cas de la corde représentée à la figure 12.6, en supposant que cette boucle de dislocation s'étende à une vitesse $\boldsymbol{v}$ constante dans toutes les directions, on peut vérifier qu'on a toujours, tout au long de la boucle, et donc aussi bien sur la partie coin que sur la partie vis, les relations suivantes

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1^{pl} = 0 \\ \dot{\alpha}_2^{pl} = -\boldsymbol{\Lambda B v}\vec{e}_3/2 \\ \dot{\alpha}_3^{pl} = -\boldsymbol{\Lambda B v}\vec{e}_2/2 \end{cases} \qquad (12.149)$$

qui impliquent que

$$\dot{\alpha}_{23}^{pl} = \dot{\alpha}_{32}^{pl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda B v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda B}\dot{\bar{u}} \qquad (12.150)$$

Ainsi, à l'échelle macroscopique du métal, le mouvement microscopique représenté par la relation *(12.148)* peut se mettre sous la forme d'une équation d'anélasticité

$$\dot{\bar{u}} = \frac{2}{\boldsymbol{\Lambda B}}\dot{\alpha}_{23}^{an} \quad \Rightarrow \quad \frac{2M_0}{\boldsymbol{\Lambda B}^2}\,\ddot{\alpha}_{23}^{an} + \frac{2B_f}{\boldsymbol{\Lambda B}^2}\,\dot{\alpha}_{23}^{an} + \frac{2K_u}{\boldsymbol{\Lambda B}^2}\,\alpha_{23}^{an} = s_{23} \qquad (12.151)$$

qui correspond exactement à l'équation phénoménologique d'anélasticité *(7.89)* que nous avions introduite au chapitre 7, à savoir

$$M_{an}\,\ddot{\alpha}_{23}^{an} + B_{an}\,\dot{\alpha}_{23}^{an} + K_{an}\,\alpha_{23}^{an} = s_{23} \qquad (12.152)$$

En présence d'une telle équation, nous avions vu au chapitre 7 que la réponse à la sollicitation $s_{23}(t) = s_0 \sin \omega t$ pouvait être une *résonance* à la fréquence $\omega_0 = \sqrt{K_{an}/M_{an}} = \sqrt{K_u/M_0}$, ou une *relaxation* avec un temps de relaxation $\tau_{an} = B_{an}/K_{an} = B_f/K_u$ suivant que le produit $\omega_0\tau_{an}$ est supérieur ou inférieur à 1, donc suivant que $B_f > \sqrt{M_0 K_u}$ ou $B_f < \sqrt{M_0 K_u}$.

Expérimentalement, on observe une relaxation dans le domaine des 20 à 150 MHz dans de nombreux métaux, qui a pu être attribuée sûrement à l'interaction dislocation-phonon[15]. Par conséquent, on en a déduit qu'en général le coefficient de frottement B_f dû au phonon l'emporte sur la masse d'inertie M_0 des dislocations, et donc qu'on peut négliger le terme en M_0

---

[14] *V. I. Alshits, the Phonon-dislocation interaction and its rôle in dislocation dragging and thermal resistivity, chapitre 11 dans «Elastic strain fields and dislocation mobility», Elsevier, North-Holland, 1992*

[15] *A. Granato, K. Lücke, J. Appl. Phys., vol. 27, p. 789, 1956*

dans l'équation de la corde lorsqu'on traite de problèmes de dynamique des dislocations dans les métaux.

Il existe plusieurs conséquences très intéressantes à cette observation expérimentale:

- le fait que les segments de dislocation présentent une relaxation dans le domaine du MHz dans les métaux implique que les dislocations deviennent parfaitement immobiles pour des fréquences nettement supérieures à la fréquence de la relaxation, et donc que ce domaine des très hautes fréquences est idéal pour mesurer les propriétés élastiques pures du réseau, sans perturbations dues aux dislocations,
- ce même fait implique que, si on étudie des dislocations par spectroscopie mécanique dans un domaine de fréquences nettement inférieures à la fréquence de la relaxation phonon, on peut parfaitement négliger le terme B_f, et par conséquent aussi le terme M_0 dans le modèle de la corde, ce qui signifie que les segments de dislocation ancrés sont toujours à l'équilibre mécanique avec la contrainte basse fréquence appliquée,
- comme le coefficient de frottement B_f dû au phonon l'emporte sur la masse d'inertie M_0 des dislocations dans les métaux, les dislocations ne peuvent être que des objets mobiles sur-amortis dans les métaux, de sorte que les segments de dislocation ancrés ne peuvent pas présenter de vibrations amorties comme celles qu'on pourrait observer sur une corde tendue. Ceci signifie entre autre que, sous l'effet des perturbations thermiques du réseau, un segment de dislocation ne peut se comporter que comme un *«segment brownien»* qui se déforme continument sous l'effet des perturbations thermiques locales de contrainte.

C'est sur la base de cette observation très importante qu'il est possible de développer assez simplement de nombreux modèles d'interactions entre obstacles et dislocations, comme ceux que le lecteur peut consulter dans les nombreux livres consacrés aux dislocations, ainsi que dans les articles[2,3,5,6] cités précédemment.

PARTIE II

A

Le «réseau cosmologique»

Equation de Newton

Modes de propagations d'ondes
et de vibrations localisées

Courbure des rayons d'onde
et «trous noirs»

Expansion cosmologique d'un réseau fini
et «énergie noire»

Chapitre 13

Réseaux parfaits et équations de Newton

Dans ce chapitre, on introduit un nouveau *réseau parfait isotrope,* purement *imaginaire*, qu'on appellera *réseau cosmologique*, dont le développement de l'énergie libre de déformation est exprimé par unité de volume, et qui dépend à la fois linéairement des expansions volumiques et quadratiquement des expansions volumiques, des cisaillements *et* des rotations par déformation de torsion. On le compare ensuite avec le *solide parfait* isotrope usuel, à savoir celui qu'on a utilisé aux chapitres 7 et 12 des applications de la théorie aux solides isotropes usuels. On compare aussi les *équations de Newton* de ces deux types de réseaux parfaits.

13.1 – Le «solide parfait» et son équation de Newton

On a vu à aux sections 7.1 et 12.1 que la partie élastique de l'énergie libre des solides isotropes usuels ne dépend que de l'expansion volumique τ et des cisaillements $\vec{\alpha}_i^{\,él}$ et $\vec{\alpha}_i^{\,an}$, et que c'est *l'énergie libre par site de réseau* qui est développée en fonction de ces grandeurs. La fonction d'énergie libre de déformation la plus simple qu'on puisse alors imaginer est celle du *réseau parfait isotrope,* qu'on appellera dorénavant le «*solide parfait»,* qui s'écrit

$$f^{déf} = -k_0\tau + k_1\tau^2 + k_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,él})^2 + k_{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,an})^2 \qquad (13.1)$$

En l'absence d'anélasticité d'expansion, les équations d'état de la déformation se limitent au scalaire de pression p et aux tenseurs symétriques transverses de contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$ et $\vec{s}_i^{\,cons}$ comme le montrent les relations *(7.15)*

$$\begin{cases} p = -n\dfrac{\partial f^{él}}{\partial\tau} = nk_0 - 2nk_1\tau \\ \vec{s}_i = n\dfrac{\partial f^{él}}{\partial\alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2nk_2\,\vec{\alpha}_i^{\,él} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \vec{s}_i^{\,cons} = n\dfrac{\partial f^{él}}{\partial\alpha_{ik}^{an}}\vec{e}_k = 2nk_{an}\,\vec{\alpha}_i^{\,an} \end{cases} \qquad (13.2)$$

On a vu aussi à la section 12.1 que, dans le solide parfait, les cisaillements purs en présence d'une expansion volumique homogène peuvent être traités à l'aide des vecteurs de rotation élastique $\vec{\omega}^{\,él}$ et anélastique $\vec{\omega}^{\,an}$, en utilisant le torseur de moment $\vec{m}$. Avec ces équations d'état, on a montré à la section 12.1 que l'équation de Newton peut s'écrire de deux façons différentes, à savoir en fonction de $\vec{\alpha}_k^{\,él}$ *(12.4)* ou en fonction de $\vec{\omega}^{\,él}$ *(12.9)*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2k_2\sum_k\vec{e}_k\,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k^{\,él} - 2k_2\sum_k\left(\vec{e}_k\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k^{\,él} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\left(2k_1(1-\tau)+k_0\right)\tau\right] + m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} \qquad (13.3)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{\,él} - 2k_2\sum_k\left(\vec{e}_k\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k^{\,él} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\left(\frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau)+k_0\right)\tau\right] + m\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - m\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} + 2k_2\vec{\lambda} \qquad (13.4)$$

L'équation de Newton *(13.4)* du *solide parfait* usuel à l'avantage de dépendre directement du vecteur de rotation élastique, de telle sorte que le tenseur de cisaillement n'y apparaît plus que dans un terme de couplage avec le gradient du champ d'expansion volumique.
Cette équation de Newton, couplée avec l'équation de propagation de la chaleur, nous a permis de calculer les modes de propagations d'ondes thermoélastiques dans les *solides isotropes* usuels (section 7.3). Elle nous a permis aussi de calculer les champs à l'équilibre d'une dislocation coin (section 12.4) et de montrer que l'évolution spatio-temporelle d'un solide isotrope à expansion volumique homogène est décrite par un set d'équations parfaitement analogues aux équations de Maxwell de l'électromagnétisme.

13.2 – Le «réseau cosmologique» et son équation de Newton

On introduit ici un nouveau réseau solide imaginaire, qu'on nommera arbitrairement «*réseau cosmologique*», *et* dont c'est *l'énergie libre par unité de volume* qui devient un développement de τ, $\vec{\alpha}_i^{\,él}$ et $\vec{\alpha}_i^{\,an}$, mais aussi directement des vecteurs de rotation $\vec{\omega}^{\,él}$ et $\vec{\omega}^{\,an}$ par déformations élastiques et anélastiques de rotation. Notre conjecture initiale est donc *à priori* la suivante

Conjecture 0: *l'énergie libre du «réseau cosmologique» s'exprime par unité de volume de réseau:*

$$F^{déf} = F^{déf}\left[\tau, \tau^2, (\vec{\alpha}_i^{\,él})^2, (\vec{\omega}^{\,él})^2, (\vec{\alpha}_i^{\,an})^2, (\vec{\omega}^{\,an})^2\right] \qquad (13.5)$$

Un tel réseau correspond en fait à un réseau parfait isotrope le plus général qu'on puisse imaginer si on fait dépendre son énergie à la fois linéairement des expansions volumiques et quadratiquement des expansions volumiques, des cisaillements et des rotations par déformation de torsion. Toujours par esprit de simplification, on peut encore supposer qu'il n'existe pas d'anélasticité par expansion volumique dans ce réseau. La fonction d'état par unité de volume de ce *réseau cosmologique* s'écrit par conséquent,

$$F^{déf} = -K_0\tau + K_1\tau^2 + K_2\sum_i (\vec{\alpha}_i^{\,él})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{\,él})^2 + K_1^{an}\sum_i (\vec{\alpha}_i^{\,an})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{\,an})^2 \qquad (13.6)$$

dont on déduit directement l'énergie libre par site de réseau

$$f^{déf} = \frac{F^{déf}}{n} = \frac{1}{n}\left(-K_0\tau + K_1\tau^2 + K_2\sum_i (\vec{\alpha}_i^{\,él})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{\,él})^2 + K_1^{an}\sum_i (\vec{\alpha}_i^{\,an})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{\,an})^2\right) \qquad (13.7)$$

En comparant cette expression de $f^{déf}$ avec l'expression *(13.1)* du *solide parfait usuel*, on voit immédiatement que c'est la présence du facteur $1/n$ et des termes en $\vec{\omega}^{\,él}$ et $\vec{\omega}^{\,an}$ qui différencie essentiellement ces deux expressions de l'énergie libre. De *(13.7)*, on déduit les cinq équations d'état de l'élasticité et de l'anélasticité, respectivement pour le scalaire de pression p, les tenseurs symétriques transverses de contraintes de cisaillement $\vec{s}_i$ et $\vec{s}_i^{\,cons}$ ainsi que les torseurs de moment $\vec{m}$ et $\vec{m}^{\,cons}$

$$\begin{cases} p = -n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial \tau} = K_0 - 2K_1\tau - F^{déf} \\ \vec{s}_i = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial \alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2K_2\,\vec{\alpha}_i^{\,él} \\ \vec{m} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial \omega_i^{él}}\vec{e}_i = 4K_3\,\vec{\omega}^{\,él} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{s}_i^{\,cons} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial \alpha_{ik}^{an}}\vec{e}_k = 2K_1^{an}\,\vec{\alpha}_i^{\,an} \\ \vec{m}^{\,cons} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial \omega_i^{an}}\vec{e}_i = 4K_2^{an}\,\vec{\omega}_i^{\,an} \end{cases} \qquad (13.8)$$

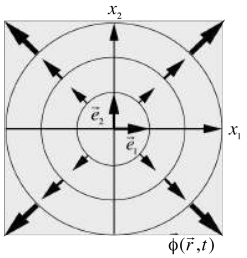
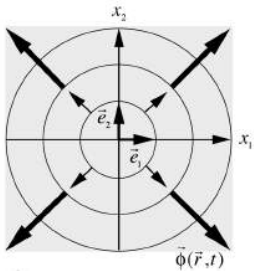
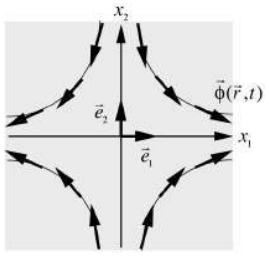
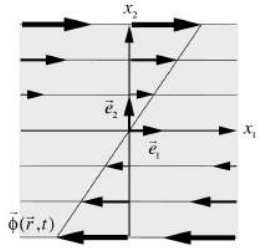
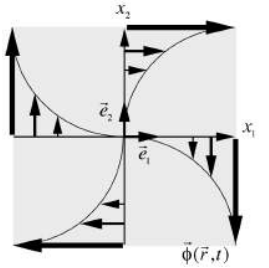
déformations	***champ de vitesse de la déformation***	***composantes de l'énergie de déformation***
expansion homogène 	$\vec{\phi} = a\left[x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\right]\dot{g}(t)$	$F^{\tau} = 3ag(t)\left[3K_1 ag(t) - K_0\right]$ $\boxed{F^{\vec{\alpha}_i^{él}} = 0}$ $\boxed{F^{\vec{\omega}} = 0}$
expansion non-homogène 	$\vec{\phi} = \dot{g}(t) r \sum_i x_i\vec{e}_i$ $où \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$	$F^{\tau} = 4rg(t)\left[4K_1 rg(t) - K_0\right]$ $F^{\vec{\alpha}_i^{él}} = 6K_2 r^2 g^2(t)$ $\boxed{F^{\vec{\omega}} = 0}$
allongements - rétrécissements 	$\vec{\phi} = \left[a_1 x_1\vec{e}_1 - a_2 x_2\vec{e}_2\right]\dot{g}(t)$	$F^{\tau} = K_1\left(a_1 - a_2\right)^2 g^2(t)$ $-K_0\left(a_1 - a_2\right)g(t)$ $F^{\vec{\alpha}_i^{él}} = K_2\left(a_1^2 + a_2^2\right)g^2(t)$ $-\frac{K_2}{3}\left(a_1 - a_2\right)^2 g^2(t)$ $\boxed{F^{\vec{\omega}} = 0}$
cisaillements 	$\vec{\phi} = ax_2\dot{g}(t)\vec{e}_1$	$\boxed{F^{\tau} = 0}$ $F^{\vec{\alpha}_i^{él}} = K_2 a^2 g^2(t)/2$ $F^{\vec{\omega}^{él}} = K_3 a^2 g^2(t)/2$
rotation non-homogène 	$\vec{\phi} = r\left(x_1\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_1\right)g(t)$ $où \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	$\boxed{F^{\tau} = 0}$ $F^{\vec{\alpha}_i^{él}} = K_2 r^2 g^2(t)/2$ $F^{\vec{\omega}^{él}} = 9K_3 r^2 g^2(t)/2$

Tableau 13.1 - *exemples de déformations et énergies d'expansion, de cisaillement et de torsion*

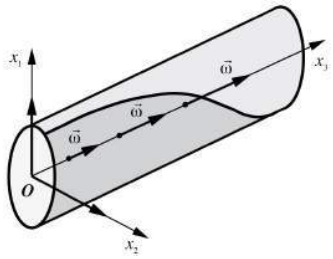
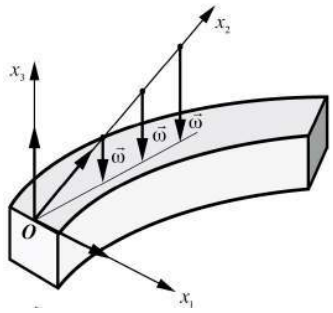
déformations	*champ de vitesse de la déformation*	*composantes de l'énergie de déformation*
torsion 	$\vec{\phi} = \left(x_1\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_1\right)x_3\,\dot{g}(t)$	$\boxed{F^{\tau} = 0}$ $F^{\vec{\alpha}_i^{el}} = K_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)g^2(t)/2$ $F^{\vec{\omega}} = K_3\left(4x_3^2 + x_1^2 + x_2^2\right)g^2(t)/2$
flexion 	$\vec{\phi} = 2\left(x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2\right)x_2\,\dot{g}(t)$	$F^{\tau} = 2x_1 g(t)\left[2K_1 x_1 g(t) - K_0\right]$ $F^{\vec{\alpha}_i^{el}} = 2K_2\left(9x_2^2 + 4x_1^2/3\right)g^2(t)$ $F^{\vec{\omega}} = 2K_3 x_2^2 g^2(t)$

Tableau 13.2 - *torsion et flexion pures, et énergies d'expansion, de cisaillement et de rotation*

Au niveau des équations d'état, on peut aussi se demander ce qui différencie le *solide parfait* usuel du *réseau cosmologique.* La première différence flagrante, et celle qui va jouer *un rôle capital* par la suite, est l'expression $p = K_0 - 2K_1\tau - F^{déf}$ de la pression p au sein du *réseau cosmologique*, qui dépend directement de l'énergie libre $F^{déf}$ de la déformation élastique locale, alors qu'elle s'écrit simplement $p = n\left(k_0 - 2k_1\tau\right)$ dans le *solide parfait* usuel.

Dans le tableau 13.1, on a reporté différents types de déformation et les termes d'énergie qui en résultent dans le *réseau cosmologique*. Si l'expansion volumique homogène n'entraîne aucune modification de l'énergie de cisaillement et de l'énergie de rotation élastique, les expansions volumiques inhomogènes et les déformations par allongements ou rétrécissements dans une direction données modifient l'énergie de cisaillement, mais n'affecte pas l'énergie de rotation élastique. En fait, seuls les cisaillements purs ou les rotations non-homogènes, qu'on pourrait qualifier de déformation par torsion du réseau, affectent à la fois les énergies de cisaillement et de rotation élastique, mais de manière différente: dans le cas de cisaillements purs, les énergies de cisaillement et de rotation élastique sont égales, alors que, dans le cas des rotations non-homogènes, les énergies de cisaillement sont différentes des énergies de rotation élastique. D'ailleurs, la torsion pure du milieu, comme celle décrite à la figure 3.2, ainsi que la flexion pure, comme celle décrite à la figure 3.1, affectent aussi à la fois le tenseur de cisaillement et le vecteur de rotation élastique. En effet, supposons les champs de vitesse suivants représentant respectivement une torsion du milieu selon l'axe $\boldsymbol{O}x_3$ et une flexion du milieu selon $\boldsymbol{O}x_3$

$$\vec{\phi}_{torsion} = \left(x_1\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_1\right)x_3\,\dot{g}(t) \quad et \quad \vec{\phi}_{flexion} = 2\left(x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2\right)x_2\,\dot{g}(t) \qquad (13.9)$$

Avec ces champs de vitesse, on peut calculer l'évolution temporelle des tenseurs de distorsion en utilisant les relations géométrocinétiques du tableau 2.3. Dans le cas de la torsion, il vient

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \left(\alpha_{ij}^{él}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{g(t)}{2} \\ \vec{\omega}^{él} = \left(x_3\vec{e}_3 - x_1\vec{e}_1/2 - x_2\vec{e}_2/2\right) g(t) \end{cases} \qquad (13.10)$$

et dans le cas de la flexion

$$\begin{cases} \tau = 2x_1 g(t) \\ \left(\alpha_{ij}^{él}\right) = \begin{pmatrix} -2x_1/3 & 3x_2 & 0 \\ 3x_2 & 4x_1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2x_1/3 \end{pmatrix} g(t) \\ \vec{\omega}^{él} = -x_2 g(t)\vec{e}_3 \end{cases} \qquad (13.11)$$

On déduit de ces expressions les énergies d'expansion, de cisaillement et de rotation élastique qui sont reportées dans le tableau 13.2. On constate que torsion et flexion pures contribuent toutes deux à des énergies de cisaillement et de rotation élastique, mais que celles-ci ont des expressions différentes.

L'*équation de Newton* du *réseau cosmologique* est dérivée de l'expression *(6.11)*, dans laquelle on néglige le terme $\rho\vec{g}$ et on introduit les équations d'état *(13.8)*

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = 2K_2\sum_i \vec{e}_i \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_i^{él} - 2K_3\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + 2K_1\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau + nm\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{\left(K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{él})^2 + K_1^{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{an})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{an})^2 + K_1\tau^2 - K_0\tau\right)}_{F^{déf}} \qquad (13.12)$$

En utilisant encore la relation *(12.8),* déduite directement de l'expression *(12.5)* du vecteur de flexion, à savoir

$$\sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k^{él} = \vec{\lambda} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{él} \quad \text{et} \quad \sum_k \vec{e}_k \,\mathrm{div}\,\vec{\alpha}_k^{an} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{an} \qquad (13.13)$$

l'*équation de Newton* du *réseau cosmologique* peut aussi s'écrire sous la forme

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + \left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau + 2K_2\,\vec{\lambda} + nm\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{\left(K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{él})^2 + K_1^{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{an})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{an})^2 + K_1\tau^2 - K_0\tau\right)}_{F^{déf}} \qquad (13.14)$$

Nous verrons par la suite que cette dernière équation de Newton va jouer un rôle absolument central sur le comportement du *réseau cosmologique*. Elle est assez complexe, notamment de

par la présence de la densité de charge de flexion $\vec{\lambda}$, des termes liés à la diffusion des défauts ponctuels intrinsèques et surtout du terme dépendant de la densité volumique d'énergie libre de déformation $F^{déf}$.

13.3 – La «face cachée» du réseau cosmologique

Le fait d'introduire une énergie de rotation avec des termes en $\vec{\omega}^{él}$ et $\vec{\omega}^{an}$ dans l'expression *(13.6)* de l'énergie libre du réseau cosmologique, de même que le fait de développer son énergie libre par unité de volume et non par site de réseau, ne sont pas du tout élémentaires à comprendre, et font vraiment de ce réseau *un réseau parfaitement imaginaire* dont on ne trouve absolument pas d'équivalent parmi les solides usuels.

De la recherche des analogies avec les Grandes Théories de la Physique

Plutôt que de se lancer maintenant dans une recherche superfétatoire d'interprétation de la *«face cachée»* de ce réseau imaginaire, il semble préférable de commencer par explorer en détail les conséquences que cette *face cachée* implique au niveau des comportements que peut présenter le réseau cosmologique. C'est donc à cette tâche qu'est dévolue toute la suite de cet ouvrage, qui sera consacrée à extraire la substantifique moelle de cette *face cachée.* Pour ce faire, on va montrer que c'est *l'équation de Newton* qu'on en déduit qui présente des propriétés spectaculaires et qui est au coeur des très nombreuses analogies que nous allons développer dans cette troisième partie avec les grandes théories de la physique, à savoir l'Electromagnétisme de Maxwell, la Gravitation de Newton, la Relativité Générale d'Einstein, la Transformation de Lorentz et la Relativité Restreinte d'Einstein, et même la Physique Quantique et le Modèle Standard des particules élémentaires.

Chapitre 14

Modes de propagation d'ondes et de vibrations localisées dans le réseau cosmologique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la *propagation d'ondes* au sein du réseau cosmologique. Il y apparaît des phénomènes assez surprenants, comme l'apparition d'un *mode longitudinal couplé à la propagation des ondes transversales polarisées linéairement,* mode longitudinale qui disparaît pour des ondes transversales polarisées circulairement. Il existe aussi la possibilité de propagation *d'ondes longitudinales*. Mais, sous certaines conditions qui dépendent des modules élastiques, le *mode de propagation longitudinale* disparaît au profit de *modes de vibrations localisées d'expansion*.

14.1 – Propagation d'ondes transversales

Dans cette section, on va procéder à une étude détaillée de la propagation des ondes transversales dans le réseau parfait cosmologique. Si on émet les hypothèses suivantes

Hypothèses 1:
$$\begin{cases} \vec{\alpha}_i^{an} = 0 \quad \& \quad \vec{\omega}^{an} = 0 \\ C_I = C_L \cong 0 \\ \tau = \tau_0 + \tau^{(p)} \\ \vec{\lambda} = 0 \end{cases} \qquad (14.1)$$

c'est-à-dire si on suppose qu'il n'y a pas d'anélasticité, que les concentrations de lacunes et d'interstitiels sont négligeables, que l'état d'expansion volumique de fond du solide est une constante valant τ_0 et qu'il n'y a pas de densité de charges de flexion $\vec{\lambda}$, la propagation de perturbations transversales peut se calculer facilement.

L'équation de Newton *(13.14)* peut s'écrire, grâce à la relation

$$\vec{p}^{(p)} = m\vec{\phi}^{(p)} \qquad (14.2)$$

obtenue en l'absence de lacunes et d'interstitiels, sous la forme

$$mn\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{(p)} + \left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{(p)})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{(p)})^2 + K_1\tau^2 - K_0\tau\right) \qquad (14.3)$$

Le couplage avec des ondelettes longitudinales

Si, dans un repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, on considère alors une perturbation transversale du champ de vitesse $\vec{\phi}^{(p)}$ sous la forme d'un champ de vitesse parallèle à l'axe $\boldsymbol{O}x_k$ et variant le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, du type $\phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k$, l'argument du deuxième gradient variera selon l'axe $\boldsymbol{O}x_j$ sous l'effet des carrés $(\vec{\alpha}_i^{(p)})^2$ et $(\vec{\omega}^{(p)})^2$ non nuls, forcément associés à $\vec{\omega}^{(p)}$, de sorte qu'il

apparaîtra une force dans la direction $\boldsymbol{O}x_j$, et par conséquent une vitesse $\phi_j^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j$ selon l'axe $\boldsymbol{O}x_j$ ainsi qu'une perturbation de l'expansion volumique $\tau^{(p)}(x_j,t)$. On devra donc écrire en ce cas une perturbation de vitesse sous la forme

$$\vec{\phi}^{(p)} = \phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k + \phi_j^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j \qquad (14.4)$$

Une telle perturbation $\vec{\phi}^{(p)}$ implique les perturbations suivantes $\tau^{(p)}$ et $\vec{\omega}^{(p)}$ du champ d'expansion et du champ de rotation le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, qu'on déduit via les équations géométrocinétiques pour τ et $\vec{\omega}^{él}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau^{(p)}}{dt} = \mathrm{div}\vec{\phi}^{(p)} = \dfrac{\partial\phi_j^{(p)}}{\partial x_j} & \Rightarrow \quad \tau = \tau_0 + \tau^{(p)}(x_j,t) \\ \dfrac{d\vec{\omega}^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\phi}^{(p)} & \Rightarrow \quad \vec{\omega}^{(p)} = \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_i \end{cases} \qquad (14.5)$$

Et la perturbation $\vec{\phi}^{(p)}$ implique aussi une perturbation des cisaillement $\vec{\alpha}_i^{(p)}$ le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, qu'on déduit via les équations géométrocinétiques *(2.26)* pour $\vec{\alpha}_i$

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_i^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_i\tau^{(p)}(x_j,t) \\ \vec{\alpha}_j^{(p)} = +\dfrac{2}{3}\vec{e}_j\tau^{(p)}(x_j,t) + \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k \\ \vec{\alpha}_k^{(p)} = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_k\tau^{(p)}(x_j,t) + \omega_i^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j \end{cases} \qquad (14.6)$$

L'équation *(14.3)* peut alors s'exprimer entièrement en fonction de $\phi_k^{(p)}$, $\phi_j^{(p)}$, $\omega_i^{(p)}$, et $\tau_0+\tau^{(p)}$, en tenant compte que la densité n dépend de τ par la relation $n = n_0\,\mathrm{e}^{-\tau}$. La composante transversale de cette équation s'écrit, selon l'axe $\boldsymbol{O}x_k$

$$\frac{d\phi_k^{(p)}}{dt} = 2\frac{K_2+K_3}{m}\frac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j} = 2\frac{K_2+K_3}{mn_0}\mathrm{e}^{\tau_0+\tau^{(p)}}\frac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j} \qquad (14.7)$$

et sa composante longitudinale, selon l'axe $\boldsymbol{O}x_j$

$$\frac{d\phi_j^{(p)}}{dt} = \frac{1}{mn_0}\mathrm{e}^{\tau_0+\tau^{(p)}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)\tau^{(p)} + \left(K_1+\frac{2}{3}K_2\right)(\tau^{(p)})^2 + 2(K_2+K_3)(\omega_i^{(p)})^2\right] \qquad (14.8)$$

La composante transversale peut être associée à l'équation géométrocinétique pour $\vec{\omega}^{(p)}$

$$\frac{d\vec{\omega}^{(p)}}{dt} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\phi}^{(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_i^{(p)}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial x_j} \qquad (14.9)$$

Pour ces perturbations, les dérivées particulaires s'écrivent, si le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ est en translation $\vec{\phi}_o(t)$ et en rotation $\dot{\vec{\omega}}_o(t)$ dans le référentiel absolu

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\varphi}\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\phi}^{(p)}(\vec{r},t) - \vec{\phi}_o(t) - \dot{\vec{\omega}}_o(t)\wedge\vec{r}\right)\vec{\nabla} \qquad (14.10)$$

Emettons donc l'hypothèse suivante:

Hypothèse 2: *le référentiel local n'est pas en rotation* $\Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}}_o(t) = 0$ *(14.11)*

Alors, comme les perturbations $\vec{\phi}^{(p)}(\vec{r},t) = \phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k$ n'ont qu'une composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, le champ de vitesse relative $\vec{\varphi}^{(p)}(\vec{r},t) = \vec{\phi}^{(p)}(\vec{r},t) - \vec{\phi}_0(t)$ ne possède qu'une seule composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, valant $\vec{\varphi}^{(p)}(\vec{r},t) = \left[\phi_k^{(p)}(x_j,t) - \phi_k^{(p)}(x_j=0,t)\right]\vec{e}_k$, de sorte que

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{\varphi}\vec{\nabla})=\frac{\partial}{\partial t}+(\varphi_k\frac{\partial}{\partial x_k}) \qquad (14.12)$$

Mais comme toutes les grandeurs de propagation ne varient que le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$, la dérivé partielle selon x_k n'intervient pas, et la dérivé particulaire d/dt peut être remplacée par la dérivé partielle $\partial/\partial t$ par rapport au temps dans tout le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Les perturbations transversales sont alors régies par le couple suivant d'équations

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial x_j}\\[2ex]\dfrac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial t}=2\dfrac{K_2+K_3}{mn_0}\mathrm{e}^{\,\tau_0+\tau^{(p)}}\dfrac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j}\end{cases} \qquad (14.13)$$

Dans ce couple d'équations, la valeur de $n=n_0\,\mathrm{e}^{-\tau}$ dépend légèrement de t et de x_j puisque la propagation de l'onde transversale est couplée à une ondelette longitudinale exprimée par $\tau=\tau_0+\tau^{(p)}(x_j,t)$. En négligeant cette dépendance, donc en admettant au premier ordre que $\tau\cong\tau_0$, les perturbations transversales faibles $\omega_i^{(p)}$ dans le solide parfait de cisaillement satisfont l'équation d'onde linéarisée suivante

$$\frac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial t^2}\cong\frac{K_2+K_3}{mn_0}\mathrm{e}^{\,\tau_0}\frac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial x_j^2}=\frac{K_2+K_3}{mn}\frac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial x_j^2} \qquad (14.14)$$

qui implique des ondes progressives

$$\omega_i^{(p)}(x_j,t)\cong\omega_{i0}^{(p)}\exp\left[i\left(k_tx_j-\omega t\right)\right]\ \text{ avec }\ k_t=\sqrt{\frac{mn}{K_2+K_3}}\omega=\mathrm{e}^{-\tau_0/2}\sqrt{\frac{mn_0}{K_2+K_3}}\omega \qquad (14.15)$$

qui se propagent avec une célérité de phase approximativement égale à

$$c_t=\frac{\omega}{k_t}\cong\sqrt{\frac{K_2+K_3}{mn}}=\mathrm{e}^{\tau_0/2}\sqrt{\frac{K_2+K_3}{mn_0}} \qquad (14.16)$$

La composante longitudinale associée à la propagation de la perturbation transversale s'obtient alors en utilisant la relation *(14.8)* et l'équation géométrocinétique suivante

$$\frac{d\tau^{(p)}}{dt}=\mathrm{div}\vec{\phi}^{(p)}=\mathrm{div}\left(\phi_j^{(p)}\vec{e}_j\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{d\tau^{(p)}}{dt}=\frac{\partial\phi_j^{(p)}}{\partial x_j} \qquad (14.17)$$

Ce système d'équations est évidemment non-linéaire, mais en supposant de faibles amplitudes $\tau^{(p)}$, on peut obtenir un couple d'équations linéarisées vis-à-vis de $\tau^{(p)}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tau^{(p)}}{\partial t}\cong\dfrac{\partial\phi_j^{(p)}}{\partial x_j}\\[2ex]mn\dfrac{\partial\phi_j^{(p)}}{\partial t}\cong\left(\dfrac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right)\dfrac{\partial\tau^{(p)}}{\partial x_j}+2\left(K_2+K_3\right)\omega_i^{(p)}\dfrac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j}\end{cases} \qquad (14.18)$$

qui se réduit à une seule équation différentielle de deuxième ordre pour $\tau^{(p)}$

$$mn\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial t^2}\cong\left(\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right)\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial x_j^2}+2\left(K_2+K_3\right)\left[\left(\frac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j}\right)^2+\omega_i^{(p)}\frac{\partial^2\omega_i^{(p)}}{\partial x_j^2}\right] \qquad (14.19)$$

En exprimant le terme en les dérivés de $\omega_i^{(p)}$ à partir de la solution transversale *(14.15)*, on obtient une équation différentielle pour $\tau^{(p)}$ avec second membre

$$mn\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial t^2}-\left(\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right)\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial x_j^2}\cong -4\left(K_2+K_3\right)k_t^2\left(\omega_{i0}^{(p)}\right)^2\exp\left[i2\left(k_t x_j-\omega t\right)\right] \qquad (14.20)$$

En introduisant la solution suivante pour $\tau^{(p)}$

$$\tau^{(p)}(x_j,t)\cong\tau_0^{(p)}\exp\left[i2\left(k_t x_j-\omega t\right)\right] \qquad (14.21)$$

dans l'équation d'onde *(14.19)*, il vient la relation entre l'amplitude $\tau_0^{(p)}$ de l'ondelette longitudinale $\tau^{(p)}$ couplée à l'onde transversale, en fonction de l'amplitude $\omega_{i0}^{(p)}$ de cette onde

$$\tau_0^{(p)}\cong-\frac{K_2+K_3}{K_2/3+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0-K_3}\left(\omega_{i0}^{(p)}\right)^2 \qquad (14.22)$$

Ainsi, la propagation d'une *perturbation transversale polarisée linéairement* dans le réseau cosmologique satisfait une équation d'onde *(14.14)* tout-à-fait conventionnelle à la condition que son amplitude ne soit pas trop forte. Mais elle toujours accompagnée d'une *ondelette longitudinale* qui se propage dans la même direction et à la même vitesse que la perturbation transversale. La fréquence de cette ondelette longitudinale est le double de la fréquence ω de la perturbation transversale, et son amplitude est proportionnelle au carré de l'amplitude des perturbations transversales. On notera aussi que la célérité de propagation de la perturbation transversale dépend fortement de l'expansion volumique τ_0 de fond du réseau comme le montre la relation *(14.16).*

De la nécessité d'introduire une polarisation circulaire pour obtenir un mode de propagation transversal pur

Supposons maintenant qu'on couple à l'onde de rotation précédente polarisée selon l'axe $\boldsymbol{O}x_i$ une onde de rotation polarisée selon l'axe $\boldsymbol{O}x_k$, mais déphasée de $\pm\pi/2$ et de même amplitude, donc que

$$\vec{\omega}(x_j,t)=\omega_{i0}^{(p)}\exp\left[i\left(k_t x_j-\omega t\right)\right]\vec{e}_i\pm i\omega_{i0}^{(p)}\exp\left[i\left(k_t x_j-\omega t\right)\right]\vec{e}_k \qquad (14.23)$$

On dit qu'une telle onde présente une *polarisation circulaire, droite ou gauche* suivant le signe $\pm$, donc une *hélicité positive ou négative*. En ce cas, il est intéressant de voir ce que deviennent les ondelettes longitudinales. Reprenons le terme de couplage apparaissant dans (14.18) et calculons sa valeur. On obtient

$$\omega_i^{(p)}\frac{\partial\omega_i^{(p)}}{\partial x_j}+\omega_k^{(p)}\frac{\partial\omega_k^{(p)}}{\partial x_j}=\left\{\begin{matrix}+ik_t\left(\omega_{i0}^{(p)}\right)^2\exp\left[i2\left(k_t x_j-\omega t\right)\right]\\-ik_t\left(\omega_{i0}^{(p)}\right)^2\exp\left[i2\left(k_t x_j-\omega t\right)\right]\end{matrix}\right\}=0 \qquad (14.24)$$

On en déduit que *les ondes transversales polarisées circulairement sont pures*, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas couplées à des ondelettes longitudinales.

14.2 – Propagation d'ondes longitudinales

Dans le réseau cosmologique, initialement homogène en l'expansion volumique $(\tau=\tau_0)$ et non cisaillé, satisfaisant les hypothèses *(14.11),* on introduit une *perturbation* dans un référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ sous la forme d'un champ de vitesse $\vec{\phi}=\vec{\phi}^{(p)}=\phi_j^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_j$ parallèle à l'axe $\boldsymbol{O}x_j$ et variant le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_j$. En présence de cette perturbation longitudinale, il n'existe

pas de termes de couplage dans l'équation *(14.3)* qui pourrait faire apparaître une perturbation transversale $\phi_k^{(p)}(x_j,t)\vec{e}_k$, de sorte que les équations qui régissent une perturbation purement longitudinale sont l'équation *(14.8),* dans laquelle on fait disparaître les termes dépendants de $\omega_i^{(p)}$, et l'équation *(14.17)*

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_j^{(p)}}{dt} = \dfrac{1}{mn_0}\,\mathrm{e}^{\,\tau_0+\tau^{(p)}}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\dfrac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right)\tau^{(p)}+\left(K_1+\dfrac{2}{3}K_2\right)(\tau^{(p)})^2\right] \\ \dfrac{d\tau^{(p)}}{dt} = \dfrac{\partial\phi_j^{(p)}}{\partial x_j} \end{cases} \qquad (14.25)$$

Le fait que ce système d'équations est non-linéaire en les variables $\phi_j^{(p)}$ et $\tau^{(p)}$ implique que la propagation d'ondes longitudinales dans le réseau parfait est un processus complexe qui, de plus, dépend fortement de l'état d'expansion de fond τ_0 du réseau. On peut donc émettre l'hypothèse que les perturbations $\tau^{(p)}$ soient suffisamment faibles, ce qui permet de négliger les termes de second ordre en les perturbations apparaissant directement dans ces équations et indirectement via les dérivées particulaires. En ce cas, les faibles perturbations $\tau^{(p)}$ doivent obéir à l'équation différentielle linéarisée de second ordre suivante

$$\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong \frac{1}{mn}\left[\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right]\Delta\tau^{(p)} \qquad (14.26)$$

On en déduit immédiatement que des ondes longitudinales n'existent dans le réseau cosmologique que si le crochet dans l'équation précédente est positif. En ce cas, pour de très faibles amplitudes, les ondes longitudinales se propagent à la vitesse de phase suivante

$$c_l \cong \sqrt{\frac{1}{mn}\left[\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right]} = \mathrm{e}^{\tau_0/2}\sqrt{\frac{1}{mn_0}\left[\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right]} \qquad (14.27)$$

Pour de plus fortes amplitudes des perturbations, on ne peut plus linéariser les équations différentielles*,* de sorte que les ondes longitudinales deviennent alors fortement non-linéaires et dépendent fortement de l'amplitude des perturbations $\tau^{(p)}$.

14.3 – Mode de vibrations longitudinales localisées

Dans le réseau cosmologique, si la vitesse de phase des ondes longitudinales devient un nombre imaginaire, *il n'existe plus de propagation d'ondes longitudinales*. En ce cas, on peut réécrire la solution complexe des perturbations sous la forme

$$\underline{\tau}^{(p)} = \tau_0^{(p)}\exp\left[-\,x_j/\delta\right]\exp\left[-i\omega t\right] \quad \text{si} \quad 4K_2/3+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0<0 \qquad (14.28)$$

dans laquelle *la portée spatiale* δ *des perturbations* est donnée par

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{mn}\left|\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right|} = \frac{\mathrm{e}^{\tau_0/2}}{\omega}\sqrt{\frac{1}{mn_0}\left|\frac{4}{3}K_2+2K_1\left(1+\tau_0\right)-K_0\right|} \qquad (14.29)$$

Il survient ici un phénomène très étonnant, à savoir l'apparition de *modes propres localisés de vibrations longitudinales,* qui ne se propagent pas à grande distance, mais qui sont au contraire confinés sur des distances de l'ordre de δ. Pour de fortes amplitudes des ces modes localisés

de perturbations longitudinales, ceux-ci deviendront non-linéaires et dépendront donc fortement de l'amplitude des perturbations $\tau^{(p)}$.

14.4 – Analogies avec la gravitation d'Einstein et la physique quantique

Les diverses propriétés d'un *réseau cosmologique* introduites dans le chapitre précédent et celui-ci sont reportées dans le tableau 14.2. Elles peuvent être comparées aux propriétés similaires qu'on obtient dans un *solide parfait isotrope* usuel, qui sont quant à elles reportées dans le tableau 14.1.
La comparaison de ces deux tableaux est assez éloquente, surtout au niveau de la célérité de propagation des ondes dans ces deux réseaux. En effet, la propagation des ondes transversales est invariante (indépendante de l'expansion τ du réseau) dans le *solide parfait* usuel alors qu'elle dépend indirectement de l'expansion volumique locale τ dans le *réseau cosmologique*, via la présence de la densité de sites n dans l'expression de la célérité c_t. De même en va-t-il d'ailleurs avec la célérité des onde longitudinales, quoiqu'il existe en plus une dépendance de leur célérité via un terme multiplicatif des modules k_1 et K_1.

De l'analogie avec l'hélicité des photons

Une autre différence essentielle entre les deux types de réseaux réside dans le fait que les ondes transversales polarisées linéairement sont parfaitement pures et invariantes dans le solide parfait usuel alors qu'elles sont forcément couplées à des ondelettes longitudinales dans le réseau cosmologique. Dans le cas du réseau cosmologique, les seules ondes transversales qui soient pures, non couplées à des ondelettes longitudinales, sont alors les ondes de rotation à polarisation circulaire droite ou gauche, c'est-à-dire des ondes transversales d'hélicité positive ou négative. Etrangement, on retrouve déjà là une propriété propre aux photons de l'Univers réel, à savoir que les photons sont obligatoirement d'hélicité non nulle! Comme les photons sont des objets quantiques, on retrouve là une particularité étonnante sur laquelle on reviendra.
Le *réseau cosmologique* introduit dans le chapitre précédent est, comme nous l'avons déjà dit, un réseau *purement imaginaire,* au sens qu'il est difficile de lui trouver une correspondance avec un solide réel existant. Mais ce réseau devient très intéressant pour rediscuter plus à fond des analogies qui sont déjà apparues entre la théorie eulérienne des déformations et les autres théories de la physique, comme par exemple les analogies avec les équations de Maxwell (tableau 12.1) ou avec l'équation d'Einstein $E_0^{vis} = M_0^{vis} c_t^2$ dans le cas des dislocations vis (section 12.3). En fait, le réseau cosmologique va nous servir essentiellement à poursuivre plus avant notre recherche d'analogies avec les grandes théories de la physique et à émettre différentes conjectures pour affiner ces analogies.

De l'analogie avec l'absence d'ondes longitudinales dans la gravitation d'Einstein

L'existence de domaines d'expansion volumique du réseau cosmologique dans lesquels la propagation d'ondes longitudinales n'est pas possible pour $4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0 < 0$ correspond bien par analogie avec le fait qu'il n'existe pas de propagation d'ondes longitudinales dans la théorie de la Relativité Générale d'Einstein. En effet, dans cette dernière, les ondes

gravitationnelles sont des ondes transverses, définies comme la propagation de perturbations de la métrique espace-temps. Ces ondes ont une symétrie tensorielle, avec deux polarisations indépendantes perpendiculaires à la direction de propagation, au contraire des perturbations longitudinales qui ont une symétrie scalaire.

La condition $4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0<0$ pour qu'il n'existe pas d'ondes longitudinales implique l'existence d'une *expansion critique* τ_{0cr} *de fond du réseau*, limite entre les domaines d'expansion où il existe et où il n'existe pas d'ondes longitudinales. D'où la conjecture suivante, qui admet évidemment l'existence des ondes transversales pures de polarisation circulaire

Conjecture 1: *pour que le «réseau cosmologique» présente des analogies avec la Gravitation Générale d'Einstein, avec l'électromagnétisme et avec les photons de la physique quantique, il faut que:*

- $\exists$ *des ondes transversales pures de polarisation circulaire* $\Leftrightarrow K_2+K_3>0$
- $\nexists$ *d'ondes longitudinales* $\Leftrightarrow \begin{cases} \tau_0<\tau_{0cr}=\dfrac{K_0}{2K_1}-\dfrac{2K_2}{3K_1}-1 & (K_1>0) \\ \tau_0>\tau_{0cr}=\dfrac{K_0}{2K_1}-\dfrac{2K_2}{3K_1}-1 & (K_1<0) \end{cases}$ *(14.30)*

Cette conjecture implique que c'est dans les domaines où l'expansion volumique τ_0 et les modules sont tels que les relations *(14.30)* sont satisfaites qu'on a des chances de trouver à la fois des analogies avec la Relativité Générale, avec l'électromagnétisme et avec les photons de la physique quantique.

De l'analogie avec la gravitation quantique et les fluctuations quantiques du vide

En l'absence d'ondes longitudinales, le réseau cosmologique présente des modes propres localisés de perturbations longitudinales, donc de vibrations locales du scalaire d'expansion volumique τ. De tels modes font immédiatement penser aux idées de fluctuations quantiques de la gravitation à très faible échelle puisqu'ils affectent le scalaire τ qui présente indéniablement un lien avec le champ de gravitation. Mais ces perturbations localisées du scalaire d'expansion volumique font aussi penser aux fluctuations quantiques du vide décrites par la physique quantique. On peut dès lors, sur la base de cette analogie entre τ et le champ de gravitation, se poser la question suivante: «est-ce la gravité qu'il faut quantifier à très petite échelle, ou est-ce plutôt la gravitation qui est, à très petite échelle, responsable de la physique quantique?» On tentera d'apporter dans la suite quelques éléments de réponse à cette question d'actualité des plus pertinentes.

Tableau 14.1 - Ondes et vibrations propres dans un solide parfait

Fonction et équations d'état

$$f^{él} = -k_0\tau + k_1\tau^2 + k_2\sum_i (\vec{\alpha}_i^{\,él})^2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p = -n\dfrac{\partial f^{él}}{\partial \tau} = nk_0 - 2nk_1\tau \\ \vec{s}_i = n\dfrac{\partial f^{él}}{\partial \alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2nk_2\,\vec{\alpha}_i^{\,él} \end{cases}$$

Equation de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -2k_2\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + \left[\frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau) + k_0\right]\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau \underbrace{- 2k_2\sum_k \left(\vec{e}_k\overrightarrow{\text{grad}}\,\tau\right)\vec{\alpha}_k^{\,él}}_{\text{couplage entre } \vec{\alpha}_k^{\,él} \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}}\,\tau} + 2k_2\vec{\lambda}$$

Propagation d'ondes transversales pures «invariantes»

$$\omega_i^{(p)}(x_j,t) \cong \omega_{i0}^{(p)}\exp\left[i\left(k_t x_j - \omega t\right)\right]$$

$$c_t = \frac{\omega}{k_t} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Propagation d'ondes longitudinales pures

$$\underline{\tau}^{(p)} = \tau_0^{(p)}\exp\left[i\left(k_l x_j - \omega t\right)\right] \quad \textit{si} \quad \frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau_0) + k_0 > 0$$

$$c_l \cong \frac{\omega}{k_l} \cong \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau_0) + k_0\right]}$$

Modes de vibrations propres longitudinales localisées

$$\underline{\tau}^{(p)} = \tau_0^{(p)}\exp\left[-\,x_j/\delta\right]\exp\left[-i\omega t\right] \quad \textit{si} \quad \frac{4}{3}k_2 + 2k_1(1-\tau_0) + k_0 < 0$$

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{m}\left|4k_2/3 + 2k_1(1-\tau_0) + k_0\right|}$$

Tableau 14.2 - Ondes et vibrations propres dans le réseau cosmologique

Fonction et équations d'état

$$F^{déf} = -K_0\tau + K_1\tau^2 + K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,él})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{\,él})^2 + K_1^{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,an})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{\,an})^2 \;\Rightarrow\; f^{déf} = \frac{F^{déf}}{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = -n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial\tau} = K_0 - 2K_1\tau - F^{déf} \\ \vec{s}_i = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial\alpha_{ik}^{él}}\vec{e}_k = 2K_2\,\vec{\alpha}_i^{\,él} \\ \vec{m} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial\omega_i^{él}}\vec{e}_i = 4K_3\,\vec{\omega}^{\,él} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{s}_i^{\,cons} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial\alpha_{ik}^{an}}\vec{e}_k = 2K_1^{an}\,\vec{\alpha}_i^{\,an} \\ \vec{m}^{cons} = n\dfrac{\partial f^{déf}}{\partial\omega_i^{an}}\vec{e}_i = 4K_2^{an}\,\vec{\omega}_i^{\,an} \end{cases}$$

Equation de Newton

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = -2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{\,él} + \left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau + 2K_2\,\vec{\lambda} + nm\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt}$$

$$+\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{\left(K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,él})^2 + K_1^{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\,an})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{\,él})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{\,an})^2 + K_1\tau^2 - K_0\tau\right)}_{F^{déf}}$$

Propagation d'ondes transversales couplées à des ondelettes longitudinales

$$\begin{cases} \omega_i^{(p)}(x_j,t) \cong \omega_{i0}{}^{(p)}\exp\left[i\left(k_t x_j - \omega t\right)\right] \\ \tau^{(p)}(x_j,t) \cong \tau_0{}^{(p)}\exp\left[i\left(2k_t x_j - 2\omega t\right)\right] \end{cases}$$

$$c_t \cong \sqrt{\frac{K_2+K_3}{mn}} = \mathrm{e}^{\tau_0/2}\sqrt{\frac{K_2+K_3}{mn_0}} \quad \textit{et}$$

$$\tau_0^{(p)} \cong -\frac{K_2+K_3}{K_2/3 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0 - K_3}\left(\omega_{i0}^{(p)}\right)^2$$

Propagation d'ondes longitudinales pures

$$\underline{\tau}^{(p)} = \tau_0^{(p)}\exp\left[i\left(k_l x_j - \omega t\right)\right] \quad \textbf{\textit{si}} \quad 4K_2/3 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0 > 0$$

$$c_l \cong \sqrt{\frac{1}{mn}\left[\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right]} = \mathrm{e}^{\tau_0/2}\sqrt{\frac{1}{mn_0}\left[\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right]}$$

Modes de vibrations propres longitudinales localisées

$$\underline{\tau}^{(p)} = \tau_0^{(p)}\exp\left[-\,x_j/\delta\right]\exp\left[-i\omega t\right] \quad \textbf{\textit{si}} \quad 4K_2/3 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0 < 0$$

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{mn}\left|\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right|} = \frac{\mathrm{e}^{\tau_0/2}}{\omega}\sqrt{\frac{1}{mn_0}\left|\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right|}$$

Chapitre 15

Courbure des rayons d'ondes par une singularité de l'expansion et trous noirs

Parmi les comportements surprenants que peut présenter un réseau cosmologique en ce qui concerne la propagation d'ondes, il y a *la courbure des rayons de propagation d'ondes par un gradient d'expansion volumiqu*e dû à la présence d'une singularité topologique forte de l'expansion τ. Cette courbure peut aller jusqu'à la formation de «*trous noirs»* absorbant toutes les ondes passant dans sa proximité, ou de *«trous blancs»* impénétrables, repoussant toutes les ondes passant en sa proximité.

15.1 – Courbure non-dispersive des rayons d'onde

Dans le réseau cosmologique, la présence d'un gradient non nul de l'expansion volumique va entraîner une courbure non-dispersive des rayons de propagation d'ondes qu'on va calculer.

La courbure des ondes en présence d'une singularité de l'expansion volumique

Le fait que les vitesses de phase des ondes transversales *(14.16)* et longitudinales *(14.25)* augmentent non-linéairement avec la valeur de l'expansion volumique statique τ via la valeur de la densité de sites n va entraîner une courbure des rayons de propagation de ces ondes si celles-ci passent dans le voisinage direct d'une singularité d'expansion volumique au sein du réseau, comme illustré dans la figure 15.1.

En effet, imaginons un réseau cosmologique immobile dans le référentiel absolu de l'observateur ***GO*** et contenant une singularité d'expansion volumique de symétrie sphérique située au centre du système de coordonnées $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Considérons aussi une onde longitudinale ou transversale, initialement plane, arrivant vers cette singularité selon l'axe $O\xi_1$. La vitesse de propagation augmente ou diminue en s'approchant de la singularité, sous l'effet de la densité $n = n_0\,\mathrm{e}^{-\tau}$. Suivant que la singularité de τ est «positive» (τ passe par un maximum à l'origine) ou «négative» (τ passe par un minimum à l'origine), il va apparaître une courbure des rayons de propagation des ondes, de telle sorte que l'onde semble repoussée par une «singularité positive», ou attirée par une «singularité négative».

Ce phénomène ne dépend pas de la forme du champ autour de la singularité, mais uniquement de son gradient. Pour une onde plane incidente sur la singularité, ce phénomène d'accélération ou de freinage de l'onde entraînera alors une déformation des plans d'onde similaire à l'effet d'une lentille divergente dans le cas d'une «singularité positive» ou d'une lentille convergente dans le cas d'une «singularité négative». De plus, comme ce phénomène ne dépend pas de la fréquence de l'onde, la singularité se comporte comme une lentille convergente ou divergente *de nature non-dispersive* dans le réseau cosmologique.

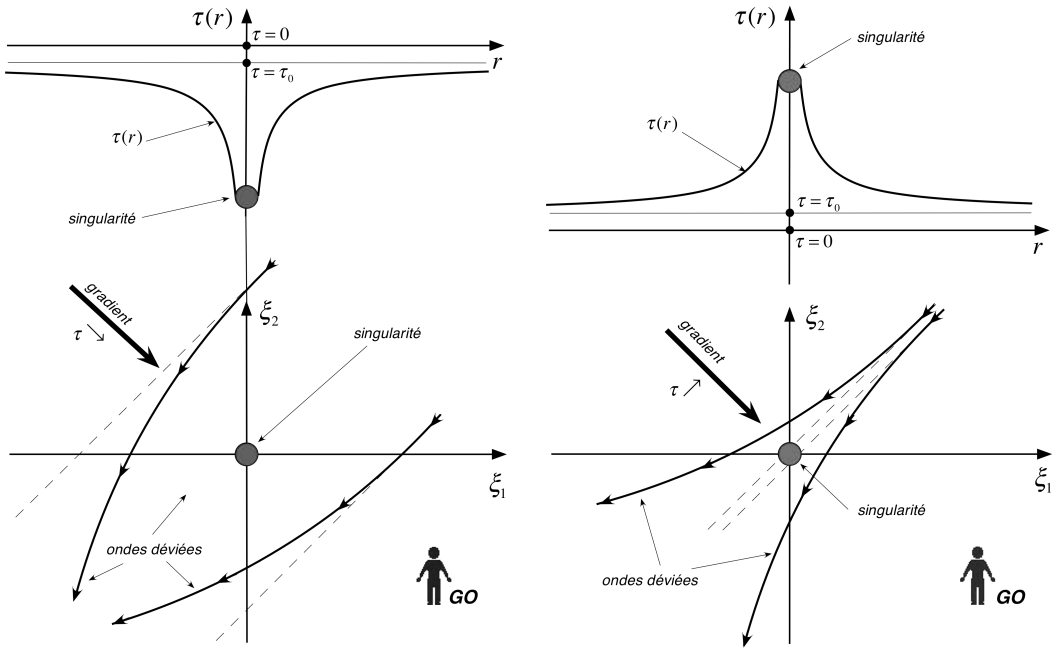


Figure 15.1 *- courbure des rayons d'onde au voisinage d'une singularité de l'expansion volumique τ de symétrie sphérique*

15.2 – Sphère de perturbations et «trous noirs»

Imaginons maintenant que, dans un réseau cosmologique immobile dans le référentiel absolu de l'observateur ***GO***, et contenant une *«singularité négative»* de l'expansion volumique $\tau(r)$, de symétrie sphérique, située au centre du système de coordonnées $\boldsymbol{O}\xi_1\xi_2\xi_3$, il passe une onde transversale *(*$c_i = c_t$*)* ou longitudinale *(*$c_i = c_l$*)* au voisinage de la singularité, à une distance $r = r_{cr}$ de l'origine de la singularité telle que la relation suivante soit satisfaite

$$\frac{c_i(r_{cr} + dr)}{c_i(r_{cr})} = \frac{r_{cr} + dr}{r_{cr}} \qquad (15.1)$$

En ce cas, les plans d'onde situés au voisinage de r_{cr} seront toujours parallèle à une ligne passant par l'origine, de sorte que le rayon de l'onde transversale ou longitudinale située en $r = r_{cr}$ est en fait une cercle centré sur l'origine!

La condition *(15.1)* peut être explicitée. En effet, il est facile de montrer que cette condition entraîne que, en $r = r_{cr}$, on a

$$\left.\frac{\partial c_i}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{c_i(r_{cr})}{r_{cr}} \qquad (15.2)$$

Ainsi, si une onde transversale ou longitudinale passe à une distance $r \le r_{cr}$ satisfaisant cette relation, il devient impossible que celle-ci puisse s'échapper de la sphère virtuelle de rayon r_{cr}. Si le champ de la singularité présente un gradient monotone croissant depuis son origine, la courbure des rayons d'ondes situés à l'intérieur de cette sphère critique sera encore accentuée, de sorte que toutes ces ondes seront définitivement piégées par la singularité. Par analogie avec la *«sphère de photons»* entourant un *trou noir* en relativité générale, on appellera *«sphère*

des perturbations transversales et longitudinales» la couche située à une distance $r = r_{cr}$ du coeur de la singularité. Il est clair que l'existence d'une telle *sphère de perturbations* est soumise à la condition que celle-ci se situe en-dehors de *l'«objet»* responsable de la singularité négative du champ d'expansion. Si le rayon de cet *«objet»* est R, avec la vitesse des ondes transversales données par *(14.16)* ou des ondes longitudinales données par *(14.25)*, on déduit les conditions d'existence d'un *«trou noir»* à l'aide de *(15.2)*

Conditions d'existence d'un «trou noir»: $$\left.\frac{\partial\tau(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad et \quad r_{cr} > R \tag{15.3}$$

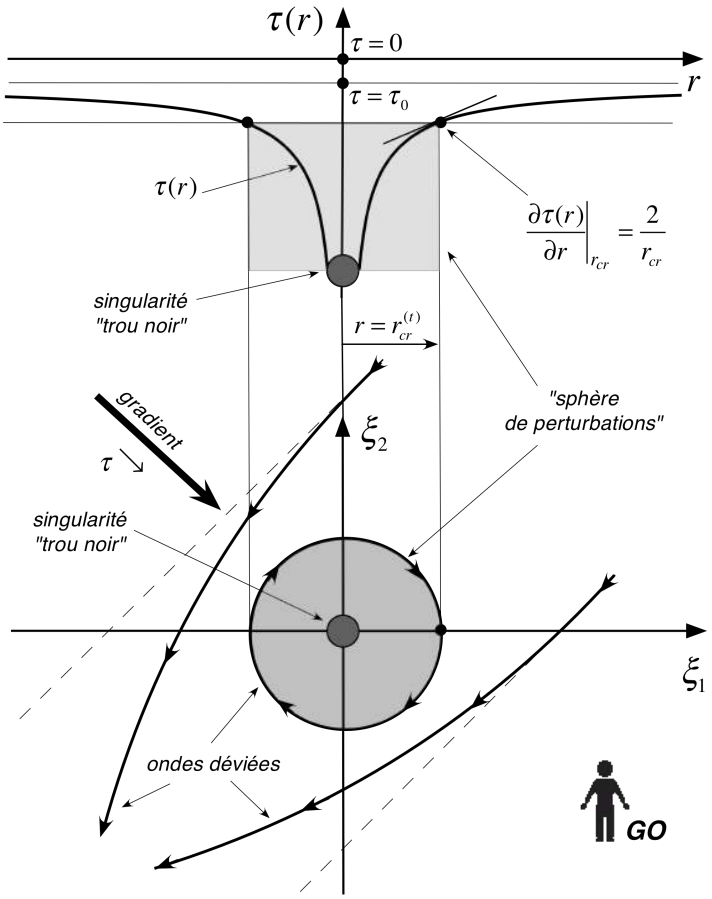


Figure 15.2 *- «sphère de perturbations» au voisinage d'une singularité négative de* τ

Nous avons vu à la section précédente que la propagation d'ondes longitudinales dans le réseau parfait est soumise à la condition que l'expression $4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0$ soit positive. Cette condition prend la forme d'une condition sur l'expansion volumique de fond τ_0 du réseau, qui doit être plus grande ou plus petite qu'une valeur critique τ_{0cr} donnée par

$$\begin{cases} K_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 > \tau_{0cr} = \dfrac{K_0}{2K_1} - \dfrac{2K_2}{3K_1} - 1 \\ K_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 < \tau_{0cr} = -\dfrac{K_0}{2|K_1|} + \dfrac{3K_2}{3|K_1|} - 1 \end{cases} \tag{15.4}$$

Si la propagation d'ondes longitudinales est possible dans le réseau, c'est-à-dire si ces relations sont satisfaites, alors les ondes longitudinales subiront aussi le phénomène de piégeage à la limite $r = r_{cr}$.
Dans le cas où $K_1 > 0$, il intervient encore un autre phénomène. En effet, si la singularité présente un gradient monotone croissant depuis son origine, il pourrait exister un rayon $r = r_{cr2}^{(l)} < r_{cr}$ l'entourant au-delà duquel la valeur de $\tau(\vec{r})$ devient inférieur à τ_{0cr} , de sorte que toute onde longitudinale piégée initialement à la limite $r = r_{cr}$, atteindra ensuite cette deuxième limite $r = r_{cr2}^{(l)} < r_{cr}$ au-delà de laquelle elle ne pourra même plus se propager, mais viendra accroître des modes propres de vibrations longitudinales localisés à l'intérieur de ce volume.
Dans le cas où $K_1 < 0$, ce même phénomène n'existe pas puisque l'existence d'une propagation implique que $\tau(r) < \tau_0 < \tau_{0cr}$ en ce cas.

15.3 – Analogies avec la gravitation d'Einstein

Le réseau cosmologique présente une analogie très intéressante avec la théorie de la Gravitation Générale d'Einstein puisque qu'on peut y trouver, au voisinage de singularités de l'expansion volumique, des *sphères de perturbations* très similaires à la *sphère de photons* entourant un *trou noir*. On déduit donc de cet *effet non-dispersif de courbure des rayons par les gradients de l'expansion volumique* que *le scalaire d'expansion volumique a assurément une relation analogique forte avec le champ de gravitation* en Relativité Générale.

De l'analogie avec les trous noirs de la Relativité Générale

Il est intéressant aussi de constater que seule une singularité négative de τ possède cette propriété similaire à celle d'un *«trou noir»*, captant toutes les ondes passant dans sa proximité, alors qu'une singularité positive de τ se comporterait comme un *«trou blanc»*, c'est-à-dire comme une entité qui repousserait les ondes, et qui ne pourrait donc pas être pénétrée par des ondes. D'où la conjecture suivante pour notre analogie avec la Gravitation

Conjecture 2: *les singularités usuelles du champ d'expansion devraient être «négatives» pour correspondre au champs de gravitation usuels* *(15.5)*

Il est tout-à-fait remarquable de constater que la courbure des ondes par un gradient d'expansion volumique et l'existence d'une sphère de perturbations autour d'une singularité localisée d'expansion volumique sont exclusivement dues au développement de l'énergie libre *par unité de volume* que nous avons utilisé pour le réseau cosmologique. En effet, si on regarde de plus près ce qui se passe dans le cas du *solide parfait* usuel, pour lequel c'est l'énergie libre *par site de réseau* qui est développée, on constate que la célérité des ondes transversales est «invariante» quelle que soit l'état d'expansion du réseau, ce qui ne peut pas conduire à une courbure non dispersive des rayons d'onde en présence d'un gradient d'expansion volumique, ni à l'apparition d'une sphère de perturbations en présence d'une singularité localisée d'expansion volumique. Cette analogie justifie donc *à fortiori* la *conjecture 0 (13.5)* que nous avions posée à la section 13.2, puisqu'une telle analogie ne peut pas apparaître avec un *solide parfait* usuel.

Chapitre 16

Evolutions «cosmologiques» d'une sphère finie de réseau parfait

En considérant une sphère imaginaire finie d'un *solide parfait* ou d'un *réseau cosmologique*, on peut introduire le concept d'«*évolution cosmologique*» du réseau, en supposant qu'on lui injecte une certaine quantité d'énergie cinétique. En ce cas, le réseau présente de fortes variations temporelles de son expansion volumique, qu'on peut modéliser de façon très simpliste en supposant que l'expansion volumique reste parfaitement homogène dans tout le réseau au cours de son évolution.

16.1 – Comportement «cosmologique» d'un solide fini

Imaginons que, dans le référentiel absolu $\boldsymbol{O\xi_1\xi_2\xi_3}$, le ***GO*** observe un solide, de forme sphérique, de rayon R_U, constitué d'un réseau de N mailles (figure 16.1), et que ce solide possède une expansion volumique homogène de fond qui dépend du temps, sous la forme

$$\tau(t) = \tau_0(t) \neq \tau_0(\vec{\xi}, t) \qquad (16.1)$$

En ce cas, le ***GO*** observera que le rayon R_U de cette sphère solide dépend du temps

$$R_U = R_U(t) \qquad (16.2)$$

et donc que cette sphère aura tendance à se dilater ou se contracter. Ce comportement, que l'on pourrait qualifier de *«cosmologique»* par analogie aux *théories cosmologiques d'expansion de l'Univers*, implique forcément que l'énergie totale $\boldsymbol{E}$ du solide, composée de l'énergie élastique $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ d'expansion et de l'énergie cinétique $\boldsymbol{T}(\tau)$ d'expansion, est une constante.

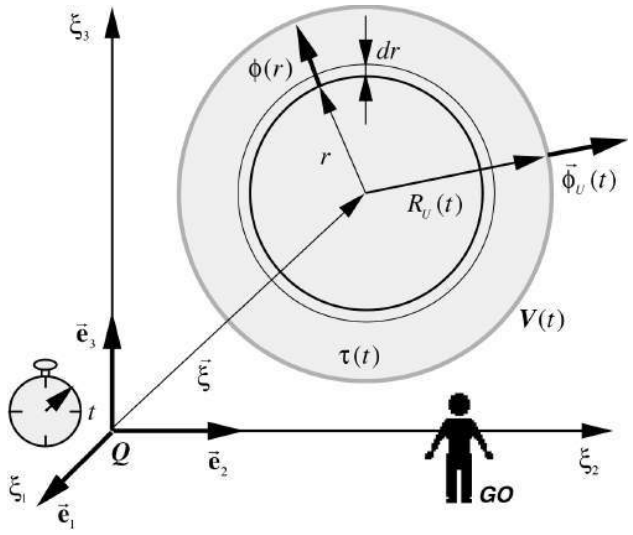


Figure 16.1 *- expansion volumique «cosmologique»* $\tau(t)$ *d'un solide imaginaire*

L'énergie cinétique totale $\boldsymbol{T}$ d'expansion volumique est forcément liée à la vitesse d'expansion, qu'on peut caractériser par la vitesse $\vec{\phi}_U(t)$ de la surface de la sphère (figure 16.1). L'énergie cinétique $\boldsymbol{T}$ peut alors s'obtenir en intégrant sur toute la sphère l'énergie cinétique des sites de réseau situés dans une calotte sphérique de rayon r et d'épaisseur dr. La vitesse d'expansion dans la calotte sphérique est simplement donnée par

$$\phi(r) = \phi_U \frac{r}{R_U} \tag{16.3}$$

puisque l'expansion volumique τ a été supposée homogène. En utilisant le fait que la densité de mailles n est donnée par

$$n = n_0 \, \mathrm{e}^{-\tau} = \frac{N}{V_U} = \frac{3N}{4\pi R_U^3} \tag{16.4}$$

il vient pour l'énergie cinétique

$$\boldsymbol{T} = \int_0^{R_U} \frac{1}{2} mn\phi^2(r) 4\pi r^2 dr = \frac{3Nm\phi_U^2}{2R_U^5} \int_0^{R_U} r^4 \, dr = \frac{3}{10} Nm\phi_U^2 \tag{16.5}$$

On en déduit donc que la vitesse d'expansion ϕ_U est proportionnelle à $\sqrt{\boldsymbol{T}} = \sqrt{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}^{él}}$

$$\phi_U(\tau) = \sqrt{\frac{10}{3Nm}\boldsymbol{T}(\tau)} = \sqrt{\frac{10}{3Nm}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}^{él}(\tau)\right)} \tag{16.6}$$

On en déduit aussi que

$$\frac{d\phi_U(\tau)}{d\tau} = -\frac{5}{3Nm} \frac{d\boldsymbol{F}^{él}(\tau)/d\tau}{\phi_U(\tau)} \tag{16.7}$$

et que, par conséquent, la dérivé $d\phi_U / d\tau$ tend vers $\pm\infty$ si ϕ_U tend vers zéro lorsque $d\boldsymbol{F}^{él} / d\tau$ est fini et non nul. Examinons alors le comportement «cosmologique» des solides parfaits usuels et des réseaux cosmologiques que nous avons précédemment définis.

16.2 – Evolutions cosmologiques d'un solide parfait

L'évolution cosmologique d'un solide parfait avec $k_0 = 0$ et $k_1 > 0$

Pour simplifier le problème, émettons l'hypothèse qu'il n'existe pas de cisaillements, ce qui est parfaitement plausible puisque l'expansion volumique est supposée homogène, de sorte que, pour un solide parfait, on peut calculer l'énergie $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ en fonction de l'expansion τ à partir de la relation *(13.1)*

$$\boldsymbol{F}^{él} = Nf^{él} = \underbrace{-Nk_0\tau}_{k_0=0} + Nk_1\tau^2 + \underbrace{Nk_2 \sum_i (\vec{\alpha}_i^{él})^2}_{\vec{\alpha}_i^{él}=0} = Nk_1\tau^2 \tag{16.8}$$

Si aucun phénomène ne vient dissiper l'énergie totale $\boldsymbol{E}$, par exemple sous forme de chaleur, l'énergie $\boldsymbol{E}$ sera une grandeur conservée.

Si le module k_1 du solide parfait imaginaire est positif, celui-ci ne pourra alors qu'osciller indéfiniment entre un état d'expansion volumique minimum $\tau_{\min}$ et un état d'expansion volumique maximum $\tau_{\max}$, comme illustré à la figure 16.2.

Si on reporte dans les diagrammes $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ et $\vec{\phi}_U(\tau)$, la valeur critique $\tau_{0cr} = 1 + 2k_2 / 3k_1 > 1$

de τ_0 au-dessus de laquelle il existe des ondes longitudinales dans le réseau parfait usuel, on constate qu'au cours de son *«évolution cosmologique»*, le solide passera alternativement d'un domaine ($\tau \leq \tau_{0cr}$) où il coexiste des ondes transversales et longitudinales, à un autre domaine ($\tau \geq \tau_{0cr}$) où il n'existe que des ondes transversales et des modes de vibrations longitudinales localisés.

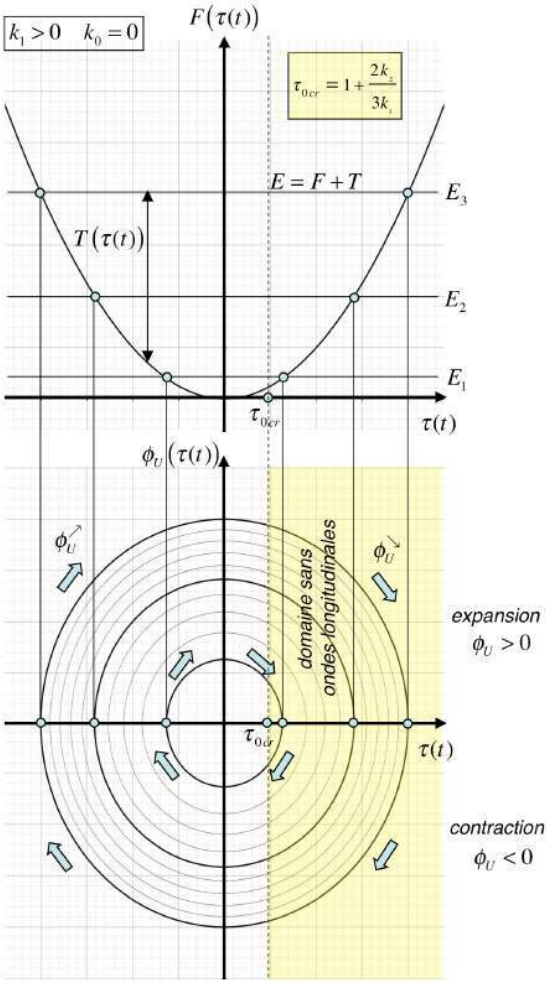


Figure 16.2 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique* $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ *d'expansion et de la vitesse* $\vec{\phi}_U(\tau)$ *d'expansion d'un solide parfait imaginaire avec* $k_1 > 0$

L'évolution cosmologique d'un solide parfait avec $k_0 = 0$ ***et*** $k_1 < 0$

Pour un solide parfait imaginaire dont le module k_1 *serait négatif,* suivant la valeur de l'énergie totale $\boldsymbol{E}$, ce solide pourrait avoir plusieurs *«comportement cosmologiques»* différents comme l'illustre bien la figure 16.3:

- si $\boldsymbol{E} \leq 0$, il peut se contracter et s'expanser en un mouvement de va et vient entre $\tau \to -\infty$ et τ_1 ou s'expanser indéfiniment à partir de τ_2. A noter qu'il est difficile d'imaginer un solide qui évoluerait en se contractant depuis $\tau = \infty$, raison pour laquelle ces comportements sont reportés dans une zone grisée!
- si $\boldsymbol{E} \geq 0$, il peut se dilater indéfiniment à partir de $\tau \to -\infty$.

En ce cas aussi, les ondes longitudinales disparaissent dès que $\tau \geq \tau_{0cr} = 1 - 2k_2 / 3|k_1| < 1$.

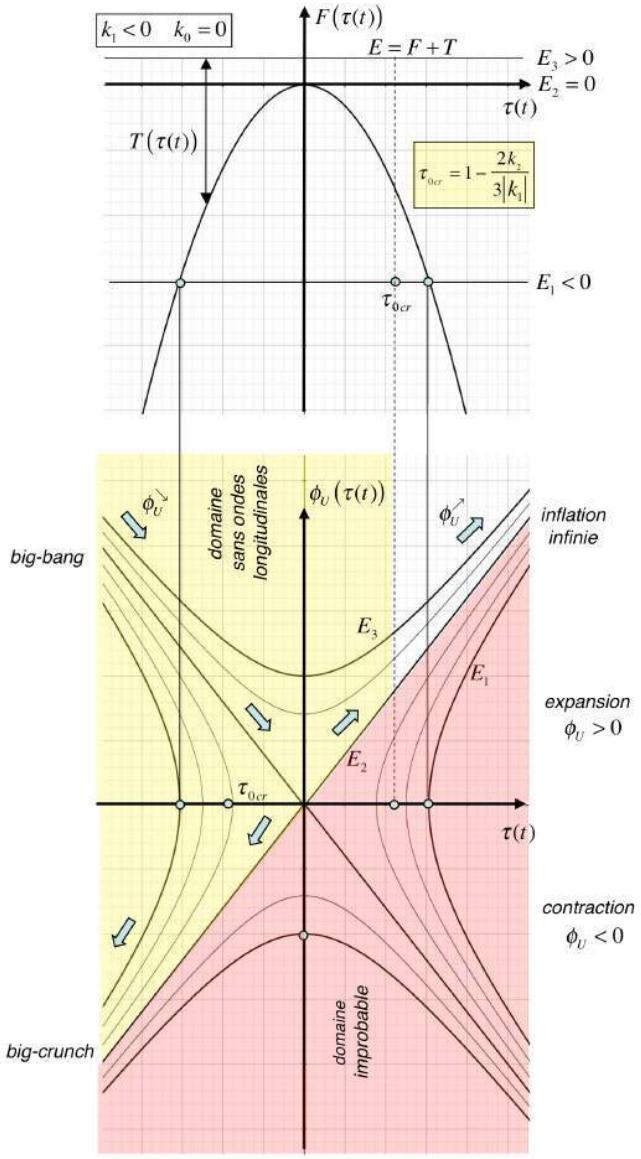


Figure 16.3 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique* $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ *d'expansion et de la vitesse* $\vec{\phi}_U(\tau)$ *d'expansion d'un solide parfait imaginaire avec* $k_1 < 0$

De l'analogie avec l'évolution cosmologique de notre Univers

Les différents *«comportements cosmologiques»* déduits pour un *solide parfait* imaginaire peuvent être comparés avec le comportement cosmologique qui est attribué à l'heure actuelle à notre Univers réel. En effet, dans le cas de l'Univers réel, on a un système qui ne présente pas d'ondes longitudinales, comme le montre la théorie de la relativité générale, et qui poursuit, à la lumière des dernières observations, une évolution cosmologique en plusieurs stades: un *«big-bang»* à partir d'une singularité d'espace-temps, suivi d'une *période d'inflation* très rapide, puis un ralentissement de l'inflation, suivi, d'après des observations très récentes, d'une *expansion*

dont la vitesse semble s'accroître au cours du temps. Ce dernier stade est celui qui correspondrait à l'état actuel de notre Univers.

Parmi les *«comportements cosmologiques»* déduits à partir du *solide parfait*, seul le solide parfait avec $k_1 < 0$ présente quelque analogie avec le comportement cosmologique de l'Univers réel. En effet, le solide parfait avec $k_1 < 0$, dans le cas où E est supérieure à zéro (figure 16.3), parcourt bien les stades de big-bang, d'inflation, de ralentissement de l'inflation et d'expansion à vitesse croissante dans le domaine où il n'existe pas d'ondes longitudinales. Mais pour ce solide, le stade d'expansion à vitesse croissante se poursuit inéluctablement vers $\tau \to +\infty$.

A noter aussi que l'énergie élastique $E^{él}$ contenue dans le réseau solide présente une analogie très intéressante avec le concept *«d'énergie noire»* des astrophysiciens, utilisé pour expliquer l'augmentation de la vitesse d'expansion de l'Univers, puisque c'est cette énergie élastique qui est responsable de l'expansion du solide parfait imaginaire à vitesse croissante via le coefficient $k_1 < 0$ du solide.

16.3 – Evolutions cosmologiques d'un réseau cosmologique

L'évolution cosmologique d'un réseau cosmologique avec $K_0 = 0$ *et* $K_1 > 0$

Imaginons que, dans le référentiel absolu $\boldsymbol{O}\xi_1\xi_2\xi_3$, le ***GO*** observe un *réseau cosmologique* de forme sphérique de rayon R_U, constitué d'un réseau de N mailles (figure 16.1). L'énergie élastique d'expansion $\boldsymbol{F}^{él}$ s'écrit, en utilisant *(13.7)*

$$\boldsymbol{F}^{él} = Nf^{él} = \underbrace{-\frac{NK_0}{n}\tau}_{K_0=0} + \frac{NK_1}{n}\tau^2 + \underbrace{\frac{NK_2}{n}\sum_i (\vec{\alpha}_i^{él})^2}_{\vec{\alpha}_i^{él}=0} + \underbrace{\frac{NK_3}{n}(\vec{\omega}^{él})^2}_{\vec{\omega}^{él}=0} = \frac{NK_1}{n}\tau^2 = \frac{NK_1}{n_0}\tau^2\,\mathrm{e}^{\tau} \qquad (16.9)$$

Pour reporter le comportement de $\boldsymbol{F}^{él}$ en fonction de τ pour ce réseau, il faut rechercher les extrema de $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$

$$\frac{d\boldsymbol{F}^{él}}{d\tau} = \frac{NK_1}{n_0}(2+\tau)\tau\,\mathrm{e}^{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0,\ -2 \ \textit{et}\ -\infty \qquad (16.10)$$

Si le module K_1 *du réseau est positif,* pour $\tau = 0$ et $\tau \to -\infty$, la valeur de $\boldsymbol{F}^{él}$ tend vers deux minima égaux à zéro, alors que pour $\tau = -2$, la valeur de $\boldsymbol{F}^{él}$ passe par un maximum égal à $\boldsymbol{F}^{él}_{max} = 4\,\mathrm{e}^{-2}\,NK_1/n_0 \cong 0{,}54\,NK_1/n_0$. Le graphe de $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ est reporté à la figure 16.4a, et on constate qu'il est très différent de celui obtenu dans le cas du réseau de type I.

Il y a trois modes possibles d'oscillations suivant la valeur de $\boldsymbol{E}$, comme illustré à la figure 16.4:

- si $\boldsymbol{E} \le \boldsymbol{F}^{él}_{max} = 4\,\mathrm{e}^{-2}\,NK_1/n_0$, il y a deux modes d'oscillations possibles, un premier mode entre $\tau \to -\infty$ et $\tau_1 < 0$ et un deuxième mode entre $\tau_2 < 0$ et $\tau_3 > 0$.
- si $\boldsymbol{E} \ge \boldsymbol{F}^{él}_{max} = 4\,\mathrm{e}^{-2}\,NK_1/n_0$, il y a un troisième mode d'oscillations possible, compris entre $\tau \to -\infty$ et $\tau_4 > 0$.

Dans les graphes de la figure 16.4, on peut reporter la limite $\tau_{0cr} = -1 - 2K_2/3K_1 < -1$ tirée de la relation *(14.26)*. Choisissons d'y reporter une valeur de τ_{0cr} voisine de -1, correspondant au cas où $K_1 >> K_2$. On constate à nouveau l'existence de domaines de comportements

différents du solide: un domaine où il coexiste des ondes transversales et longitudinales (pour $\tau \geq \tau_{0cr}$) et un domaine où il n'existe que des ondes transversales et des modes de vibrations longitudinales localisés (pour $\tau \leq \tau_{0cr}$). Mais contrairement au *solide parfait*, dans le *réseau cosmologique*, la position de ces domaines est inversée le long de l'axe τ !

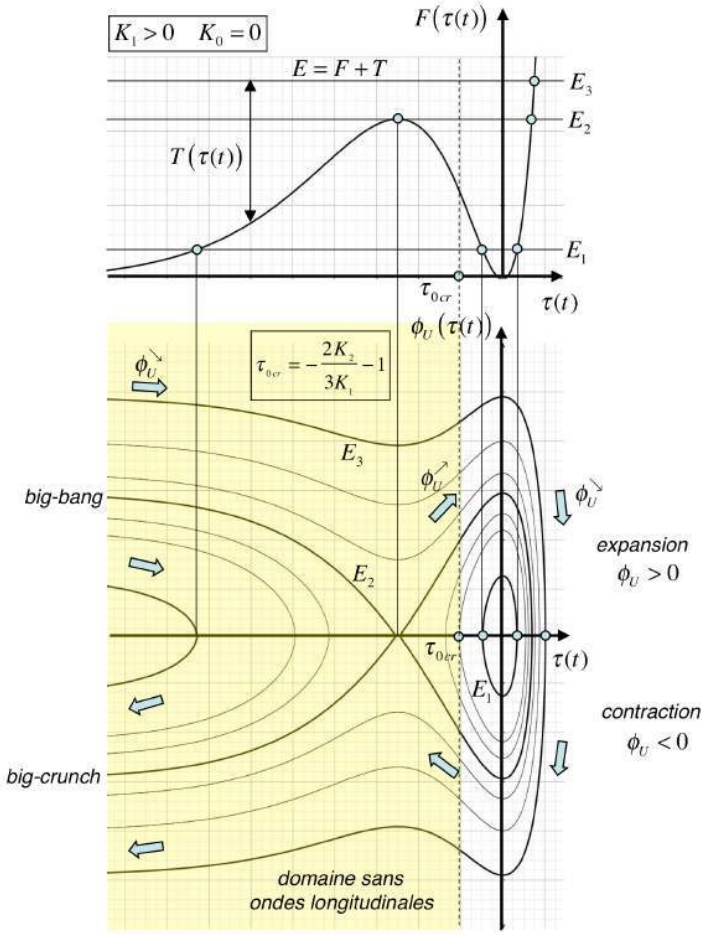


Figure 16.4 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ d'expansion et de la vitesse $\vec{\phi}_U(\tau)$ d'expansion d'un réseau cosmologique imaginaire avec $K_1 > 0$*

L'évolution cosmologique d'un réseau cosmologique avec $K_0 = 0$ et $K_1 < 0$

Si le module K_1 du réseau est négatif, l'énergie élastique $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ présente deux maxima pour $\tau \to -\infty$ et $\tau = 0$ et un minimum pour $\tau = -2$. De plus, $\boldsymbol{F}^{él}(\tau) \to -\infty$ pour $\tau \to \infty$ (fig. 16.5). On peut considérer ici 3 cas différents suivant la valeur de l'énergie totale $\boldsymbol{E}$:

- si $\boldsymbol{E} < 0$, il existe une solution «cosmologique» entourant la valeur $\tau = -2$, pour laquelle le réseau se dilate et se contracte indéfiniment entre les valeurs $\tau_1 < 0$ et $\tau_2 < 0$, et une deuxième solution pour laquelle le réseau se dilate indéfiniment, à vitesse croissante, depuis la valeur $\tau_3 > 0$,
- si $\boldsymbol{E} = 0$, il existe une solution pour les valeurs inférieures à $\tau = 0$, et une solution pour les valeurs supérieures. Le réseau peut se dilater depuis $\tau \to -\infty$, et peut ensuite, soit se recontracter vers $\tau \to -\infty$ et recommencer le cycle, soit se dilater définitivement vers $\tau \to +\infty$,

- si $E > 0$, il existe une seule solution pour laquelle le réseau se dilate une seule fois depuis $\tau \to -\infty$ jusqu'à $\tau \to +\infty$. La solution symétrique qui consisterait à ce que le réseau se contracte depuis $\tau = +\infty$ où le réseau possèderait une énergie cinétique de contraction énorme, jusqu'à $\tau \to -\infty$ n'est évidemment pas interdite, mais elle paraît fort peu probable!

Dans le cas de ce réseau, on constate aussi l'existence de domaines de comportements différents: un domaine où il coexiste des ondes transversales et longitudinales pour $\tau > \tau_{0cr} = -1 + 2K_2 / 3|K_1| > -1$, et un domaine où il n'existe que des ondes transversales et des modes de vibrations longitudinales localisés pour $\tau < \tau_{0cr} = -1 + 2K_2 / 3|K_1| > -1$.

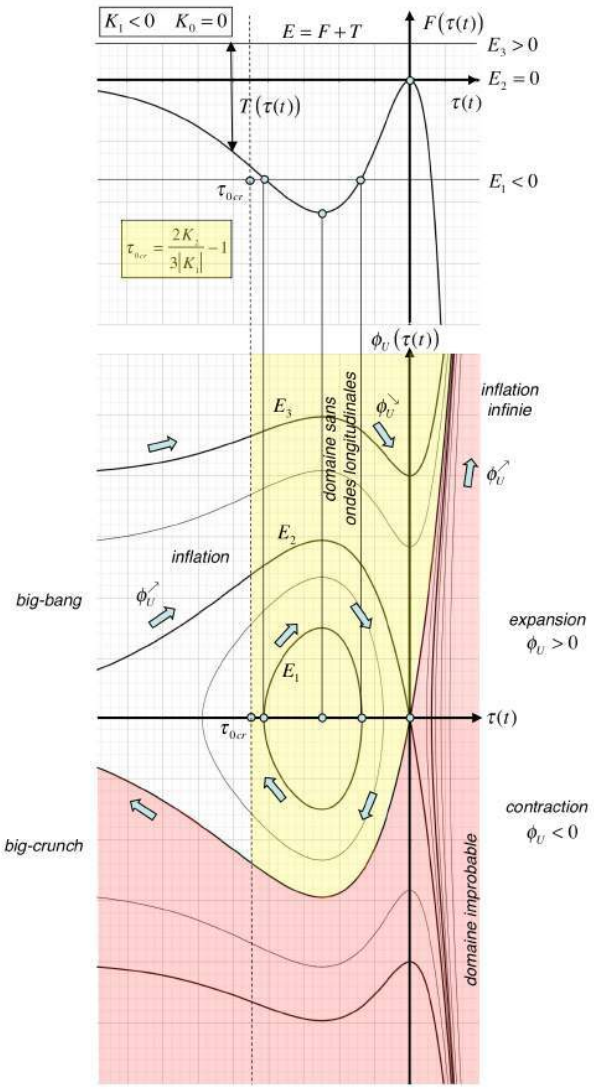


Figure 16.5 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique* $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ *d'expansion et de la vitesse* $\vec{\phi}_U(\tau)$ *d'expansion d'un réseau cosmologique imaginaire avec* $K_1 < 0$

L'évolution cosmologique d'un réseau cosmologique avec $K_1 = 0$ ***et*** $K_0 < 0$

Si, dans le référentiel absolu $O\xi_1\xi_2\xi_3$ du ***GO*** on considère un réseau cosmologique avec $K_1 = 0$ et $K_0 < 0$, l'énergie élastique d'expansion $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ s'écrit

$$\boldsymbol{F}^{él} = N f^{él} = -\frac{NK_0}{n}\tau + \underbrace{\frac{NK_1}{n}}_{K_1=0}\tau^2 + \underbrace{\frac{NK_2}{n}\sum_i (\vec{\alpha}_i^{él})^2}_{\vec{\alpha}_i^{él}=0} + \underbrace{\frac{NK_3}{n}(\vec{\omega}^{él})^2}_{\vec{\omega}^{él}=0} = -\frac{NK_0}{n}\tau = -\frac{NK_0}{n_0}\mathrm{e}^{\tau}\,\tau \qquad (16.11)$$

Pour reporter le comportement de $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ en fonction de τ pour ce solide, il faut rechercher les extrema de $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$

$$\frac{d\boldsymbol{F}^{él}(\tau)}{d\tau} = -\frac{NK_0}{n_0}(1+\tau)\mathrm{e}^{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = -1 \quad et \quad \tau \to -\infty \qquad (16.12)$$

Si le module K_0 du solide est négatif, l'énergie $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ en fonction de τ présente un minimum pour $\tau = -1$ comme illustré à la figure 16.6.

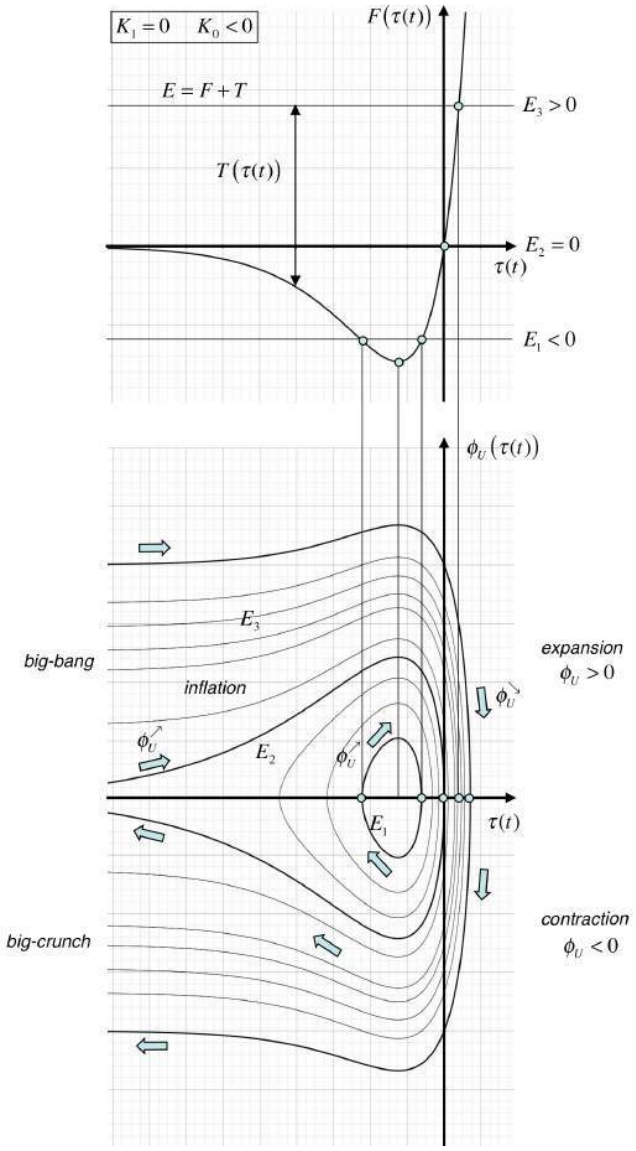


Figure 16.6 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ d'expansion et de la vitesse $\vec{\phi}_U(\tau)$ d'expansion d'un réseau cosmologique imaginaire avec $K_0 < 0$*

On en déduit alors que le «comportement cosmologique» de ce type de réseau correspond à

celui représenté à la figure 16.6:
- si $E < 0$, le réseau oscille indéfiniment sur une trajectoire fermée entre une valeur minimum $\tau_{\min}$ et une valeur maximum $\tau_{\max}$,
- si $E \geq 0$, le réseau oscille entre $\tau \to -\infty$ et une valeur maximale $\tau_{\max}$.
En ce cas, le réseu présente toujours des ondes longitudinales, car, comme $K_0 < 0$, on a forcément que $K_0 < 4K_2 / 3$.

L'évolution cosmologique d'un réseau cosmologique avec $K_1 = 0$ ***et*** $K_0 > 0$

Si le module K_0 *du réseau cosmologique est positif,* l'énergie $E^{él}(\tau)$ en fonction de τ présente un maximum pour $\tau = -1$ comme illustré à la figure 16.7.

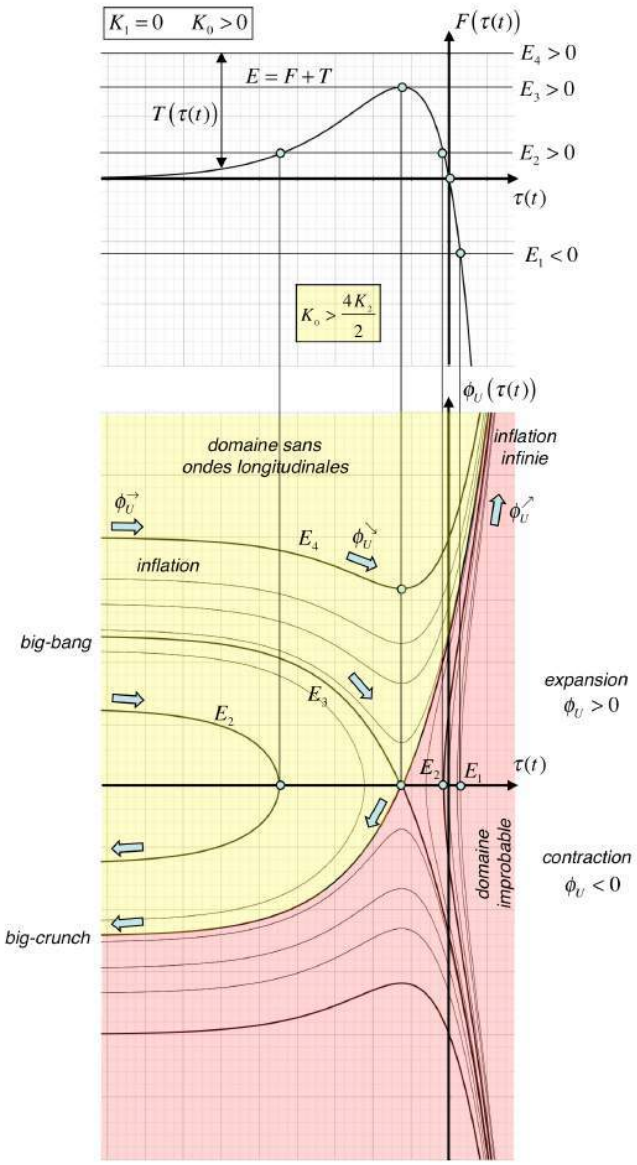


Figure 16.7 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique* $F^{él}(\tau)$ *d'expansion et de la vitesse* $\vec{\phi}_U(\tau)$ *d'expansion d'un réseau cosmologique imaginaire avec* $K_0 > 0$

On en déduit le *«comportement cosmologique»* de ce type de réseau, comme représenté à la figure 16.7:
- si $0 < \boldsymbol{E} < \boldsymbol{F}^{él}_{max} = NK_0 / \mathrm{e}n_0$, le réseau présente deux trajectoires possibles: une qui oscille indéfiniment entre entre $\tau \to -\infty$ et une valeur maximale $\tau_{\max}$, et une qui correspond à une expansion irrémédiable, à vitesse croissante, depuis une valeur initiale avec $\vec{\phi}_U = 0$,
- si $\boldsymbol{E} \geq \boldsymbol{F}^{él}_{max} = NK_0 / \mathrm{e}n_0$, le réseau présente une expansion irrémédiable depuis $\tau = -\infty$ vers $\tau \to +\infty$, avec une vitesse d'abord décroissante, puis ensuite croissante,
- si $\boldsymbol{E} \leq 0$, l'évolution du réseau n'a plus qu'une seule trajectoire présentant une expansion irrémédiable depuis une valeur $\tau_{\min} > 0$ vers $\tau \to +\infty$, avec une vitesse croissante.
En ce cas, le réseau présente des ondes longitudinales si $0 < K_0 < 4K_2 / 3$, mais n'en présente pas si $K_0 > 4K_2 / 3$.

L'évolution cosmologique d'un réseau cosmologique avec $K_0 > 0$ ***et*** $K_1 > 0$

L'énergie libre élastique d'expansion de ce réseau s'écrit

$$\boldsymbol{F}^{él}(\tau) = Nf^{él} = N\left(-\frac{K_0}{n}\tau + \frac{K_1}{n}\tau^2\right) = \frac{N}{n_0}\left(K_1\tau - K_0\right)\tau\,\mathrm{e}^{\tau} \qquad (16.13)$$

Cette fonction est représentée au haut de la figure 16.8. Elle présente des zéros pour

$$\boldsymbol{F}^{él}(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \begin{cases} 0 \\ K_0 / K_1 \\ \to -\infty \end{cases} \qquad (16.14)$$

ainsi qu'un maximum dans le domaine $\tau < 0$ et un minimum dans le domaine $\tau > 0$. D'après la relation (16.6), ces extrema correspondent respectivement au minimum et au maximum de la vitesse d'expansion $\phi_U(\tau)$ du réseau, de sorte qu'on a

$$\frac{d\boldsymbol{F}^{él}(\tau)}{d\tau} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau_{\boldsymbol{F}^{él}\max} = \tau_{\phi_U \min} = \left(\dfrac{K_0}{2K_1} - 1\right) - \sqrt{\dfrac{K_0}{2K_1}\left(\dfrac{K_0}{2K_1} + 1\right)} \underset{\frac{K_0}{K_1} >> 1}{\longrightarrow} -\dfrac{3}{2} \\ \tau_{\boldsymbol{F}^{él}\min} = \tau_{\phi_U \max} = \left(\dfrac{K_0}{2K_1} - 1\right) + \sqrt{\dfrac{K_0}{2K_1}\left(\dfrac{K_0}{2K_1} + 1\right)} \underset{\frac{K_0}{K_1} >> 1}{\longrightarrow} \dfrac{K_0}{K_1} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (16.15)$$

On en déduit le *«comportement cosmologique»* de ce type de réseau, comme représenté à la figure 16.8:
- si $\boldsymbol{E} < 0$, le réseau présente une seule trajectoire possible, entièrement située dans le domaine $\tau > 0$, et qui correspond à se dilater et se contracter indéfiniment entre deux valeurs extrêmes de τ ,
- si $0 < \boldsymbol{E} < \boldsymbol{F}^{él}_{max}$, le réseau présente deux trajectoires possibles: la première correspond à se dilater et se contracter indéfiniment entre une valeur positive et une valeur négative de τ , et la deuxième correspond à osciller indéfiniment entre une valeur négative de τ et une expansion tendant vers $\tau \to -\infty$,
- si $\boldsymbol{E} > \boldsymbol{F}^{él}_{max}$, le réseau présente une seule trajectoire possible très intéressante. Il pulse indéfiniment en passant d'un *big-bang* vers un *big crunch*! Le big-bang est suivi d'une phase d'expansion rapide, suivi par un ralentissement, puis à nouveau une expansion à vitesse crois-

sante, et soudainement une inversion de la vitesse d'expansion, pour se recontracter en suivant en sens inverse tous les stades parcourus lors de l'expansion. La contraction se termine par un big crunch, qui ne peut être suivi que par un bigbang puisque le réseau a alors accumulé une énergie cinétique totale T égale à E, phénomène qualifié de *«big bounce»*!.

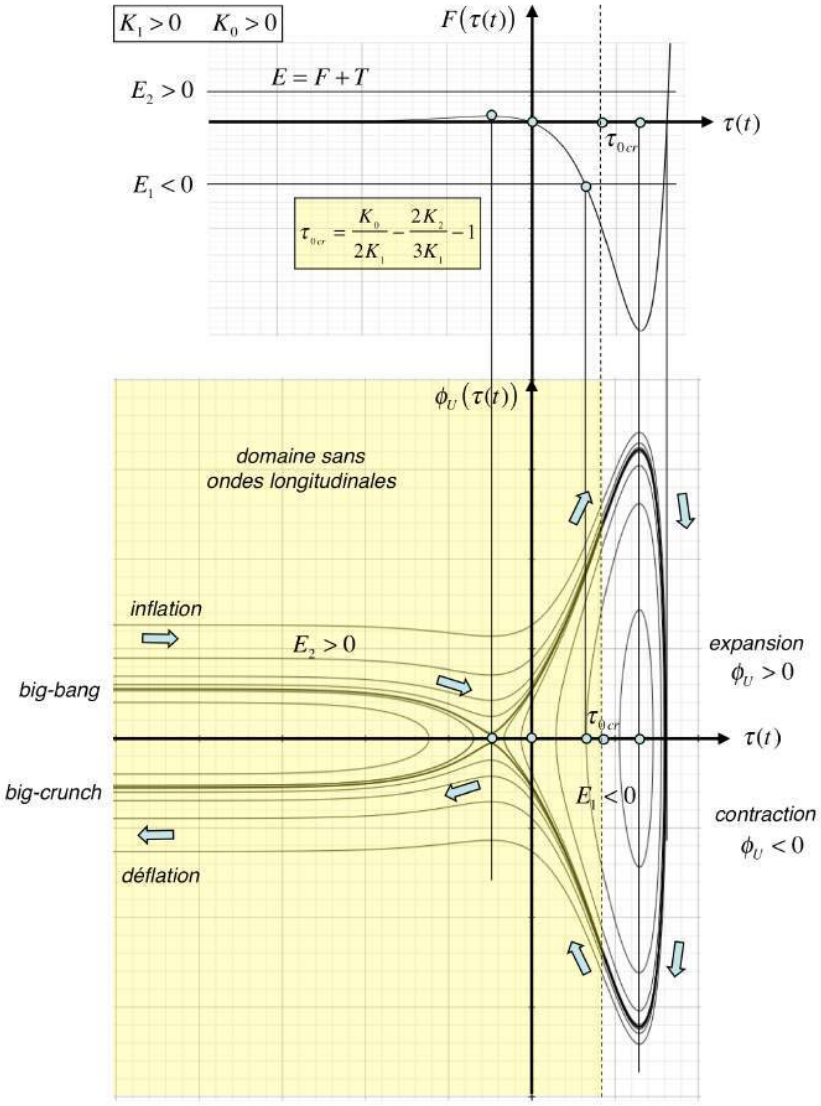


Figure 16.8 *- «comportement cosmologique» de l'énergie élastique* $\boldsymbol{F}^{él}(\tau)$ *d'expansion et de la vitesse* $\vec{\phi}_U(\tau)$ *d'expansion d'un réseau cosmologique imaginaire avec* $K_0 > 0$ *et* $K_1 > 0$

Dans le cas de ce réseau, on constate aussi l'existence de domaines d'expansion volumique présentant des comportements différents concernant les ondes longitudinales: un domaine où il coexiste des ondes transversales et longitudinales, pour $\tau > \tau_{0cr} = K_0 / 2K_1 - 2K_2 / 3K_1 - 1$, et un domaine où il n'existe que des ondes transversales et des modes de vibrations longitudinales localisés, pour $\tau < \tau_{0cr} = K_0 / 2K_1 - 2K_2 / 3K_1 - 1$. Et le domaine où il n'existe pas d'ondes longitudinales correspond précisément au domaine du big-bang, de l'inflation, du ralentissement de l'inflation, suivi finalement par une accélération de l'expansion!

16.4 – Analogie avec l'évolution cosmologique de notre Univers et origine de l'«énergie noire»

Dans la figure 16.9, on a reporté les huit différents comportements qu'il est possible d'obtenir avec un *réseau cosmologique,* suivant les valeurs que peuvent prendre les modules K_0 et K_1. On y aussi reporté dans cette figure les domaines d'expansion dans lesquels les ondes longitudinales ne peuvent pas exister.

De l'analogie avec la cosmologie de l'Univers réel

On constate qu'il existe quatre *«comportements cosmologiques»* vraiment différents, dont trois présentent des analogies nettement plus convaincantes avec la cosmologie de l'Univers réel:

- les réseaux cosmologiques avec $K_1 < 0$ qui sont reportés dans les figures 16.9 *(a)*, *(c)* et *(d)*. Ces trois types de réseau présentent bien un big-bang suivi d'une inflation à grande vitesse, d'un ralentissement de l'inflation et finalement d'une expansion à vitesse croissante vers $\tau \to +\infty$, stades qui se suivent dans un ordre parfait. La disparition des ondes longitudinales intervient dans ces réseaux pour des expansions supérieures à une valeur critique τ_{0cr} qui dépend de la valeur du module de cisaillement $K_2 > 0$,
- le réseau cosmologique de la figure 16.9 *(b)*, avec $K_1 = 0$ et $K_0 > 0$, pour lequel il n'existe jamais d'ondes longitudinales à condition que $K_0 > 4K_2/3$, ce qui en fait un cas très simple et très intéressant pour décrire le comportement cosmologique de l'Univers réel,
- les réseaux cosmologiques avec $K_1 > 0$ ou $K_1 = 0$ et $K_0 < 0$ qui sont reportés dans les figures 16.9 *(e)*, *(g)* et *(h)*. Ces trois types de réseau parcourent bien les quatre stades de la cosmologie de l'Univers réel, en l'absence d'ondes longitudinales (un «big-bang» à partir d'une singularité d'espace-temps, suivi d'une période d'inflation très rapide, puis un ralentissement de l'inflation, suivi d'une expansion dont la vitesse semble bien s'accroître au cours du temps), avant d'entrer dans une phase d'expansion au cours de laquelle les ondes longitudinales apparaissent, et qui précède une phase de contraction symétrique de retour vers l'état de singularité $\tau \to -\infty$ («big-crunch»). En ce cas, il existe bien une région du diagramme, pour $\tau < \tau_{0cr}$, qui se situe dans le domaine où il n'existe pas d'ondes longitudinales, et dans laquelle le réseau est en expansion à vitesse croissante. A noter que le réseau de la figure 16.9 *(g)* pourrait être un excellent candidat pour décrire le comportement cosmologique de l'Univers réel, car tous ses modules élastiques sont positifs,
- finalement, le réseau cosmologique de la figure 16.9 *(f)*, avec $K_1 = 0$ et $K_0 < 0$, ne présente pas les stades correspondant à la cosmologie de l'Univers réel, et il présente toujours des ondes longitudinales. Il n'est pas apte à décrire le comportement cosmologique de l'Univers.

Le «comportement cosmologique» d'un réseau cosmologique peut s'illustrer encore plus clairement en reportant la vitesse d'expansion volumique $d\tau/dt$ en fonction de l'expansion volumique τ, comme représenté pour les cas *(c)* et *(d)* avec $K_1 < 0$ dans la figure 16.10, et pour les cas *(g)* et *(h)* avec $K_1 > 0$ dans la figure 16.11.

Pour trouver ces comportements, on extraie la valeur de R_U de l'expression *(16.4)*

$$R_U = \left(\frac{3N}{4\pi n_0} \right)^{1/3} \mathrm{e}^{\tau/3} \qquad (16.16)$$

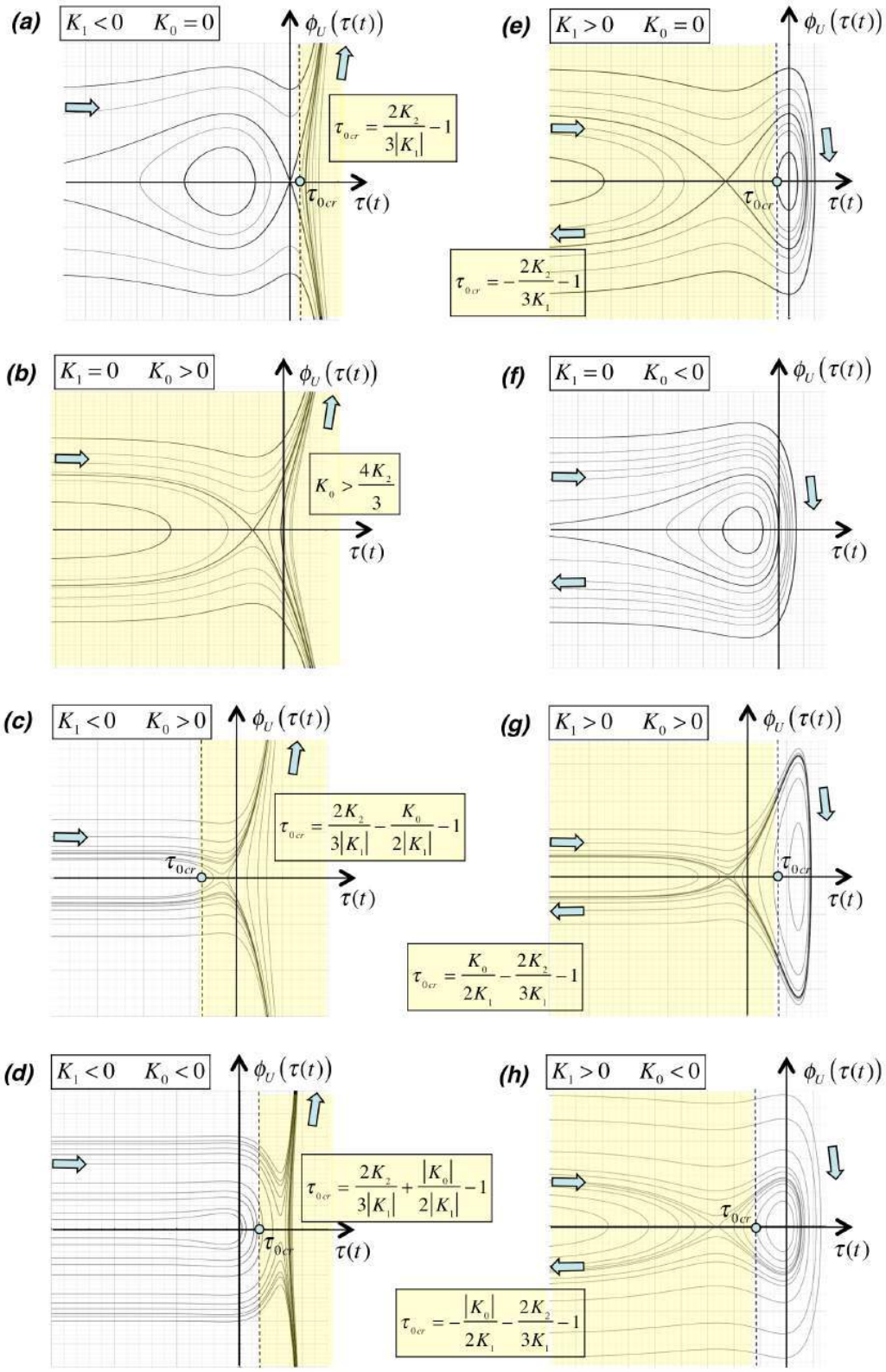


Figure 16.9 *- tous les «comportements cosmologiques» possibles d'un réseau cosmologique, suivant les valeurs de* K_0 *et* K_1 *: de* ***(a)*** *à* ***(d)*** *les solides à expansion croissante infinie, et de* ***(e)*** *à* ***(h)*** *les solides oscillant du big-bang au big-crunch*

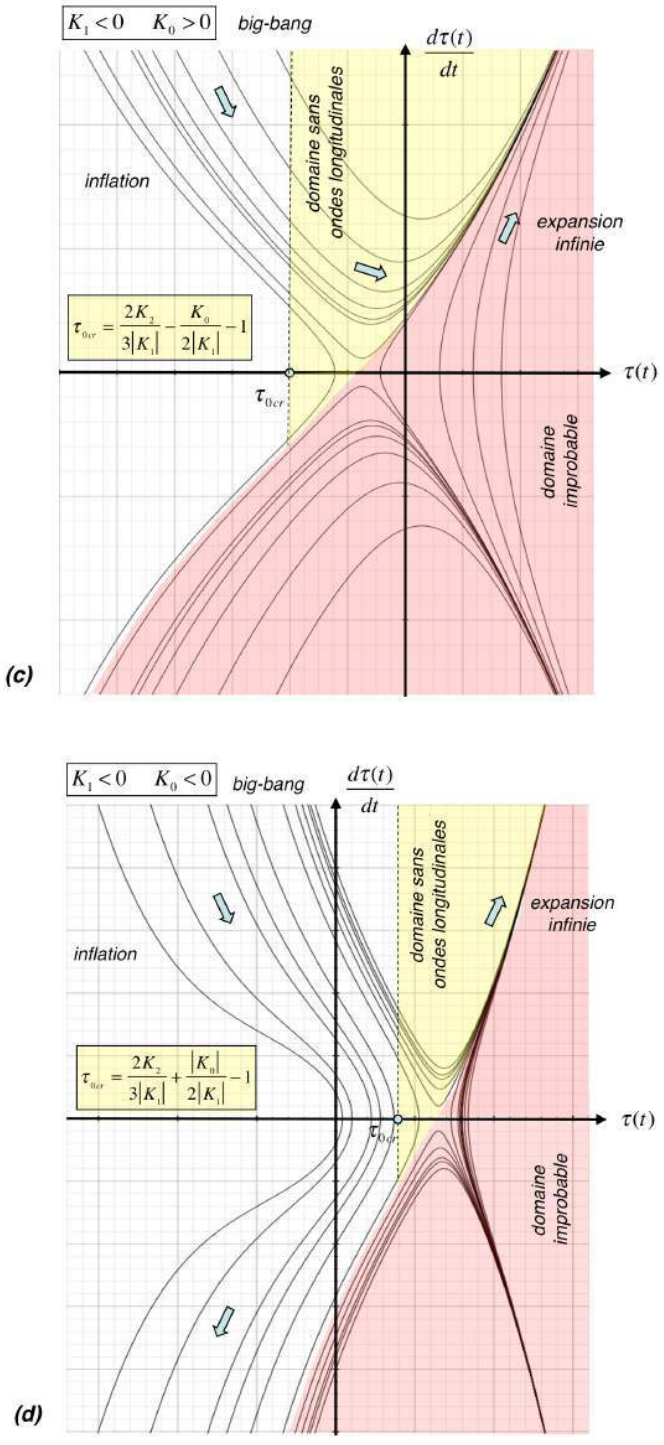


Figure 16.10 *- «comportements cosmologiques» de la vitesse d'expansion cosmologique* $d\tau / dt$ *en fonction de l'expansion* τ *de deux réseaux cosmologiques imaginaires avec* $K_1 < 0$ *.*

On en déduit la vitesse d'expansion $\phi_U(\tau)$

$$\phi_U(\tau) = \frac{dR_U}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{3N}{4\pi n_0}\right)^{1/3} \mathrm{e}^{\tau/3}\frac{d\tau}{dt} \qquad (16.17)$$

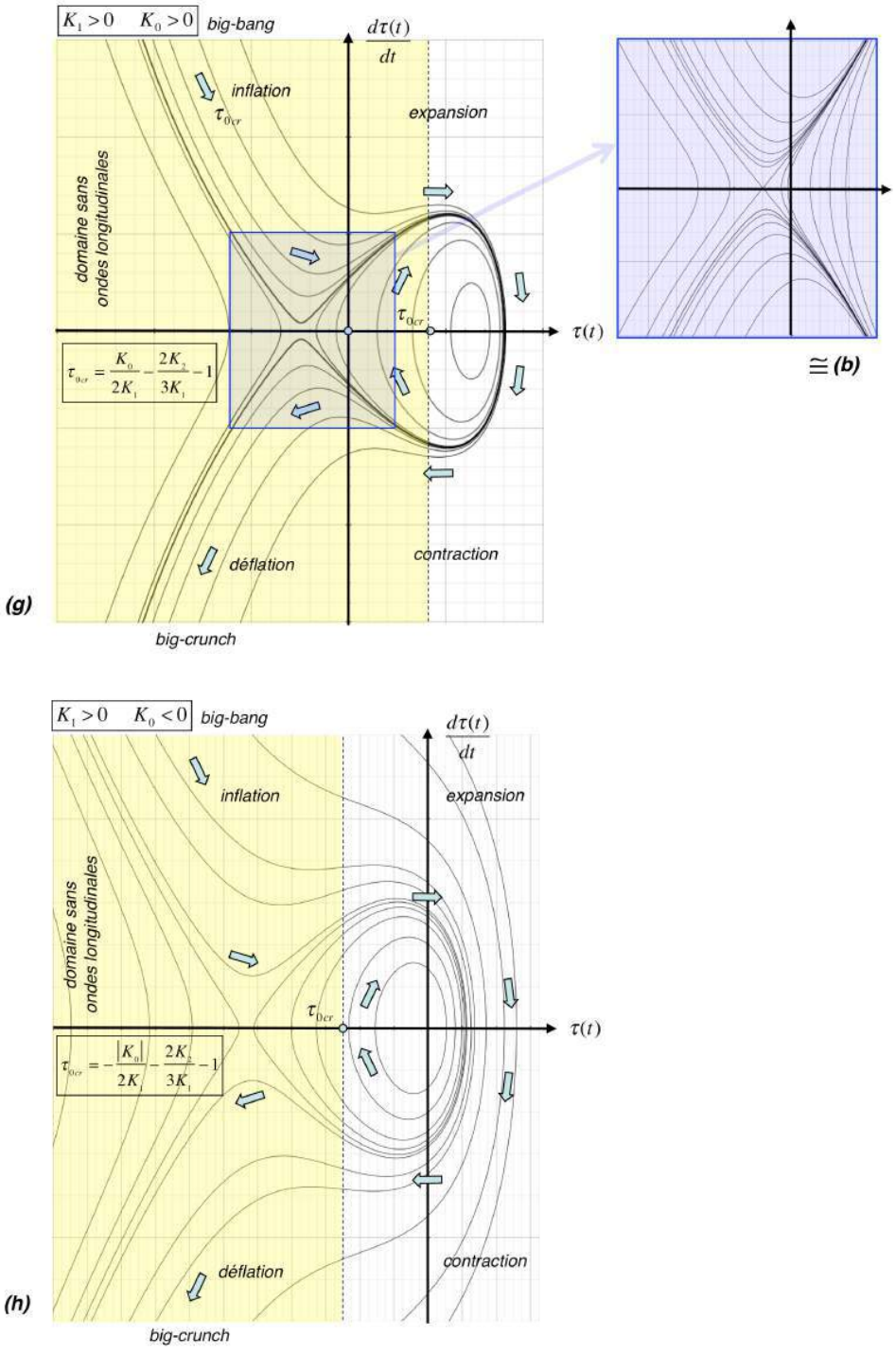


Figure 16.11 *- «comportements cosmologiques» de la vitesse d'expansion cosmologique* $d\tau / dt$ *en fonction de l'expansion* τ *de deux réseaux cosmologiques imaginaires avec* $K_1 > 0$ *.*

qui, comparée à l'expression *(16.6)* de $\phi_U(\tau)$ permet d'écrire

$$\frac{d\tau}{dt} = 3\left(\frac{4\pi n_0}{3N}\right)^{1/3} \mathrm{e}^{-\tau/3}\phi_U(\tau) = 3\left(\frac{4\pi n_0}{3N}\right)^{1/3} \mathrm{e}^{-\tau/3}\sqrt{\frac{10}{3Nm}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}^{él}(\tau)\right)} \qquad (16.18)$$

Le comportement de la vitesse d'expansion volumique $d\tau / dt$ en fonction de τ peut donc être

déduite de la connaissance de $\boldsymbol{F}^{\acute{e}l}(\tau)$ comme le montre les figures 16.10 et 16.11.
Les figures 16.10 et 16.11 sont très intéressantes, car elles montrent bien l'existence d'un stade initial d'inflation extrêmement rapide de l'expansion volumique τ dans les *réseaux cosmologiques* puisque $d\tau / dt \to \pm\infty$ pour $\tau \to -\infty$, juste après le stade du big-bang ou juste avant le stade du big-crunch, et que la vitesse $d\tau / dt$ de l'expansion ou de la contraction volumique passe par un minimum avant de s'accélérer à nouveau, juste après le stade d'inflation ou juste après le stade de re-contraction.

Des limites de notre modélisation

Il va sans dire que la modélisation utilisée dans ce chapitre pour décrire les «comportements cosmologiques» de réseaux imaginaires est extrêmement simplifiée, pour ne pas dire simpliste. C'est essentiellement l'hypothèse initiale d'une expansion volumique homogène dans tout le réseau qui peut être mise en doute, car avec cette hypothèse on a éludé les deux problèmes majeurs qui conduiraient en principe à des modèles beaucoup plus compliqués: le fait que le solide est soumis à la dynamique newtonienne dans l'espace absolu du ***GO*** , et le fait qu'on aurait dû en principe posé une condition sur la nullité de la pression à la limite extérieure du solide. Mais malgré les simplifications extrêmes de notre modélisation, les comportements globaux prédits dans les figures 16.9 à 16.11 doivent tout de même rester assez proches des comportements qu'on aurait pu obtenir par un traitement plus réaliste du problème!

Du choix «raisonnable» d'un réseau cosmologique donné pour décrire l'Univers réel

Parmi les divers réseaux proposés dans ce chapitre, il est clair que les *réseaux cosmologiques* présentent des caractéristiques beaucoup plus intéressantes que les *solides parfaits* pour décrire les observations expérimentales des cosmologistes. Il n'est évidemment pas possible de choisir ici le réseau cosmologique qui se rapprocherait le plus de l'évolution cosmologique connue de l'Univers réel. Mais d'un point de vue philosophique et du point de vue du bon sens, les réseaux cosmologiques (fig. 16.9, (e) à (h)), qui présentent un big-bang suivi d'un big crunch, et donc finalement un big-bounce sont nettement plus satisfaisant pour un esprit cartésien que les réseaux à expansion infinie et unique (fig. 16.9, (a) à (d)). On peut donc émettre ici une *conjecture de nature «philosophique»* sous la forme

Conjecture 3: *il est plus «raisonnable» pour l'esprit d'imaginer que* K_1 *satisfasse* $K_1 > 0$
de sorte que l'expansion du réseau ne soit pas infinie *(16.19)*

Quant à la valeur de K_0 , rien ne nous permet pour l'instant de proposer une valeur positive, nulle ou négative, car les cas illustrés dans la figure 16.11 sont tous deux très intéressants!

De l'origine de la fameuse «énergie noire» des astrophysiciens

A noter finalement que l'énergie élastique $\boldsymbol{F}^{\acute{e}l}(\tau)$ contenue dans le réseau cosmologique pourrait bien correspondre à l'*«énergie noire»* des astrophysiciens, introduite pour expliquer l'augmentation de la vitesse d'expansion de l'Univers récemment observée expérimentalement, puisque c'est cette énergie élastique qui est entièrement responsable de l'augmentation de la vitesse de l'expansion volumique via la relation *(16.18)*.

PARTIE II

B

Equations de Maxwell et relativité restreinte

Séparabilité de l'équation de Newton

Equations de Maxwell du champ de rotation

Champs et énergies de distorsions élastiques des singularités topologiques

Masse d'inertie

Dynamique relativiste des singularités topologiques

Relativité restreinte d'Einstein

Chapitre 17

Equations de Maxwell d'évolution du champ de rotation d'un réseau cosmologique

Dans ce chapitre, on commence par montrer la séparabilité du champ d'expansion volumique des autres champs dans l'équation de Newton d'un *réseau cosmologique* dans le cas où les concentrations de défauts ponctuelles sont des constantes. Puis on utilise les résultats ainsi obtenus pour rechercher les équations «maxwelliennes» d'évolution spatio-temporelle du réseau dans le cas où le champ d'expansion volumique peut être considéré comme quasi-constant.

17.1 – Séparabilité de l'équation de Newton d'un réseau cosmologique en une partie «rotationnelle» et une partie «divergente»

Supposons que le champ d'expansion volumique au sein d'un réseau cosmologique présente un champ de fond τ_0 homogène auquel est superposé un champ d'expansion élastique $\tau^{él}$

Hypothèse 1: $\tau = \left(\tau_0 + \tau^{él}\right)$ *(17.1)*

Introduisons ce champ dans l'équation de Newton *(13.9)*. Il vient

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + \overrightarrow{\text{grad}}\left[\left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right)\tau^{él} + K_1\left(\tau^{él}\right)^2 + F^{rot}\right] + 2K_2\,\vec{\lambda} + nm\vec{\phi}_I\frac{dC_I}{dt} - nm\vec{\phi}_L\frac{dC_L}{dt} \tag{17.2}$$

dans laquelle F^{rot} représente la densité d'énergie de déformation par cisaillements et rotations élastiques et anélastiques, et vaut

$$F^{rot} = K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{él})^2 + K_1^{an}\sum_i(\vec{\alpha}_i^{an})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{an})^2 \tag{17.3}$$

Supposons aussi que les concentrations atomiques de lacunes et d'interstitiels soient *des constantes homogènes* dans tout le réseau

Hypothèse 2: $\dfrac{dC_I}{dt} = \dfrac{dC_L}{dt} = 0$ *(17.4)*

En ce cas, l'équation de Newton se simplifie sous la forme

$$n\frac{d\vec{p}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + \overrightarrow{\text{grad}}\left[\left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right)\tau^{él} + K_1\left(\tau^{él}\right)^2 + F^{rot}\right] + 2K_2\,\vec{\lambda} \tag{17.5}$$

dans laquelle la quantité de mouvement peut s'écrire, d'après *(5.101) et (5.78)*

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{\phi} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi} + m\left(\vec{J}_I - \vec{J}_L\right)/n \\ \vec{J}_L = nC_L\left(\vec{\phi}_L - \vec{\phi}\right) \\ \vec{J}_I = nC_I\left(\vec{\phi}_I - \vec{\phi}\right) \end{cases} \tag{17.6}$$

Grâce à la deuxième hypothèse, la linéarité des relations *(17.6)* en les diverses vitesses montre qu'il est possible de les scinder en deux contributions en séparant les vitesses $\vec{\phi}$, $\vec{\phi}_L$ et $\vec{\phi}_I$ en une composante, indicée *«rot»*, associée aux déformations par cisaillements et rotations d'une part, et une composante, indicée *«div»*, associée aux déformations par expansion volumique d'autre part, en écrivant

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}^{rot} + \vec{\phi}^{div} \quad ; \quad \vec{\phi}_L = \vec{\phi}_L^{rot} + \vec{\phi}_L^{div} \quad ; \quad \vec{\phi}_I = \vec{\phi}_I^{rot} + \vec{\phi}_I^{div} \tag{17.7}$$

Il vient ainsi deux contributions à l'équation de Newton:

- *une contribution gérant les champs élastiques de cisaillements et de rotation,* via le champ vectoriel de rotation $\vec{\omega}^{él}$. Cette contribution ne dépend de l'expansion volumique τ que par la présence de la densité de site $n = n_0 \, \mathrm{e}^{-(\tau_0 + \tau^{él})}$, et s'écrit

$$n \frac{d\vec{p}^{rot}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + 2K_2\vec{\lambda}^{rot} \tag{17.8}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \vec{p}^{rot} = m\vec{\phi}^{rot} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot} + m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)/n \\ \vec{J}_L^{rot} = nC_L\left(\vec{\phi}_L^{rot} - \vec{\phi}^{rot}\right) = nC_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot} \\ \vec{J}_I^{rot} = nC_I\left(\vec{\phi}_I^{rot} - \vec{\phi}^{rot}\right) = nC_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} \end{cases} \tag{17.9}$$

- *une contribution gérant le champ de perturbation d'expansion volumique*, qui est dépendante de la solution précédente via la densité d'énergie F^{rot} de déformation par cisaillements et rotations élastiques et anélastiques, et qui s'écrit

$$n \frac{d\vec{p}^{div}}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0\right)\tau^{él} + K_1\left(\tau^{él}\right)^2 + F^{rot}\right] + 2K_2\vec{\lambda}^{div} \tag{17.10}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} F^{rot} = K_2\sum_i (\vec{\alpha}_i^{él})^2 + K_1^{an}\sum_i (\vec{\alpha}_i^{an})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 + 2K_2^{an}(\vec{\omega}^{an})^2 \\ \vec{p}^{div} = m\vec{\phi}^{div} + m\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{div} + m\left(\vec{J}_I^{div} - \vec{J}_L^{div}\right)/n \\ \vec{J}_L^{div} = nC_L\left(\vec{\phi}_L^{div} - \vec{\phi}^{div}\right) = nC_L\Delta\vec{\varphi}_L^{div} \\ \vec{J}_I^{div} = nC_I\left(\vec{\phi}_I^{div} - \vec{\phi}^{div}\right) = nC_I\Delta\vec{\varphi}_I^{div} \end{cases} \tag{17.11}$$

La densité de charges de flexion à aussi été scindée en deux parties: les *charges de flexion «rotationnelles»* et les *charges de flexion «divergentes»*, qui satisfont les relations suivantes

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^{rot} + \vec{\lambda}^{div} \quad \textit{telles que} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\lambda}^{rot} \neq 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{div}\,\vec{\lambda}^{div} = \theta \tag{17.12}$$

et qui permettent de relier l'équation de Newton pour l'expansion $\tau^{él}$ *(17.10)* à la densité de charge de courbure θ au sein du réseau.

Cette scission de l'équation de Newton dans le cas où les concentrations de lacunes et d'interstitiels sont des constantes homogènes permet, dans le cadre des équations fondamentales du tableau 11.2, de résoudre les problèmes d'évolution spatio-temporelle du réseau parfait généralisé, en séparant la résolution des champs élastiques de cisaillements et de rotation de celle du champ d'expansion volumique. Moyennant des hypothèses simplificatrices supplémentaires, il peut être possible de résoudre de manière complètement indépendante ces deux sets d'équations. C'est ce qu'on va montrer dans la section suivante, en considérant le cas particulier où le champ d'expansion volumique peut être considéré comme quasi-constant.

17.2 – Comportement "maxwellien" de la partie rotationnelle: équations de Maxwell du champ de rotation

Emettons maintenant l'hypothèse que la valeur moyenne de l'expansion volumique $\langle\tau\rangle = \tau_0 + \langle\tau^{él}\rangle$ au sein du réseau cosmologique puisse être considérée en première approximation comme constante et homogène, de sorte que la densité de site n puisse aussi être considérée en moyenne comme une constante

Hypothèse 3: $\langle\tau\rangle = \tau_0 + \langle\tau^{él}\rangle \cong cste \quad \Rightarrow \quad n \cong \langle n\rangle \cong n_0\, \mathrm{e}^{\tau_0 + \langle\tau^{él}\rangle} \cong cste$ *(17.13)*

Avec ces hypothèses, on peut ré-écrire l'équations de Newton *(17.8)* en y introduisant un *vecteur moment* $\vec{m}$ conjugué aux rotations $\vec{\omega}^{él}$, sous la forme

$$\frac{d(n\vec{p}^{\,rot})}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{él} + 2K_2\vec{\lambda}^{rot} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{m} + 2K_2\vec{\lambda}^{rot} \qquad (17.15)$$

Par hypothèse, l'*anélasticité du réseau* se manifeste uniquement par cisaillement et/ou rotation, de sorte qu'elle peut très être représentée ici par un vecteur de rotation anélastique $\vec{\omega}^{an}$, en écrivant la relation *(2.40)* sous la forme

$$\vec{\omega}^{\delta} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_0(t) = \vec{\omega}^{él} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) = \frac{1}{4\left(K_2 + K_3\right)}\vec{m} + \vec{\omega}^{an} + \vec{\omega}_0(t) \qquad (17.16)$$

A noter qu'on peut imaginer dans ce cas que le torseur de moment $\vec{m}$ dérive d'une équation d'état virtuel. On obtient alors une *densité virtuelle d'énergie libre de rotation élastique par site* de réseau sous la forme

$$m_k = n\frac{\partial f^{él}_{rotation}}{\partial \omega^{él}_k} = 4\left(K_2 + K_3\right)\vec{\omega}^{él} \;\Rightarrow\; f^{él}_{rotation} = \frac{2\left(K_2 + K_3\right)}{n}\left(\vec{\omega}^{él}\right)^2 \qquad (17.17)$$

de sorte que la *densité volumique virtuelle d'énergie libre de rotation élastique*, liée aux déformations par cisaillements et par pures rotations élastiques, sans expansions volumiques, s'écrit

$$F^{él}_{rotation}\left(\vec{\omega}^{él}\right) = 2\left(K_2 + K_3\right)\left(\vec{\omega}^{él}\right)^2 \qquad (17.18)$$

Les équations nécessaires à la description complète des cisaillements et rotations élastiques du réseau cosmologique doivent encore incorporer les équations topologiques pour le vecteur de rotation élastiques $\vec{\omega}^{él}$, à savoir l'équation géométrocinétique et l'équation de géométrocompatibilité en présence de charges de dislocations

$$\vec{J} = -\frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{J}_k = -\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}^{rot} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\sum_k \vec{e}_k\vec{\lambda}_k = \mathrm{div}\,\vec{\omega}^{él} \qquad (17.19)$$

Quant à la densité ρ de masse d'inertie du réseau, les hypothèses 2 et 3 permettent d'assurer qu'elle est une constante

$$\rho = m\left(n + n_I - n_L\right) = mn\left(1 + C_I - C_L\right) = cste \qquad (17.20)$$

de sorte que l'équation d'évolution de cette densité dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ permet de déduire que la divergence de $n\vec{p}^{\,rot}$ est nulle

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 = -\mathrm{div}\left(n\vec{p}^{\,rot}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\left(n\vec{p}^{\,rot}\right) = 0 \qquad (17.21)$$

.

Cette grandeur $n\vec{p}^{rot}$ se déduit directement de *(17.9)* et peut s'écrire sous la forme suivante

$$n\vec{p}^{rot} = mn\left[\vec{\phi}^{rot} + \left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot} + \frac{1}{n}\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)\right] = \rho\vec{\phi}^{rot} + m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right) \qquad (17.22)$$

A partir des relations *(8.22)* et *(10.28)*, on peut supposer qu'il n'existe pas de sources S^{λ} de charges de rotation au sein du réseau

Hypothèse 4: $$S^{\lambda} = \left[\frac{d}{dt}\left(\mathrm{div}\,\vec{\omega}^{él}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt}\right)\right] \equiv 0 \qquad (17.23)$$

de sorte que l'équation de continuité pour les charges de rotation s'écrit

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\mathrm{div}\,\vec{J} \qquad (17.24)$$

Finalement, il est encore possible d'établir une *équation de bilan énergétique* à partir des équations *(17.15)* et *(17.9)*

$$-\vec{m}\vec{J} = \vec{m}\frac{d\vec{\omega}^{él}}{dt} - \vec{\phi}^{rot}\frac{d(n\vec{p}^{rot})}{dt} - \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\vec{\phi}^{rot} \wedge \vec{m}\right) \qquad (17.25)$$

Les relations ainsi obtenues pour le réseau cosmologique dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***GO*** en translation $\vec{\phi}_o(t)$ et en rotation $\dot{\vec{\omega}}_o(t)$ dans le référentiel absolu sont reportées dans le tableau 17.1, où elles sont comparées avec les *équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans un milieu électriquement chargé, conducteur, magnétique et diélectrique*.

Il existe une analogie très forte entre ces deux ensembles d'équations, hormis le fait que les équations d'évolution font intervenir la dérivée particulaire, alors que les équations de Maxwell font intervenir la dérivée partielle par rapport au temps. Cependant, il faut se rappeler que la dérivée particulaire *(2.20)* dans le référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ peut être remplacée par la dérivée partielle par rapport au temps si les déformations restent suffisamment faibles et/ou lentes au voisinage de l'origine du référentiel local , ce que nous avons fait dans le tableau 17.1!

17.3 – Analogies avec les équations de Maxwell de l'électro-magnétisme

L'analogie entre les équations d'un réseau cosmologique pris à expansion volumique quasi constante et homogène et les équations de Maxwell de l'électromagnétisme est tout-à-fait remarquable, car elle est absolument complète, comme le montrent bien les équations reportées dans le tableau 12.1. En fait, nos équations contiennent un terme supplémentaire de densité de charges $\vec{\lambda}^{rot}$ de flexion «rotationnelles» dans le deuxième couple d'équations, qui n'a pas d'homologue dans les équations de Maxwell. En supposant alors un réseau cosmologique dans lequel $\vec{\lambda}^{rot}$ puisse être négligée

Hypothèse 5: $$\vec{\lambda}^{rot} \approx 0 \qquad (17.26)$$

l'analogie entre les équations du réseau cosmologique et les équations de Maxwell devient parfaite, et mérite d'être commentée plus en détail.

De l'analogie entre les charges de rotation et les charges électriques

Les équations du tableau 17.1 montrent une analogie complète entre la densité λ de charges

de rotation et la densité ρ de charges électriques, ainsi qu'entre le flux vectoriel $\vec{J}$ de charges de rotation et la densité de courant électrique $\vec{j}$.

Tableau 17.1 - Formulation «maxwellienne» des équations d'évolution du réseau cosmologique dans le repère local $Ox_1x_2x_3$ du GO

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}^{rot}\cong(2\vec{J}) \\ \mathrm{div}\,(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})=(2\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H}=\vec{j} \\ \mathrm{div}\,\vec{D}=\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(n\vec{p}^{rot})}{\partial t}\cong-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)+2K_2\vec{\lambda}^{rot} \\ \mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} \\ \mathrm{div}\,\vec{B}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\vec{\omega}^{\acute{e}l})=\dfrac{1}{(K_2+K_3)}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)+(2\vec{\omega}^{an})+(2\vec{\omega}_0(t)) \\ (n\vec{p}^{rot})=(nm)\left[\vec{\phi}^{rot}+(C_I-C_L)\vec{\phi}^{rot}+\left(\dfrac{1}{n}(\vec{J}_I^{rot}-\vec{J}_L^{rot})\right)\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}+\vec{P}_0(t) \\ \vec{B}=\mu_0\left[\vec{H}+(\chi^{para}+\chi^{dia})\vec{H}+\vec{M}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(2\lambda)}{\partial t}\cong-\mathrm{div}(2\vec{J}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathrm{div}\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)(2\vec{J})\cong \\ \quad\vec{\phi}^{rot}\dfrac{\partial(n\vec{p}^{rot})}{\partial t}+\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{\partial t}-\mathrm{div}\left(\vec{\phi}^{rot}\wedge\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{E}\vec{j}= \\ \quad\vec{H}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\mathrm{div}(\vec{H}\wedge\vec{E}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_t=\sqrt{\dfrac{K_2+K_3}{mn}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} \end{cases}$$

De l'analogie entre l'anélasticité du réseau et la diélectricité de la matière

Le phénomène d'anélasticité introduit ici par le terme $2\vec{\omega}^{an}$ devient, dans la comparaison avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, l'analogue de la polarisation diélectrique $\vec{P}$ dans la relation $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}+\vec{P}_0(t)$, donnant le déplacement électrique $\vec{D}$ en fonction du champ électrique $\vec{E}$ et de la polarisation $\vec{P}$ de la matière. Cette analogie entre les champs $2\vec{\omega}^{an}$ et $\vec{P}$ est très forte puisque les comportements phénoménologiques possibles de ces deux grandeurs sont tout-à-fait similaires, comme le montrent les comportements relaxationnel, résonant ou hystérétique décrits à la section 7.8 et dans les figures 7.7 et 7.10. Par exemple, dans le cas d'une relaxation pure, il est possible de relier $\vec{\omega}$ à $\vec{m}$ par l'intermédiaire d'un mo-

.

dule complexe, tout comme il est possible de relier $\vec{D}$ à $\vec{E}$ via un coefficient diélectrique complexe en électromagnétisme (en fait, une comparaison plus poussée montrerait même que les comportements associés à l'activation thermique présentent aussi des analogies).
Quant au terme de polarisation diélectrique homogène $\vec{P}_0(t)$ qu'on a introduit ici, il est l'analogue d'un terme de rotation globale $2\vec{\omega}_0(t)$ du réseau, donc du repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ dans le référentiel absolu du **GO.** Ce terme d'analogie disparaît par conséquent dans le cas où le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ n'est qu'en translation $\vec{\phi}_{\boldsymbol{O}}(t)$ par rapport au référentiel absolu.

De l'analogie entre le transport de masse dans le réseau et le magnétisme de la matière

Comme la grandeur $n\vec{p}^{rot}$ représente à la fois la quantité de mouvement moyenne par unité de volume du solide et le flux de masse moyen au sein du solide, on en déduit que le flux de masse au sein du solide est dû à la fois à un transport de masse $nm\vec{\phi}^{rot}$ à vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ par le mouvement du réseau, à un transport de masse $nm\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ à vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ par le mouvement d'entraînement des défauts ponctuels par le réseau et à un transport de masse $m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)$ dû au phénomène d'auto-diffusion des lacunes et des interstitiels.
Chacun de ces transports de masse possède un analogue dans les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Le transport de masse $nm\vec{\phi}^{rot}$ par le réseau est l'analogue du terme de base $\mu_0\vec{H}$ de l'*induction magnétique* dans le vide. Le transport de masse $nm\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ par entraînement des défauts ponctuels par le réseau correspond parfaitement au terme $\mu_0(\chi^{para} + \chi^{dia})\vec{H}$ du magnétisme, dans lequel la susceptibilité magnétique se compose de deux parties: la *susceptibilité paramagnétique* χ^{para} positive, qui devient donc l'analogue de la concentration C_I d'interstitiels, et la *susceptibilité diamagnétique* χ^{dia} négative, qui est par conséquent l'analogue de la concentration C_L de lacunes.
Quant au phénomène d'auto-diffusion par les lacunes et les interstitiels, il apparaît dans ces équations par le terme $m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)$ reliant la dernière partie de $n\vec{p}^{rot}$ aux vitesses $\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ et $\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}$ d'auto-diffusion des défauts ponctuels

$$n\vec{p}_{auto-diffusion}^{rot} = m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right) = mn\left(C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}\right) \qquad (17.27)$$

Le terme $\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)/n = C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ associé à ce transport de masse par auto-diffusion des défauts ponctuels devient, dans la comparaison avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, l'analogue parfait de la magnétisation $\vec{M}$ de la matière dans la relation donnant l'induction magnétique $\vec{B}$.
L'analogie entre les champs $C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ et $\vec{M}$ est très forte puisqu'il existe des comportements phénoménologiques similaires de ces deux grandeurs, comme le montrent bien par exemple les comportements relaxationnels décrits à la section 7.6 et dans la figure 7.4.
En fait, dans le cas des comportements relaxationnels analysés à la section 7.6, les équations de mouvement *(7.61)* ont été déduites des équations de transport *(7.42)*, qui supposent implicitement que les processus d'auto-diffusion sont de type markovien, donc qu'ils ne dépendent pas de l'histoire, c'est-à-dire des processus de transport antérieurs, ce qui est bien le cas des solides usuels. Mais rien n'interdit à priori d'imaginer des réseaux solides pour lesquels ces processus de transport ne seraient pas de type markovien.
A titre d'exemple, on peut imaginer un réseau hypothétique dans lequel les lacunes seraient très fortement ancrées au réseau ($B_L(\tau,T) \to \infty$), alors que les interstitiels seraient quasi-

ment libres de s'y mouvoir ($B_I(\tau,T)\to 0$). Les équations de mouvement *(7.61)* deviendraient en ce cas, en tenant compte de l'hypothèse 2

$$\begin{cases} \Delta\vec{\varphi}_L^{rot} \cong \dfrac{m}{B_L}\dfrac{\partial\vec{\phi}^{rot}}{\partial t} \\ m\dfrac{\partial\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}}{\partial t} \cong -m\dfrac{\partial\vec{\phi}^{rot}}{\partial t} \end{cases} \qquad (17.28)$$

Les solutions de ces équations hypothétiques s'écrivent alors simplement, en introduisant un vecteur vitesse constant $\vec{v}_I^{rot}$

$$\begin{cases} \Delta\vec{\varphi}_L^{rot} \to 0 \\ \Delta\vec{\varphi}_I^{rot} \cong \vec{\phi}^{rot} + \vec{v}_I^{rot} \end{cases} \qquad (17.29)$$

En conséquence, la quantité de mouvement $n\vec{p}^{rot}$ au sein du solide peut s'écrire

$$n\vec{p}^{rot} = nm\left[\vec{\phi}^{rot} + \left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot} + C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}\right] = nm\left[\vec{\phi}^{rot} + \left(2C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot} + C_I\vec{v}_I^{rot}\right] \qquad (17.30)$$

Le transport de masse $n\vec{p}^{rot}$ contient maintenant un terme $\left(2C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ associé à la fois aux lacunes et aux interstitiels, dont le coefficient $\left(2C_I - C_L\right)$ est l'analogue de la susceptibilité magnétique χ en électromagnétisme, et qui peut prendre une valeur positive ou négative suivant les concentrations C_I et C_L de défauts ponctuels. Il contient de plus le terme $nmC_I\vec{v}_I^{rot}$ associé à un transport de masse par mouvement inertiel conservatif des interstitiels, parfaitement analogue à l'aimantation permanente $\vec{M}$ des matériaux ferromagnétiques et antiferromagnétiques en électromagnétisme.

La présence du terme constant $nmC_I\vec{v}_I^{rot}$ dans $n\vec{p}^{rot}$ correspond très clairement à un processus de type non markovien, puisque la valeur de $\vec{v}_I^{rot}$ doit essentiellement dépendre de l'histoire de cet hypothétique réseau solide. On pourrait imaginer par exemple que le mouvement des interstitiels soit contrôlé par un frottement de type sec avec le réseau, auquel cas il existerait une force critique de désancrage des interstitiels, ce qui conduirait à l'apparition de cycles d'hystérèse de $\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}(t)$ en fonction de $\vec{\phi}^{rot}(t)$, absolument analogues aux cycles d'hystérèse de la magnétisation $\vec{M}(t)$ en fonction du champ magnétique $\vec{H}(t)$ observés dans les matériaux ferromagnétiques ou antiferromagnétiques!

De l'analogie complète avec la théorie de l'électromagnétisme

L'analogie complète entre les paramètres de notre théorie et ceux de la théorie de Maxwell de l'éectromagnétisme est reportée dans le tableau 17.2.

Des effets d'une expansion volumique du réseau dans le référentiel absolu du GO

Dans cette analogie, l'existence d'une translation uniforme à vitesse $\vec{\phi}_O(t)$ non nulle du réseau, donc du repère local $Ox_1x_2x_3$ par rapport au référentiel absolu $O\xi_1\xi_2\xi_3$ du **GO**, aurait pour analogue, dans les équations de Maxwell, un champ magnétique $\vec{H}_0(t)$ homogène dans l'espace. Cette dernière remarque implique que, si un réseau solide était en expansion dans le référentiel absolu du **GO**, il devrait apparaître un champ $\vec{\phi}_O(t)$ dans les repères locaux $Ox_1x_2x_3$. Ce champ $\vec{\phi}_O(t)$ devrait avoir pour analogue un champ magnétique $\vec{H}_0(t)$ *localement homogène* dans l'espace *si l'Univers était en expansion*, et qui pointerait dans la direction

.

du mouvement du repère local de l'observateur par rapport à l'espace absolu!

Table 17.2 - The complete analogy with the Maxwell's theory of electromagnetism

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{\acute{e}l} \\ n\vec{p}^{rot} \\ \vec{m}/2 \\ \vec{\phi}^{rot} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D} = \textit{champ électrique de déplacement} \\ \vec{B} = \textit{champ d'induction magnétique} \\ \vec{E} = \textit{champ électrique} \\ \vec{H} = \textit{champ magnétique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\vec{J} \\ 2\lambda \\ \vec{\lambda}^{rot} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j} = \textit{courant électrique} \\ \rho = \textit{densité de charges électriques} \\ \textbf{?} = \textit{inconnu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1/\left(K_2 + K_3\right) \\ nm \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0 = \textit{permittivité diélectrique du vide} \\ \mu_0 = \textit{perméabilité magnétique du vide} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\vec{\omega}^{an} \\ \left(C_I - C_L\right) \\ \left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)/n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{P} = \textit{polarisation diélectrique de la matière} \\ \left(\chi^{para} + \chi^{dia}\right) = \textit{susceptibilité paramagnétique et diamagnétique de la matière} \\ \vec{M} = \textit{magnétisation de la matière} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\phi}^{rot} \wedge \vec{m}/2 \\ c_t = \sqrt{\left(K_2 + K_3\right)/mn} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{H} \wedge \vec{E} = \textit{vecteur de Poynting} \\ c = \sqrt{1/(\varepsilon_0 \mu_0)} = \textit{vitesse de la lumière} \end{cases}$$

De l'inexistence de monopôles magnétiques dans cette analogie

L'équation $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot}) = 0$ reflète le fait qu'on considère un solide avec un champ d'expansion volumique statique et homogène. L'existence d'une valeur non nulle et constante de $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})$, telle que

$$\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot}) = \mathrm{div}\left[mn\left(1 + C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}\right] + \mathrm{div}\left[m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)\right] \neq 0 \qquad (17.31)$$

impliquerait qu'il existe un champ constant et divergent de vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ des sites de réseau, et donc, avec l'hypothèse que $\tau = cste$, une source de sites de réseau S_n non nulle

$$\mathrm{div}\,\vec{\phi}^{rot} \cong \underbrace{\partial\tau/\partial t}_{=0} + \frac{S_n}{n} = \frac{S_n}{n} \qquad (17.32)$$

ou qu'il existe un flux constant et divergent d'auto-diffusion $m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)$, et par conséquent des sources localisées et non nulles de défauts ponctuels S_{I-L}, S_L^{pl} et/ou S_I^{pl}, qui s'écriraient, en tenant compte de hypothèse que $C_I = cste$ et $C_L = cste$, sous la forme

$$\begin{cases} n\dfrac{\partial C_L}{\partial t} \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{J}_L^{rot} = \left(S_{I-L} + S_L^{pl}\right) - C_L\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) \\ n\dfrac{\partial C_I}{\partial t} \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{J}_I^{rot} = \left(S_{I-L} + S_I^{pl}\right) - C_I\left(S_L^{pl} - S_I^{pl}\right) \end{cases} \qquad (17.33)$$

Dans le cadre de l'analogie avec l'électromagnétisme, une relation $\mathrm{div}(n\vec{p}^{\,rot}) = cste \neq 0$ aurait pour analogue la relation $\mathrm{div}\,\vec{B} = cste \neq 0$. Or, cette dernière relation fait apparaître la notion bien connue de *monopôles magnétiques*, de *particules de charge magnétique unipolaire*, proposées par certaines théories, mais jamais observées expérimentalement, et qui seraient donc des analogues de sources localisées et continues de sites de réseau ou de défauts ponctuels !
En fait, l'existence d'une analogie entre deux théories est toujours très fructueuse en physique, par l'apport réciproque de chacune des théories. Dans notre cas, il est clair que cette analogie avec la théorie des champs électromagnétiques va nous permettre dans la suite d'utiliser pour la description d'un réseau tout l'arsenal des outils théoriques développés depuis fort longtemps en théorie des champs, telles que, par exemple, la transformation de Lorentz ou la théorie des potentiels retardés. Dans l'autre sens, la théorie développée ici est en fait une théorie nettement plus complexe que l'électromagnétisme classique, puisqu'elle découle d'une théorie tensorielle qui peut être réduite à une théorie vectorielle par contraction sur les indices des tenseurs, et en choisissant de plus des cas particuliers « bridés » de comportement du réseau solide. En tenant compte de l'aspect tensoriel de la théorie des réseaux solides et en renonçant au « bridage » des comportements de ceux-ci, l'analogie va devenir particulièrement intéressante et fructueuse, comme on le verra par la suite.

De l'existence possible de «charges électriques vectorielles» dans cette analogie

On peut légitimement se demander ce que pourrait être l'analogie de la densité de charges de flexion $\vec{\lambda}^{rot}$ dans les équations de Maxwell. S'il existait une grandeur analogue à $\vec{\lambda}^{rot}$ dans les équations de Maxwell, on pourrait la qualifier hypothétiquement de *densité* $\vec{\rho}$ *de «charges électriques vectorielles»* en posant l'analogie suivante

$$\vec{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\lambda}^{rot} \tag{17.34}$$

Les équations de Maxwell s'écriraient alors un peu différemment des équations connus, avec un terme supplémentaire de charge non pas dans l'équation $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ comme le suggèrent les théories de monopôles magnétiques, mais dans l'équation $\partial\vec{B}/\partial t = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \vec{j} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \kappa\vec{\rho} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases} \tag{17.35}$$

dans lesquelles κ est un nouveau *coefficient électrique*, analogue du module $2K_2$

$$\kappa \;\Leftrightarrow\; 2K_2 \tag{17.36}$$

Dans le cas statique, si une telle charge vectorielle existait vraiment, l'équation la contenant s'écrirait de la façon suivante

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \kappa\vec{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \kappa\vec{\rho} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{D} = \varepsilon_0\kappa\vec{\rho} \tag{17.37}$$

de sorte que la densité $\vec{\rho}$ de *«charges électriques vectorielles»* serait source d'un champ électrique $\vec{E}$ rotationnel et d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ rotationnel, tout comme la densité scalaire ρ de charges électriques est source d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ divergent

.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{D} = \rho \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{\rho} \end{cases} \qquad (17.38)$$

Si on compare maintenant les coefficients des deux théories, on obtient les analogies suivantes

$$\varepsilon_0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\left(K_2 + K_3\right)} \quad et \quad \kappa \;\Leftrightarrow\; 2K_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0\kappa \;\Leftrightarrow\; \frac{2K_2}{K_2 + K_3} \qquad (17.39)$$

Mais les observations expérimentales n'ont jamais mis en évidence l'existence de telles *«charges électriques vectorielles».* En fait, deux raisons peuvent être invoquées pour expliquer cet état de fait: soit que les *«charges électriques vectorielles»* n'existent simplement pas, soit que le coefficient $\varepsilon_0\kappa$ soit suffisamment faible pour occulter complètement la présence de ces *«charges électriques vectorielles»*, donc que

$$\left|\varepsilon_0\kappa\right| << 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2K_2}{K_2 + K_3}\right| << 1 \qquad (17.40)$$

Partant du fameux adage que *«tout ce qui n'est pas interdit doit exister»*, on peut déduire ici une nouvelle conjecture pour notre théorie, à savoir

Conjecture 4: *les modules* K_2 *et* K_3 *devraient satisfaire la relation* $\left|K_2\right| << \left|K_3\right|$, *ou bien le module* K_2 *pourrait même être nul* $\left(K_2 = 0\right)$ (17.41)

Nous reviendrons plus tard sur cette conjecture, qui est en fait appelée à jouer elle aussi un rôle considérable.

Chapitre 18

Résolution de l'équation de Newton en présence de singularités topologiques

Dans ce chapitre, on montre qu'en présence d'une singularité topologique *l'équation de Newton du réseau cosmologique* peut être séparée en deux équations partielles: une «*première équation partielle de Newton*» qui permet de résoudre le problème des champs et énergies élastiques de distorsion associés à la présence de la singularité topologique, et une «*deuxième équation partielle de Newton*» qui gère les champs de perturbation d'expansion dus aux énergies élastique et potentielle de la singularité topologique. On discute ensuite sommairement de l'exploitation qui sera faite des équations partielles ainsi obtenues grâce à cette séparabilité de l'équation de Newton.

18.1 – Séparabilité de l'équation de Newton en deux équations gérant les «distorsions élastiques» et les «perturbations d'expansion» associées à une singularité topologique du réseau

Supposons l'existence d'une singularité localisée de charges de dislocation de forme sphérique, tubulaire ou membranaire, contenant des densités de charges $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ et/ou λ, et supposons qu'on puisse négliger l'anélasticité et l'auto-diffusion dans le réseau, en posant que

Hypothèse: $$\frac{dC_I}{dt}=\frac{dC_L}{dt}=0 \quad \& \quad \vec{\alpha}_i^{an}=0\,,\vec{\omega}^{an}=0 \qquad (18.1)$$

L'équation de Newton *(13.14)* fournit alors une équation du réseau qui s'écrit

$$\begin{cases} n\,d\vec{p}\,/\,dt=-2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{\acute{e}l}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(4K_2\,/\,3+2K_1\right)\tau+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_{dist}+2K_2\,\vec{\lambda} \\ F_{dist}=K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{\acute{e}l})^2+2K_3(\vec{\omega}^{\acute{e}l})^2+K_1\tau^2-K_0\tau \end{cases} \qquad (18.2)$$

La présence d'une singularité localisée de charges de dislocation peut être introduite dans cette équation en considérant que les champs régnant dans le réseau sont de trois natures différentes: les champs élastiques dus aux charges de la singularité, qui seront indicés *(ch)*, les champs indépendants de la singularité au sein du réseau, qui sont dus par exemple aux autres singularités, et qui seront indicés *(ext)*, le champ de fond τ_0 de l'expansion volumique du réseau et finalement un *champ de perturbation* $\tau^{(p)}$ *de l'expansion volumique dû à l'énergie de distorsion* F_{dist} *stockée dans le réseau par les champs élastiques* de la singularité considérée

$$\begin{cases} \tau=\left(\tau_0+\tau^{ch}+\tau^{ext}+\tau^{(p)}\right) \\ \vec{\alpha}_i^{\acute{e}l}=\left(\vec{\alpha}_i^{ch}+\vec{\alpha}_i^{ext}\right) \\ \vec{\omega}^{\acute{e}l}=\left(\vec{\omega}^{ch}+\vec{\omega}^{ext}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\lambda}=\left(\vec{\lambda}^{ch}+\vec{\lambda}^{ext}\right) \\ \\ \vec{p}=m\left(\vec{\phi}^{ch}+\vec{\phi}^{ext}+\vec{\phi}^{(p)}\right) \end{cases} \qquad (18.3)$$

Introduisons ces champs dans l'équation de Newton

$$nm\left(\frac{d\vec{\phi}^{ch}}{dt}+\frac{d\vec{\phi}^{ext}}{dt}+\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt}\right)=-2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{ext}+\vec{\omega}^{ch}\right)+2K_2\left(\vec{\lambda}^{ext}+\vec{\lambda}^{ch}\right)$$
$$+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\begin{array}{l}\left(4K_2/3+2K_1\right)\left(\tau^{ext}+\tau^{ch}+\tau^{(p)}\right)-K_0\left(\tau^{ext}+\tau^{ch}+\tau^{(p)}\right)\\+K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ext}+\vec{\alpha}_i^{ch}\right)^2+2K_3\left(\vec{\omega}^{ext}+\vec{\omega}^{ch}\right)^2+K_1\left(\tau_0+\tau^{ext}+\tau^{ch}+\tau^{(p)}\right)^2\end{array}\right] \qquad (18.4)$$

et développons les termes de cette équation en les regroupant judicieusement

$$nm\left(\frac{d\vec{\phi}^{ch}}{dt}+\frac{d\vec{\phi}^{ext}}{dt}+\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt}\right)=-2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{ext}\right)-2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{ch}\right)+2K_2\,\vec{\lambda}^{ext}+2K_2\,\vec{\lambda}^{ch}$$
$$+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\begin{array}{l}+\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)\tau^{ext}+\left(K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ext}\right)^2+2K_3\left(\vec{\omega}^{ext}\right)^2+K_1\left(\tau^{ext}\right)^2\right)\\+\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)\tau^{ch}+\left(K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ch}\right)^2+2K_3\left(\vec{\omega}^{ch}\right)^2+K_1\left(\tau^{ch}\right)^2\right)\\+\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}+\tau^{ch})-K_0\right)\tau^{(p)}+K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2\\+\left(2K_2\sum_i\vec{\alpha}_i^{ch}\vec{\alpha}_i^{ext}+4K_3\vec{\omega}^{ch}\vec{\omega}^{ext}+2K_1\tau^{ch}\tau^{ext}\right)\end{array}\right] \qquad (18.5)$$

On constate que cette équation est en fait composée de trois équations couplées qui gèrent les différents champs régnant dans le réseau, et que nous allons décrire ci-dessous.

L'équation de Newton pour les champs externes à la singularité

Les champs externes à la singularité satisfont leur propre équation de Newton, qui s'écrit

$$nm\frac{d\vec{\phi}^{ext}}{dt}=-2\left(K_2+K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{ext}\right)+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)\tau^{ext}\right]$$
$$+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ext}\right)^2+2K_3\left(\vec{\omega}^{ext}\right)^2+K_1\left(\tau^{ext}\right)^2\right)+2K_2\,\vec{\lambda}^{ext} \qquad (18.6)$$

Mais cette équation n'est en fait pas parfaitement indépendante des autres champs, de par la présence de la densité de sites $n=n_0\,\mathrm{e}^{-\left(\tau_0+\tau^{ch}+\tau^{ext}+\tau^{(p)}\right)}$ dans l'expression de la quantité de mouvement associée à $\vec{\phi}^{ext}$. On peut supposer, pour simplifier le problème du traitement des champs propres à la singularité, que le champ externe τ^{ext} peut être considéré comme constant, c'est-à-dire que $\vec{\phi}^{ext}=0$ et $\tau^{ext}=\tau^{ext}(\vec{r})$, auquel cas l'équation (18.6) sous sa forme statique devient parfaitement indépendante des champs τ^{ch} et $\tau^{(p)}$.

La «première équation partielle de Newton» pour les champs de distorsions élastiques associés à la singularité topologique

Les champs $\vec{\omega}^{ch}$, τ^{ch} et $\tau^{(p)}$ associés à la singularité satisfont alors deux équations partielles de Newton fortement couplées. La première traite *les champs de distorsions élastiques* $\vec{\omega}^{ch}$ *et* τ^{ch} *associés aux charges que contient la singularité*, et s'écrit en toute généralité

$$nm\frac{d\vec{\phi}^{ch}}{dt} = -2\left(K_2 + K_3\right)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\omega}^{ch}\right) + \left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{ch} + 2K_2\,\vec{\lambda}^{ch} \qquad (18.7)$$

Cette équation est couplée aux champs τ^{ext} et $\tau^{(p)}$ par l'expression $n = n_0\,\mathrm{e}^{-\left(\tau_0+\tau^{ch}+\tau^{ext}+\tau^{(p)}\right)}$ apparaissant dans l'expression de la quantité de mouvement associée à $\vec{\phi}^{ch}$. Dans le cas statique, ce couplage disparaît, de sorte qu'elle permet de déduire les champs statiques de distorsions élastiques $\vec{\omega}^{ch}$ et τ^{ch} générés par la singularité topologique de manière totalement indépendante des champs τ^{ext} et $\tau^{(p)}$.

On constate entre autre que cette équation partielle de Newton dépend de la densité de charges de flexion $\vec{\lambda}^{ch}$ de la singularité. La divergence de cette équation sous sa forme statique fournit alors une équation statique dépendant de la densité de charges de courbure θ^{ch} de la singularité, puisque la divergence de la densité de charges de flexion est égale à la densité de charges de courbure de la singularité

$$\Delta\left(\tau^{ch}_{statique}\right) = -\frac{2K_2}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}\,\mathrm{div}\,\vec{\lambda}^{ch} = -\frac{2K_2}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}\,\theta^{ch} \qquad (18.8)$$

La «deuxième équation partielle de Newton» pour les champs de perturbation d'expansion associés à la singularité topologique

La dernière équation partielle de Newton qu'on peut extraire de (18.5) traite le problème de la perturbation $\tau^{(p)}$ du champ d'expansion par l'énergie élastique stockée dans le réseau par la singularité. Elle s'écrit

$$nm\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\begin{array}{l}\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}+\tau^{ch}) - K_0\right)\tau^{(p)} + K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2 \\ +\left(K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ch}\right)^2 + 2K_3\left(\vec{\omega}^{ch}\right)^2 + K_1\left(\tau^{ch}\right)^2\right) \\ +\left(2K_2\sum_i\vec{\alpha}_i^{ext}\vec{\alpha}_i^{ch} + 4K_3\vec{\omega}^{ext}\vec{\omega}^{ch} + 2K_1\tau^{ext}\tau^{ch}\right)\end{array}\right] \qquad (18.9)$$

Il est clair que cette dernière équation est quant à elle très fortement couplée aux champs $\vec{\omega}^{ext}$, τ^{ext}, $\vec{\omega}^{ch}$ et τ^{ch} déduits des deux autres équations de Newton. On constate d'abord un couplage dynamique via le terme $n = n_0\,\mathrm{e}^{-\left(\tau_0+\tau^{ch}+\tau^{ext}+\tau^{(p)}\right)}$ apparaissant dans l'expression de la quantité de mouvement associée à $\vec{\phi}^{(p)}$. Il apparaît aussi un terme de couplage associé au module K_1 sous la forme $2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}+\tau^{ch})$. Mais les principaux termes de couplages sont ceux dus à l'énergie élastique de la singularité et à l'énergie de couplage de la singularité avec les champs externes, qui apparaissent dans deux contributions particulières qui ont des significations très précises:

- *la densité d'énergie élastique* stockée dans le réseau par les champs élastiques dus à la singularité, autrement dit *la densité d'énergie de distorsion de la singularité*

$$F^{ch}_{dist} = K_2\sum_i\left(\vec{\alpha}_i^{ch}\right)^2 + 2K_3\left(\vec{\omega}^{ch}\right)^2 + K_1\left(\tau^{ch}\right)^2 \qquad (18.10)$$

- *la densité d'énergie de couplage* de la singularité avec les champs externes, autrement dit *la densité d'énergie potentielle* de la singularité

.

$$F_{pot}^{ch} = 2K_2 \sum_i \vec{\alpha}_i^{ext} \vec{\alpha}_i^{ch} + 4K_3 \vec{\omega}^{ext} \vec{\omega}^{ch} + 2K_1 \tau^{ext} \tau^{ch} \quad (18.11)$$

En supposant connus les deux termes $F_{dist}^{ch}(\vec{r},t)$ et $F_{pot}^{ch}(\vec{r},t)$, obtenus par la résolution des équations *(18.6)* et *(18.7)*, l'équation de Newton pour les perturbations d'expansion $\tau^{(p)}$ dues à la singularité peut s'écrire symboliquement sous la forme

$$nm \frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}} \left[\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}+\tau^{ch}) - K_0 \right) \tau^{(p)} + K_1 \left(\tau^{(p)} \right)^2 + F_{dist}^{ch}(\vec{r},t) + F_{pot}^{ch}(\vec{r},t) \right] \quad (18.12)$$

Dans le cas statique, si on a résolu les équations *(18.6)* et *(18.7)* prises à l'état statique, et qu'on connaît par conséquent les valeurs d'équilibre des champs $\vec{\omega}^{ext}(\vec{r})$, $\tau^{ext}(\vec{r})$, $\vec{\omega}^{ch}(\vec{r})$ et $\tau^{ch}(\vec{r})$, l'équation d'équilibre pour le champs statique de perturbation s'écrit alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left\{ \left[4K_2/3 + 2K_1 \left(1+\tau_0+\tau^{ext}(\vec{r})+\tau^{ch}(\vec{r}) \right) - K_0 \right] \tau^{(p)} + K_1 \left(\tau^{(p)} \right)^2 + F_{dist}^{ch}(\vec{r}) + F_{pot}^{ch}(\vec{r}) \right\} = 0 \quad (18.13)$$

dont la solution est une équation du deuxième degré en $\tau^{(p)}(\vec{r})$

$$K_1 \left(\tau^{(p)}(\vec{r}) \right)^2 + \left[4K_2/3 + 2K_1 \left(1+\tau_0+\tau^{ext}(\vec{r})+\tau^{ch}(\vec{r}) \right) - K_0 \right] \tau^{(p)}(\vec{r}) + \left(F_{dist}^{ch}(\vec{r}) + F_{pot}^{ch}(\vec{r}) \right) = cste = 0 \quad (18.14)$$

dans laquelle les densités d'énergie $F_{dist}^{ch}(\vec{r})$ et $F_{pot}^{ch}(\vec{r})$, qui sont données par les relations (18.10) et (18.11), sont calculées à partir des champs externes $\vec{\alpha}_i^{ext}, \vec{\omega}^{ext}, \tau^{ext}$ à la singularité et des champs élastiques $\vec{\alpha}_i^{ch}, \vec{\omega}^{ch}, \tau^{ch}$ dus à la singularité.

La constante $cste$ a été introduite lors du passage du gradient à l'argument du gradient. Cependant, comme $\tau^{(p)}(\vec{r})$ doit forcément être identiquement nulle si l'énergie $F_{dist}^{ch}(\vec{r}) + F_{pot}^{ch}(\vec{r})$ est nulle, cette constante ne peut être que nulle.

18.2 – Des conséquences de la séparabilité de l'équation de Newton en présence d'une singularité topologique du réseau

De la méthode de recherche des champs associés à une singularité topologique

La décomposition de l'équation de Newton en trois équations partielles que nous venons d'établir fait apparaître une équation *(18.6)* pour les champs externes, une équation *(18.7)* pour les champs de distorsions élastiques associés à la présence d'une singularité topologique et une équation *(18.9)* pour les champs de perturbation de l'expansion dus aux énergies de distorsions élastiques associées à la singularité topologique.

La méthodologie à utiliser pour résoudre le problème des champs associés à une singularité topologique est alors la suivante:

- dans une première étape, on doit résoudre de manière indépendante l'équation partielle de Newton *(18.7),* ou l'équation *(18.8)* dans un cas statique, afin de trouver les champs de distorsions élastiques $\vec{\omega}^{ch}$ et τ^{ch} générés par la singularité, sans tenir compte des perturbations de l'expansion dues aux énergies $F_{dist}^{ch}(\vec{r},t)$ et $F_{pot}^{ch}(\vec{r},t)$ de la singularité,
- ensuite, à partir des champs élastiques $\vec{\omega}^{ch}$ et τ^{ch} obtenus précédemment par l'équation partielle de Newton *(18.7)*, on calcule à l'aide de l'équation *(18.12),* ou de l'équation *(18.14)* dans le cas statique, les perturbations additionnelles du champ d'expansion dues aux énergies élastiques $F_{dist}^{ch}(\vec{r},t)$ et $F_{pot}^{ch}(\vec{r},t)$ de la singularité.

Ce processus paraît à première vue assez complexe, mais il contient une potentialité énorme en ce qui concerne la description et l'interprétation des comportements des singularités topologiques au sein du réseau cosmologique. En effet, nous allons le montrer dans la suite de cet ouvrage en traitant en détail les thématiques suivantes:

Du lien entre la «première équation partielle de Newton» pour les champs de distorsions élastiques et la Relativité Restreinte d'Einstein

L'équation partielle de Newton *(18.7)* permettant de trouver les champs de distorsions élastiques associés aux singularités topologiques va nous permettre de calculer les champs et les énergies associés aux dislocations vis, aux dislocations coin, aux boucles de désinclinaison vis, aux boucles de dislocation coin et aux boucles de dislocation mixtes (chapitre 19), et de montrer que ces champs sont soumis à une *dynamique relativiste* (chapitre 20), ce qui nous permettra de discuter le *«rôle d'éther»* que joue le réseau cosmologique vis-à-vis des singularités topologiques, ainsi que des analogies et différences d'avec la *Relativité Restreinte d'Einstein*.

Du lien entre la «deuxième équation partielle de Newton» pour les champs de perturbations d'expansion et la Relativité Générale d'Einstein ainsi que la Physique Quantique

L'équation partielle de Newton *(18.9)* permettant de trouver les perturbations d'expansion volumique associées est très importante aussi.
En effet, nous verrons dans les chapitres 22 à 26 que celle-ci, sous sa forme statique appliquée à des amas macroscopiques de singularités, permet de retrouver les effets gravitationnelles, et de discuter des analogies et des différences de notre théorie d'avec la *Gravitation de Newton*, la *Relativité Générale d'Einstein* et la *Cosmologie moderne de l'Univers*.
Puis nous verrons dans les chapitres 27 à 29 que cette équation partielle, sous sa forme dynamique appliquée aux singularités microscopiques, permet de retrouver la *Physique Quantique*, et de discuter les analogies et les différences d'avec les *équations de Schrödinger*, les *concepts de fermions et bosons*, les *principes d'incertitude d'Heisenberg et d'exclusion de Pauli*, et les *notions de spin et de moment magnétique* des particules élémentaires.

Chapitre 19

Singularités topologiques au sein d'un réseau cosmologique

Dans ce chapitre, on utilise la première équation partielle de Newton du réseau cosmologique en présence d'une singularité topologique pour calculer les champs de distorsions, l'énergie de repos, l'énergie cinétique classique et la masse d'inertie des dislocations vis et coin. On montre alors qu'il est possible de définir un *réseau cosmologique parfait* satisfaisant certaines conditions précises, qui permet de retrouver l'*expression d'Einstein* $E_0 = M_0 c^2$ sans aucunement faire appel au principe de relativité, aussi bien pour les dislocations vis que pour les dislocations coin.
On calcule ensuite les champs de rotation et de flexion associés respectivement aux charges de rotation et de courbure d'une singularité topologique macroscopique localisée au sein du réseau.
Finalement, on décrit les différentes singularités topologiques élémentaires qu'on peut former avec des boucles de dislocation et des boucles de désinclinaison. On utilise alors les charges globales de rotation et de courbure des ces singularités élémentaires pour calculer les champs à grande distance de ces singularités.
Finalement, on discute pourquoi ces singularités élémentaires pourraient bien être les briques élémentaires permettant de construire les particules élémentaires du Modèle Standard.

19.1 – Champs, énergies et masse d'inertie d'une dislocation vis

Les champs élastiques de cisaillement et de rotation locale d'une dislocation vis

Dans un *réseau cosmologique*, le champ de rotation d'une corde de dislocation vis est évidemment le même que celui trouvé dans le cas du solide parfait à la section 12.3

$$\vec{\omega}_{ext}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3}{x_1^2 + x_3^2} \qquad (r > R) \tag{19.1}$$

$$\vec{\omega}_{int}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi R^2}\vec{r} = \frac{\Lambda}{2\pi R^2}\left(x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3\right) \quad (r < R) \tag{19.2}$$

et le comportement du module de $\vec{\omega}^{vis}$ en fonction de la distance r du centre de la corde est celui reporté à la figure 12.2. Il en va de même pour le champ extérieur de déplacement par rotation, qui s'écrit donc, en coordonnées cartésiennes ou polaires

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = -\vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\arctan\frac{x_1}{x_3} = \frac{\Lambda}{\pi}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_2 \tag{19.3}$$

En utilisant les relations *(2.48)* valables en-dehors de la corde de dislocation, on peut aisément déduire le champ de cisaillement à l'extérieur de la corde vis à partir du champ de ce déplace-

ment externe

$$\alpha_{1\,ext}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_3}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 \quad ; \quad \alpha_{2\,ext}^{vis} = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_3}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_3 \quad ; \quad \alpha_{3\,ext}^{vis} = -\frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 \tag{19.4}$$

L'énergie élastique de distorsion d'une vis immobile

L'énergie de repos total de la corde de dislocation vis est obtenue à partir de l'énergie potentielle élastique $F = K_2\sum(\vec{\alpha}_i^{\acute{e}l})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{\acute{e}l})^2 + K_1(\tau\ )^2 - K_0\tau$ stockée par unité de volume en-dehors de la corde. Il vient donc deux termes d'énergie associés à la dislocation vis: le terme d'énergie de distorsion élastique F_{dist}^{vis} par rotation locale et cisaillements dû à à la charge linéique Λ de la dislocation vis

$$F_{dist}^{vis} = K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{vis})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{vis})^2 = \left(K_2+K_3\right)\frac{\Lambda^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} \tag{19.5}$$

et le terme d'énergie $F_{\tau^{(p)}}^{vis}$ associé à la perturbation $\tau^{(p)}$ de l'expansion volumique générée par l'énergie F_{dist}^{vis}, perturbation qui se calcule avec l'équation *(18.13)*

$$F_{\tau^{(p)}}^{vis} = \left[2K_1\tau_0 - K_0\right]\tau^{(p)} + K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2 \tag{19.6}$$

Le terme d'énergie de distorsion élastique pure de la vis dépend essentiellement du champ de déformation externe comme nous l'avons vu à la section 12.3

$$E_{dist}^{vis} = \int_a^{R_\infty} F_{dist}^{vis}\,2\pi r\,dr = \cong \left(K_2+K_3\right)\int_a^{R_\infty}\frac{\Lambda^2}{2\pi^2 r^2}2\pi r\,dr = \frac{\left(K_2+K_3\right)\Lambda^2}{\pi}\ln\frac{R_\infty}{a} = \frac{\left(K_2+K_3\right)\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi}\ln\frac{R_\infty}{a} \tag{19.7}$$

dans laquelle R_∞ est la *dimension externe* du réseau cosmologique et a est le pas du réseau cosmologique, avec évidemment $R_\infty >> a$.
Quant au terme de perturbations d'expansion $\tau^{(p)}$ générées par l'énergie F_{dist}^{vis} et à l'énergie $F_{\tau^{(p)}}^{vis}$ stockée par ces perturbations, on y reviendra plus tard.

L'énergie cinétique associée aux distorsions d'une vis se déplaçant à basse vitesse

Dans le cas où une dislocation vis est en mouvement dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ faible par rapport à la célérité des ondes transversales c_t, le champ de vitesse associé au champ de déplacement élastique $\vec{u}_{ext}^{vis}$ de la dislocation vis est donné par la relation *(12.46)*

$$\vec{\phi}_{ext}^{vis} = -\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\frac{-x_3}{x_3^2+\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2}\boldsymbol{v} \tag{19.8}$$

et l'énergie cinétique stockée dans le réseau par ce champ de vitesse, exprimée par unité de longueur de la dislocation vis en mouvement, est donnée par la relation *(12.49)*

$$E_{cin}^{vis} = \frac{mn\Lambda^2}{2\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 = \frac{mn\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{8\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 \tag{19.9}$$

En comparant l'énergie cinétique E_{cin}^{vis} stockée dans le réseau par le mouvement de la ligne avec l'énergie potentielle élastique E_{dist}^{vis} stockée dans le réseau par la présence de cette même ligne, on a la relation entre l'énergie de repos et l'énergie cinétique d'une dislocation vis

$$E_{cin}^{vis} = \frac{1}{2}\frac{mn}{(K_2+K_3)}\frac{(K_2+K_3)\Lambda^2}{\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{E_{dist}^{vis}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 \qquad (19.10)$$

Cette énergie cinétique E_{cin}^{vis} est stockée dans le réseau solide par la déformation dynamique du réseau imposée par la dislocation vis mobile.

La masse d'inertie par unité de longueur de la dislocation vis à basse vitesse

Avec la relation *(19.10)*, on retrouve la fameuse *expression d'Einstein* reliant la *masse d'inertie* à l'énergie de repos via la célérité des ondes transversales pour une dislocation vis dans le réseau cosmologique

$$E_{cin}^{vis} = \frac{1}{2}M_0^{vis}\boldsymbol{v}^2 \quad \Rightarrow \quad M_0^{vis} = \frac{1}{c_t^2}E_{dist}^{vis} \quad \Rightarrow \quad E_{dist}^{vis} = M_0^{vis}c_t^2 \qquad (19.11)$$

Cette relation est trouvée ici *sans aucunement faire appel à une dynamique relativiste de la ligne*, car elle est due au fait que l'énergie de repos E_{dist}^{vis} et l'énergie cinétique E_{cin}^{vis} ne sont rien d'autre que de l'énergie potentielle élastique (de cisaillement et de rotation locale) et de l'énergie cinétique stockée au sein du réseau par la déformation dynamique imposée à ce réseau par les champs de distorsion élastique (cisaillement et rotation locale) de la dislocation vis mobile!

19.2 – Champs, énergies et masse d'inertie d'une dislocation coin

L'équation de Newton pour une dislocation coin dans le réseau cosmologique

En présence d'une dislocation vis ou coin de charge linéique Λ ou $\vec{\Lambda}$, *les champs de distorsion élastique* $\vec{\omega}^{ch}$ *et* τ^{ch} *associés à ces charges satisfont l'équation partielle de Newton (18.7),* à savoir

$$nm\frac{d\vec{\phi}^{ch}}{dt} = -2(K_2+K_3)\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\omega}^{ch}) + (4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{ch} + 2K_2\vec{\lambda}^{ch} \qquad (19.12)$$

Comme on l'a vu au chapitre précédent, cette équation est couplée aux champs extérieurs τ^{ext} et au champ de perturbation de l'expansion $\tau^{(p)}$ dû à la densité d'énergie des charges par la valeur $n = n_0\,\mathrm{e}^{-(\tau_0+\tau^{ch}+\tau^{ext}+\tau^{(p)})}$ apparaissant dans le terme $nm\,d\vec{\phi}^{ch}/dt$.
Mais dans le cas statique, ce couplage disparaît, de sorte que l'équation *(19.12)* permet alors de déduire les champs statiques $\vec{\omega}^{ch}$ et τ^{ch} générés par la singularité de charges de manière totalement indépendante des champs τ^{ext} et $\tau^{(p)}$ grâce à l'équation statique

$$-2(K_2+K_3)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{ch} + (4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{ch} = -2K_2\vec{\lambda} \qquad (19.13)$$

Les champs élastiques de rotation et d'expansion volumique d'une dislocation coin

Considérons donc une *corde de dislocation de type coin,* sous la forme d'un cylindre rectiligne de longueur infinie et de rayon R, comme représentée à la figure 12.1, contenant cette fois une densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charges de flexion perpendiculaire à la direction de la corde, qui pointe

dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_3$. Pour trouver les champs statiques τ, $\vec{\omega}^{coin}$ et $\vec{\alpha}_i^{coin}$ associés à cette dislocation lorsqu'elle est immobile au sein du réseau cosmologique, on peut utiliser l'équation partielle de Newton *(19.13)* dans une version légèrement modifiée, en supposant qu'il n'y a pas d'anélasticité, ni de lacunes et d'interstitiels, sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{coin} - \mathbb{C}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{coin} = \begin{cases} K_2\vec{\lambda}/\left(K_2+K_3\right) & (r<R) \\ 0 & (r>R) \end{cases} \qquad (19.14)$$

dans laquelle on a introduit un module $\mathbb{C}$ sans dimension valant

$$\mathbb{C} = \frac{4K_2/3 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0}{2\left(K_2+K_3\right)} \qquad (19.15)$$

En-dehors de la corde de type coin $(r>R)$, on doit pouvoir reprendre les solutions *(12.55)* que nous avions obtenues à la section 12.4. En ce cas, le vecteur de rotation $\vec{\omega}^{coin}$ ne doit posséder qu'une seule composante selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ qui doit dépendre de $\cos\varphi$ en coordonnées cylindriques, alors que le scalaire d'expansion τ^{coin} doit dépendre de $\sin\varphi$. D'autre part, les deux grandeurs $\vec{\omega}^{coin}$ et τ^{coin} doivent décroître en $1/r$ avec la distance r du coeur, de la même façon que pour la dislocation vis traitée précédemment. Ainsi, la solution à l'équation *(19.15)* pour $r>R$ doit assurément pouvoir s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{coin} = A\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_2 = A\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 \\ \tau^{coin} = B\dfrac{\sin\varphi}{r} = B\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (r>R) \qquad (19.16)$$

où A et B sont des constantes d'intégration. On peut alors calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{coin}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{coin}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}^{coin} = A\left[\frac{2x_1x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{x_3^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_3\right] \qquad (19.17)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{coin} = -B\left[\frac{2x_1x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{x_3^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}\vec{e}_3\right] \qquad (19.18)$$

qui, introduits dans l'équation d'équilibre *(19.15)*, fournissent la relation existant entre A et B

$$A + \mathbb{C}B = 0 \qquad (19.19)$$

A l'intérieur de la corde, on peut intégrer l'équation d'équilibre sur le cylindre de rayon R contenant la densité de charge $\vec{\lambda}$, de rayon R et de longueur unité

$$\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}_{int}^{coin}\,dV - \mathbb{C}\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau_{int}^{coin}\,dV \cong \frac{K_2}{K_2+K_3}\iiint_V \vec{\lambda}\,dV \qquad (19.20)$$

Comme l'intégrale de $\vec{\lambda}$ sur le cylindre de longueur unité fournit la charge linéique $\vec{\Lambda}$ de la corde, la relation précédente se transforme aisément en

$$\oiint_{cylindre} d\vec{S}\wedge\vec{\omega}_{int}^{coin} - \mathbb{C}\oiint_{cylindre}\tau_{int}^{coin}\,d\vec{S} \cong \frac{K_2}{K_2+K_3}\vec{\Lambda} \qquad (19.21)$$

Par symétrie, les intégrales sur les deux sections (faces latérales) du cylindre s'annulent, de sorte que, avec $d\vec{S} = R\left(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_3\sin\varphi\right)d\varphi$

$$\begin{cases} \iint\limits_S d\vec{S}\wedge\vec{\omega}_{int}^{coin} = \iint\limits_S A\dfrac{\cos\varphi}{R}\left(d\vec{S}\wedge\vec{e}_2\right) = \int\limits_0^{2\pi} A\dfrac{\cos\varphi}{R}R\left(\vec{e}_3\cos\varphi-\vec{e}_1\sin\varphi\right)d\varphi = A\pi\vec{e}_3 \\ \iint\limits_S \tau_{int}^{coin}\,d\vec{S} = \iint\limits_S B\dfrac{\sin\varphi}{R}d\vec{S} = \int\limits_0^{2\pi} B\dfrac{\sin\varphi}{R}R\left(\vec{e}_1\cos\varphi+\vec{e}_3\sin\varphi\right)d\varphi = B\pi\vec{e}_3 \end{cases} \quad (19.22)$$

Il vient donc comme résultat de l'équation d'équilibre à l'intérieur de la corde une relation parfaitement indépendante du rayon R de la corde

$$A\pi\vec{e}_3 - \mathbb{C}B\pi\vec{e}_3 \cong \frac{K_2}{K_2+K_3}\vec{\Lambda} \quad\Rightarrow\quad A-\mathbb{C}B \cong \frac{K_2}{K_2+K_3}\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi} \qquad (19.23)$$

Des relations *(19.19)* et *(19.23)*, on déduit les valeurs des constantes A et B

$$A = \frac{K_2}{K_2+K_3}\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \quad \textit{et} \quad B = -\frac{K_2}{K_2+K_3}\frac{1}{\mathbb{C}}\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \qquad (19.24)$$

A l'aide des relations *(19.16)*, en utilisant les relations des coordonnées cylindriques

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{x_1}{x_1^2+x_3^2} \Rightarrow x_1 = r\cos\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \Rightarrow x_3 = r\sin\varphi \qquad (19.25)$$

et en se rappelant que la valeur de la charge linéique $\vec{\Lambda}$ vaut $\vec{\Lambda} = \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\wedge\vec{\boldsymbol{t}}$, les champs $\vec{\omega}^{coin}$ et τ^{coin} en-dehors de la corde de dislocation s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{coin} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}^{coin} = \dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2}\vec{e}_2 = \dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_2 \\ \tau^{coin} = -\text{div}\,\vec{u}^{coin} = -\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{1}{\mathbb{C}}\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} = -\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{1}{\mathbb{C}}\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{\sin\varphi}{r} \end{cases} \quad (r>R) \quad (19.26)$$

Le champ de déplacement élastique d'une dislocation coin

Il est possible de retrouver le champ de déplacement $\vec{u}^{coin}$ à l'extérieur de la corde de dislocation coin. En effet, comme le champ $\vec{u}^{coin}$ ne peut avoir de composantes que selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$, et que $\vec{u}^{coin}$ ne doit pas dépendre de x_2, on doit avoir

$$\vec{u}^{coin} = u_1^{coin}(x_1,x_3)\vec{e}_1 + u_3^{coin}(x_1,x_3)\vec{e}_3 \qquad (19.27)$$

de sorte qu'on obtient deux équations différentielles

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{coin} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}^{coin} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3^{coin}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1^{coin}}{\partial x_3}\right)\vec{e}_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial u_3^{coin}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1^{coin}}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi}\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} \\ \tau^{coin} = -\text{div}\,\vec{u}^{coin} = -\left(\dfrac{\partial u_1^{coin}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3^{coin}}{\partial x_3}\right) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial u_1^{coin}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3^{coin}}{\partial x_3} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{1}{\mathbb{C}}\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \quad (19.28)$$

On peut alors essayer la solution classique *(12.65)* pour le champ de déplacement $\vec{u}^{coin}$

$$\begin{cases} u_1^{coin}(x_1,x_3) = \boldsymbol{\alpha}\arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right) + \boldsymbol{\beta}\dfrac{x_1x_3}{x_1^2+x_3^2} \\ u_3^{coin}(x_1,x_3) = \boldsymbol{\gamma}\ln\left(x_1^2+x_3^2\right) + \boldsymbol{\delta}\dfrac{x_1^2-x_3^2}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \quad (19.29)$$

où $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\gamma}$ sont des constantes à déterminer. Les champs $\vec{\omega}^{coin}$ et τ^{coin} s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{\omega}^{coin} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^{coin} = \left[-\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\beta-2\gamma\right)\dfrac{x_1}{x_1^2+x_3^2} + \left(\beta+2\delta\right)\dfrac{x_1x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2} \right]\vec{e}_2 \\ \tau^{coin} = -\mathrm{div}\,\vec{u}^{coin} = \left[\left(\alpha-\beta-2\gamma\right)\dfrac{x_3}{x_1^2+x_3^2} + 2\left(\beta+2\delta\right)\dfrac{x_1^2x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2} \right] \end{cases} \qquad (19.30)$$

En comparant ces relations avec (19.26), on déduit trois relations

$$\alpha-2\gamma+\beta = -\frac{K_2}{K_2+K_3}\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{\pi} \quad ; \quad \alpha-2\gamma-\beta = -\frac{K_2}{K_2+K_3}\frac{1}{\mathbb{C}}\frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi} \quad ; \quad \beta+2\delta = 0 \qquad (19.31)$$

dont les solutions sont

$$\begin{cases} \alpha-2\gamma = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}+1}{2\mathbb{C}} \\ \beta = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{2\mathbb{C}} \\ \delta = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{4\mathbb{C}} \end{cases} \qquad (19.32)$$

Avec ce système, les constantes α et γ sont encore indéterminées et il existe donc une infinité de solutions d'équilibre possibles. Résolvons pour l'instant ce problème sans faire de choix préalable de α et γ, en introduisant un *paramètre ajustable* ς tel qu'on puisse écrire

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\varsigma \\ \gamma = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\left(\dfrac{2\mathbb{C}+1}{4\mathbb{C}}-\dfrac{\varsigma}{2}\right) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{2\mathbb{C}} \\ \delta = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{4\mathbb{C}} \end{cases} \qquad (19.33)$$

Le champ de déplacement ne contient alors plus que le paramètre inconnu ς, et s'écrit

$$\begin{cases} u_1^{coin}(x_1,x_3) = -\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\varsigma\arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right) - \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{2\mathbb{C}}\dfrac{x_1x_3}{x_1^2+x_3^2} \\ u_3^{coin}(x_1,x_3) = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\left(\dfrac{2\mathbb{C}+1}{4\mathbb{C}}-\dfrac{\varsigma}{2}\right)\ln\left(x_1^2+x_3^2\right) + \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{2\mathbb{C}-1}{4\mathbb{C}}\dfrac{x_1^2-x_3^2}{x_1^2+x_3^2} \end{cases} \qquad (19.34)$$

Le champ de cisaillement élastique d'une dislocation coin

En appliquant la relation *(2.48),* à savoir

$$\vec{\alpha}_i^{coin} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;u_i^{coin} + \frac{1}{2}\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}^{coin} + \frac{1}{3}\vec{e}_i\,\mathrm{div}\,\vec{u}^{coin} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;u_i^{coin} - \vec{e}_i\wedge\vec{\omega}^{coin} - \frac{1}{3}\vec{e}_i\tau^{coin} \qquad (19.35)$$

on peut aussi déduire le tenseur de cisaillement élastique $\vec{\alpha}_i^{él}$ à l'extérieur de la corde de dislocation coin en utilisant les relations *(19.30)* et *(19.34)*. En calculant ce tenseur de cisaillement et en l'exprimant en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\left[-\left(2\varsigma-\dfrac{2}{3\mathbb{C}}+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{\mathbb{C}}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_1+\left(2\varsigma-2+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{\mathbb{C}}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_3\right] \\ \vec{\alpha}_2^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\left(\dfrac{2}{3\mathbb{C}}\right)\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_2 \\ \vec{\alpha}_3^{coin} = \dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{4\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\left[+\left(2\varsigma-2+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{\mathbb{C}}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\cos\varphi}{r}\vec{e}_1+\left(2\varsigma-\dfrac{4}{3\mathbb{C}}+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{\mathbb{C}}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\sin\varphi}{r}\vec{e}_3\right] \end{cases} \quad (19.36)$$

L'énergie élastique de repos d'une dislocation coin

L'énergie de repos de la corde de dislocation coin est obtenue à partir de l'énergie potentielle élastique $F = K_2\sum(\vec{\alpha}_i^{él})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 + K_1\tau^2 - K_0\tau$ stockée par unité de volume en-dehors de la corde, dans laquelle l'expansion volumique est donnée par $\tau = \tau_0 + \tau^{coin} + \tau^{(p)}$. Il vient donc deux termes d'énergie associés à la dislocation coin: le terme d'énergie élastique pure F_{dist}^{coin} et le terme d'énergie $F_{\tau^{(p)}}^{coin}$ associé à la perturbation $\tau^{(p)}$ de l'expansion volumique

$$\begin{cases} F_{dist}^{coin} = K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{coin})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{coin})^2 + K_1\left(\tau^{coin}\right)^2 + \left(2K_1\tau_0 - K_0\right)\tau^{coin} \\ F_{\tau^{(p)}}^{coin} = \left[2K_1\left(\tau_0+\tau^{coin}\right) - K_0\right]\tau^{(p)} + K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2 \end{cases} \quad (19.37)$$

L'énergie élastique pure de repos de la dislocation coin s'obtient par l'intégration suivante

$$\begin{aligned} E_{dist}^{coin} &= \int_a^{R_\infty}\int_0^{2\pi} F_{dist}^{coin}(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr \\ &= \int_a^{R_\infty}\int_0^{2\pi}\left[K_2\sum_i(\vec{\alpha}_i^{coin})^2 + 2K_3(\vec{\omega}^{coin})^2 + K_1(\tau^{coin})^2 + \left(2K_1\tau_0 - K_0\right)\tau^{coin}\right] r\, d\varphi\, dr \end{aligned} \quad (19.38)$$

L'intégration sur les termes contenant τ^{coin} fournit, grâce à la relation *(19.26)*

$$E_{dist}^{coin}\Big|_{\tau^{coin}} = \frac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\frac{K_2\left(K_0-2K_1\tau_0\right)}{K_2+K_3}\frac{1}{\mathbb{C}}\int_a^{R_\infty}\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi\right]}_{=0}dr + \frac{K_1\vec{\Lambda}^2}{4\pi^2\mathbb{C}^2}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\int_a^{R_\infty}\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\right]}_{=\pi}\frac{dr}{r} \quad (19.39)$$

de sorte que

$$E_{dist}^{coin}\Big|_{\tau^{coin}} = \frac{K_1\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\frac{1}{\mathbb{C}^2}\ln\frac{R_\infty}{a} \quad (19.40)$$

L'intégration sur le terme contenant $(\vec{\alpha}_i^{coin})^2$ s'obtient à partir de la relation *(19.36)*

$$E_{dist}^{coin}\Big|_{\vec{\alpha}_i^{coin}} = \frac{K_2\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\left[4\varsigma^2 - 8\varsigma + \frac{2}{3}\left(\frac{1-3\mathbb{C}+9\mathbb{C}^2}{\mathbb{C}^2}\right)\right]\ln\frac{R_\infty}{a} \quad (19.41)$$

Et finalement l'intégration sur le terme contenant $(\vec{\omega}^{coin})^2$ s'obtient à partir de la relation *(19.26)*

$$E_{dist}^{coin}\Big|_{\vec{\omega}^{coin}} = 2K_3\int_a^{R_\infty}\int_0^{2\pi}(\vec{\omega}^{coin})^2\, r\, d\varphi\, dr = \frac{K_3\vec{\Lambda}^2}{2\pi}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\ln\frac{R_\infty}{a} \quad (19.42)$$

L'énergie de repos de la dislocation coin vaut par conséquent, sans tenir compte de l'énergie du champ de perturbation de l'expansion

$$E_{dist}^{coin}=\left[K_1\frac{1}{\mathbb{C}^2}+K_2\left[4\varsigma^2-8\varsigma+\frac{2}{3}\left(\frac{1-3\mathbb{C}+9\mathbb{C}^2}{\mathbb{C}^2}\right)\right]+2K_3\right]\frac{\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\ln\frac{R_\infty}{a} \qquad (19.43)$$

On constate que cette énergie de repos contient un terme dépendant du module K_2 associé aux déformations de cisaillement du milieu, un terme dépendant du module K_1 associé aux déformations par expansion volumique du milieu et un terme dépendant du module K_3 associé aux rotations locales du milieu. Et cette énergie de repos ne dépend pas du module K_0.
Quant au terme de perturbations d'expansion $\tau^{(p)}$ générées par l'énergie F_{dist}^{coin} et à l'énergie $F_{\tau^{(p)}}^{coin}$ stockée par ces perturbations, on y reviendra plus tard.

L'énergie cinétique à basse vitesse d'une dislocation coin

Dans le cas où une dislocation coin est en mouvement dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ faible par rapport à la célérité des ondes transversales c_t, les composantes du champ de vitesse s'obtiennent en remplaçant x_1 par $x_1(t)=x_1-\boldsymbol{v}t$ dans les expressions *(19.34)* des composantes du champ de déplacement, puis en effectuant la dérivation $\vec{\phi}^{coin}=-d\vec{u}^{coin}/dt$

$$\begin{cases}\phi_1^{coin}(x_1,x_3,t)=+\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varsigma\arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1-\boldsymbol{v}t}\right)+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{2\mathbb{C}}\dfrac{\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)x_3}{\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2+x_3^2}\right]\\ \phi_1^{coin}(x_1,x_3,t)=-\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\left(\dfrac{2\mathbb{C}+1}{4\mathbb{C}}-\dfrac{\varsigma}{2}\right)\ln\left[\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2+x_3^2\right]+\dfrac{2\mathbb{C}-1}{4\mathbb{C}}\dfrac{\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2-x_3^2}{\left(x_1-\boldsymbol{v}t\right)^2+x_3^2}\right]\end{cases} \qquad (19.44)$$

Après dérivation dans le système de coordonnées $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, il est très utile de passer dans le système de coordonnées $\boldsymbol{O}x_1'x_2'x_3'$ en translation à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ avec la dislocation coin, et dans lequel $x_1-\boldsymbol{v}t$ devient x_1'. Il vient alors pour le champ de vitesse en utilisant les coordonnées polaires $x_1'=r'\cos\varphi'$ et $x_3'=r'\sin\varphi'$ exprimées dans le plan du cylindre mobile

$$\begin{cases}\phi_1^{coin}(r',\varphi')=+\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{1}{r'}\left[\left(\varsigma+1-\dfrac{1}{2\mathbb{C}}\right)\cos^2\varphi'\sin\varphi'+\left(\varsigma-1+\dfrac{1}{2\mathbb{C}}\right)\sin^3\varphi'\right]\boldsymbol{v}\\ \phi_3^{coin}(r',\varphi')=-\dfrac{\vec{\Lambda}\vec{e}_3}{2\pi}\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\dfrac{1}{r'}\left[\left(\varsigma-3+\dfrac{1}{2\mathbb{C}}\right)\sin^2\varphi'\cos\varphi'+\left(\varsigma-1-\dfrac{1}{2\mathbb{C}}\right)\cos^3\varphi'\right]\boldsymbol{v}\end{cases} \qquad (19.45)$$

L'énergie cinétique de la dislocation coin s'obtient alors en effectuant l'intégrale suivante

$$E_{cin}^{coin}=\frac{1}{2}m\int_a^{R_\infty}\int_0^{2\pi}n\left(\vec{\phi}^{coin}\right)^2(r',\varphi')\,r'd\varphi'\,dr' \qquad (19.46)$$

C'est un calcul assez long qui conduit finalement à l'énergie cinétique de la dislocation coin. Cette énergie est donnée par unité de longueur, et elle dépend évidemment du paramètre ς et du module $\mathbb{C}$

$$E_{cin}^{coin}=\frac{mn\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\left(\frac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\left(2\varsigma^2-4\varsigma+\frac{1+12\mathbb{C}^2}{4\mathbb{C}^2}\right)\boldsymbol{v}^2=\frac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 \qquad (19.47)$$

La masse d'inertie par unité de longueur de la dislocation coin à basse vitesse

On a ainsi les relations suivantes pour les énergies élastique et cinétique d'une dislocation coin dans un réseau cosmologique

$$\begin{cases} E_{dist}^{coin} \cong \dfrac{\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left(\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\left(\ln\dfrac{R_\infty}{a}\right)\left\{K_1\dfrac{1}{\mathbb{C}^2}+K_2\left[4\varsigma^2-8\varsigma+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-3\mathbb{C}+9\mathbb{C}^2}{\mathbb{C}^2}\right)\right]+2K_3\right\} \\ E_{cin}^{coin} \cong \dfrac{mn\vec{\Lambda}^2}{8\pi}\left(\dfrac{K_2}{K_2+K_3}\right)^2\left(\ln\dfrac{R_\infty}{a}\right)\left\{2\varsigma^2-4\varsigma+\dfrac{1+12\mathbb{C}^2}{4\mathbb{C}^2}\right\}\boldsymbol{v}^2=\dfrac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \quad (19.48)$$

de sorte que la masse d'inertie des coins s'écrit

$$\begin{cases} M_0^{coin} \cong \left\{\dfrac{\left(K_2+K_3\right)\left(2\varsigma^2-4\varsigma+\dfrac{1+12\mathbb{C}^2}{4\mathbb{C}^2}\right)}{K_1\dfrac{1}{\mathbb{C}^2}+K_2\left[4\varsigma^2-8\varsigma+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-3\mathbb{C}+9\mathbb{C}^2}{\mathbb{C}^2}\right)\right]+2K_3}\right\}\dfrac{E_{dist}^{coin}}{c_t^2} \\ \mathbb{C} \cong \dfrac{4K_2+6K_1\left(1+\tau_0\right)-3K_0}{6\left(K_2+K_3\right)} \end{cases} \quad (19.49)$$

La relation entre l'énergie de distorsion et la masse d'inertie d'une dislocation coin diffère de la relation d'Einstein par le terme entre accolades, qui dépend du paramètre ς et des modules K_0, K_1, K_2, K_3, notamment via le module $\mathbb{C}$.

19.3 – Conditions pour qu'une coin satisfasse la relation d'Einstein

Pour assurer une analogie complète entre les singularités topologiques de notre théorie et les particules de l'Univers réel, il serait souhaitable que les dislocations coin satisfasse aussi exactement la relation d'Einstein. Or, pour qu'une dislocation coin satisfasse cette relation, il faut que le terme entre accolades de la relation *(19.49)* soit égal à 1.

Partons donc du fait que le réseau considéré est fini, et donc que les conditions aux limites sont libres, de sorte que la valeur du paramètre ς est celle qui minimise l'énergie de distorsion de la dislocation coin. A la section 12.5, on a montré que cette condition implique que

Hypothèse 1: $\varsigma = 1$ *(19.50)*

Avec cette condition, on obtient

$$M_0^{coin} \cong \left\{\frac{\left(K_2+K_3\right)\left(\dfrac{1+4\mathbb{C}^2}{4\mathbb{C}^2}\right)}{K_1\dfrac{1}{\mathbb{C}^2}+K_2\left[\dfrac{2-6\mathbb{C}+6\mathbb{C}^2}{3\mathbb{C}^2}\right]+2K_3}\right\}\frac{E_{dist}^{coin}}{c_t^2} \quad (19.51)$$

Supposons maintenant *à priori* que non seulement la conjecture 4 est satisfaite, mais que de plus la norme du module K_1 soit elle aussi beaucoup plus petite que la norme de K_3

Conjecture 5: *le module* K_1 *devrait satisfaire la relation* $|K_1| << |K_3|$ *(19.52)*

Avec cette conjecture additionnelle, la relation précédente devient beaucoup plus simple

$$M_0^{coin} \cong \frac{1+4\mathbb{C}^2}{8\mathbb{C}^2}\frac{E_{dist}^{coin}}{c_t^2} \qquad (19.53)$$

et en ce cas, pour que la relation d'Einstein soit satisfaite, il suffit que

$$\mathbb{C} = \pm 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 \cong \pm K_3 \qquad (19.54)$$

En utilisant la conjecture 1 $\left(K_2 + K_3 > 0\right)$ et la conjecture 4 $\left(\left|K_2\right| << \left|K_3\right|\right)$, on déduit que la condition d'existence des ondes transversales se réduit à ce que le module K_3 soit positif

Hypothèse 2: $K_3 > 0$ *(19.55)*

En émettant alors *à priori* une nouvelle conjecture (qui se vérifiera d'ailleurs plus tard), à savoir que le module K_0 est positif

Conjecture 6: *le module* K_0 *devrait satisfaire la relation* $K_0 > 0$ *(19.56)*

la seule solution possible de la relation *(19.54)* est alors la suivante

$$K_0 \cong K_3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = -1/2 \qquad (19.57)$$

Ainsi, si les modules élastiques d'un réseau cosmologique satisfont l'ensemble des relations suivantes, déduites des conjectures 1 à 6, et de la relation *(19.57)*, à savoir

Conjectures 0 à 6: *le «réseau cosmologique parfait»:*
$$\begin{cases} K_0 = K_3 > 0, \\ 0 < K_1 << K_0 = K_3 \\ 0 \le K_2 << K_3 = K_0 \end{cases} \qquad (19.58)$$

les dislocations vis et coin satisfont toutes deux de vraies relations d'Einstein qui sont déduites de manière purement classique, sans faire appel à un principe de relativité restreinte!

$$M_0^{vis} \cong E_{dist}^{vis}/c_t^2 \qquad \text{et} \qquad M_0^{coin} \cong E_{dist}^{coin}/c_t^2 \qquad (19.59)$$

qui sont déduites ici de manière purement classique, sans aucunement faire appel à un principe de relativité restreinte!

19.4 – Le «réseau cosmologique parfait»

Avec un soupçon de fantaisie, nous qualifierons dorénavant de ***«réseau cosmologique parfait»*** un réseau cosmologique satisfaisant toutes les conjectures 0 à 6 résumées par les relations *(19.58)*, puisque, dans un tel réseau, les champs de distorsion élastique de n'importe quel type de dislocations satisfont exactement la relation d'Einstein.

De l'universalité de la relation d'Einstein dans le réseau cosmologique parfait

Dans un *réseau cosmologique parfait*, on peut alors exprimer à partir des relations *(19.48)* les valeurs de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique non-relativiste d'une dislocation coin

$$\begin{cases} E_{dist}^{coin} \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{K_3\vec{\Lambda}^2}{2\pi}\ln\frac{R_\infty}{a} \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{K_3\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}^2}{2\pi}\ln\frac{R_\infty}{a} \\ E_{cin}^{coin} \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{mn\vec{\Lambda}^2}{4\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{mn\,\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}^2}{4\pi}\left(\ln\frac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \qquad (19.60)$$

Comparées aux énergies potentielle et cinétique non-relativiste de la dislocation vis

$$\begin{cases} E_{dist}^{vis} = \dfrac{(K_2+K_3)\Lambda^2}{\pi}\ln\dfrac{R_\infty}{a} \cong \dfrac{K_3\Lambda^2}{\pi}\ln\dfrac{R_\infty}{a} \cong \dfrac{K_3\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{4\pi}\ln\dfrac{R_\infty}{a} \\ E_{cin}^{vis} = \dfrac{mn\Lambda^2}{2\pi}\left(\ln\dfrac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{mn\,\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}^2}{8\pi}\left(\ln\dfrac{R_\infty}{a}\right)\boldsymbol{v}^2 \end{cases} \qquad (19.61)$$

on constate que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique non-relativiste d'une dislocation coin dans le *réseau cosmologique parfait* sont toutes deux *extrêmement plus faibles* que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique non-relativiste d'une dislocation vis puisque, pour une dislocations vis et une dislocation coin de vecteurs de Burgers de même norme $\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\right|$, on a, d'après la conjecture 4

$$\frac{K_2}{K_3} << 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_{dist}^{coin} \cong 2\left(K_2/K_3\right)^2 E_{dist}^{vis} <<< E_{dist}^{vis} \\ E_{cin}^{coin} \cong 2\left(K_2/K_3\right)^2 E_{cin}^{vis} <<< E_{cin}^{vis} \end{cases} \qquad (19.62)$$

Nous verrons plus tard quel rôle important pourra être attribué, dans notre analogie avec les théories physiques de l'Univers, aux faits que les dislocations coin suivent exactement la relation d'Einstein et qu'elles présentent aussi des énergies beaucoup plus faibles que les dislocations vis dans un *réseau cosmologique parfait* satisfaisant les relations *(19.58)*.

19.5 – Singularité sphérique de charge de rotation donnée

Imaginons l'existence au sein d'un réseau cosmologique parfait d'un amas macroscopique localisée de singularités topologiques, sous la forme d'une sphère de rayon R_{amas} contenant une densité λ uniforme de charges de rotation, et essayons de calculer le champ de rotation élastique $\vec{\omega}^{él}$ associé à cette charge, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la singularité.

Le champ de rotation dû à une singularité localisée de rotation

Considérons un système de coordonnées sphériques et appliquons la relation de compatibilité $\mathrm{div}\vec{\omega}^{él} = \lambda$ sous forme d'une intégration sur un volume sphérique de rayon r

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{\omega}^{él}\, dV = \iiint_V \lambda\, dV \qquad (19.63)$$

Le théorème de la divergence nous permet d'intégrer sur la surface externe de ce volume

$$\oiint_S \vec{\omega}^{él}\vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \vec{\omega}^{él}\vec{\boldsymbol{n}}\, 4\pi r^2 = \iiint_V \lambda\, dV \qquad (19.64)$$

où $\vec{\boldsymbol{n}}$ est le vecteur normale à la surface sphérique.

Introduisons la *charge globale* $\boldsymbol{Q}_\lambda$ donnée par l'intégration de la densité λ dans le volume de l'amas, ou donnée par la somme des charges élémentaires $\boldsymbol{q}_{\lambda(i)}$ au sein de l'amas

$$\iiint_V \lambda\, dV = \frac{4}{3}\pi R_{amas}^3\lambda = \boldsymbol{Q}_\lambda = \sum_i \boldsymbol{q}_{\lambda(i)} \qquad (19.65)$$

A l'extérieur de l'amas, c'est-à-dire pour $r > R_{amas}$, cette relation fournit le champ extérieur $\vec{\omega}_{ext}^{él}$ de rotation dû à l'amas de charges, qui est indépendant du rayon R_{amas} de l'amas

$$\vec{\omega}_{ext}^{\,él}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\lambda R_{amas}^3}{3}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\sum_i \boldsymbol{q}_{\lambda(i)}\right)\frac{1}{r^2} = \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi}\frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{ext}^{\,él} = \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (r > R_{amas}) \qquad (19.66)$$

Le champ $\vec{\omega}_{int}^{\,él}$ à l'intérieur de l'amas, c'est-à-dire pour $r < R_{amas}$, dépend quant à lui de R_{amas}

$$\vec{\omega}_{int}^{\,él}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\lambda}{3}r = \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi R_{amas}^3}r = \frac{\sum_i \boldsymbol{q}_{\lambda(i)}}{4\pi R_{amas}^3}r \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{int}^{\,él} = \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi R_{amas}^3}\vec{r} \qquad (r < R_{amas}) \qquad (19.67)$$

Le comportement du module de $\vec{\omega}$ en fonction de la distance r du centre de la charge est reporté à la figure 19.1.

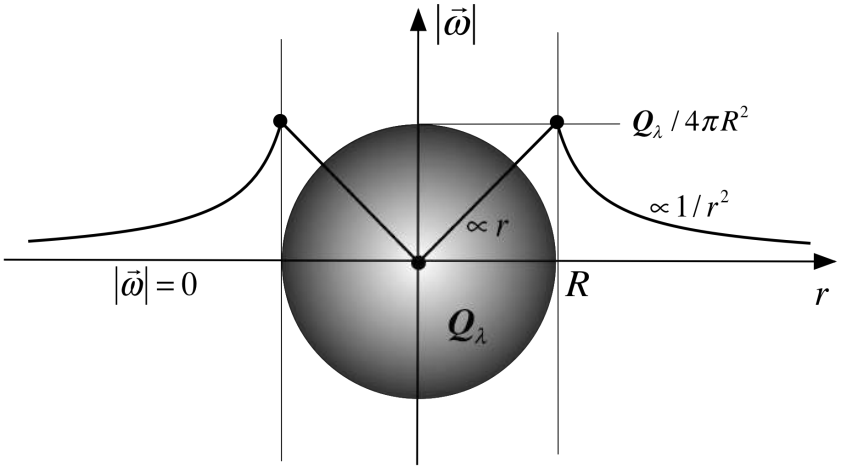


Figure 19.1 *- le champ $\vec{\omega}$ à l'intérieur et à l'extérieur d'une charge uniforme de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda > 0$*

L'énergie du champ de rotation d'une singularité de rotation

Pour calculer l'énergie élastique stockée dans le réseau par la présence du champ de rotation $\vec{\omega}^{él}$ de la singularité, autrement dit *l'énergie de distorsion élastique $E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}$ du réseau due à la charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de l'amas,* on devrait en principe calculé l'énergie associée au champ de rotation, augmentée de l'énergie des champs de cisaillement associés au champ de rotation. Mais dans le cas d'un *réseau cosmologique parfait*, on a la relation $K_2 << K_3$ entre les modules de rotation et de cisaillement, de sorte qu'on peut en principe négliger l'énergie associée aux cisaillements et écrire approximativement, d'après l'expression *(13.6)* de la densité d'énergie élastique de distorsion, que

$$F^{él} \cong 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2 \qquad (19.68)$$

La densité d'énergie élastique stockée par la présence de l'amas de singularités vaut donc $\approx 2K_3(\vec{\omega}^{él})^2$ par unité de volume, de sorte que l'énergie de distorsion stockée à l'extérieur de la singularité dans un milieu quasi-infini, c'est-à-dire un milieu pour lequel $R_\infty >> R_{amas}$, s'écrit

$$E_{dist\,ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} \cong 2K_3\iiint_{V_{ext}} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{16\pi^2 r^4}\,dV = 2K_3\int_{R_{amas}}^{R_\infty} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{16\pi^2 r^4}4\pi r^2\,dr \cong \frac{K_3\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{2\pi R_{amas}} \qquad (19.69)$$

et l'énergie élastique de distorsion stockée à l'intérieur de la singularité

$$E_{dist\,int}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} \cong 2K_3 \iiint_{V_{int}} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2 r^2}{16\pi^2 R_{amas}^6} dV = 2K_3 \int_0^{R_{amas}} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2 r^2}{16\pi^2 R_{amas}^6} 4\pi r^2\, dr = \frac{K_3 \boldsymbol{Q}_\lambda^2}{10\pi R_{amas}} \qquad (19.70)$$

L'énergie élastique de repos $E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}$ de l'amas sphérique de charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$ et de rayon R_{amas} peut s'écrire par conséquent, dans un *réseau cosmologique parfait*, sous la forme

$$E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} = E_{dist\,ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} + E_{dist\,int}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} \cong \frac{3K_3 \boldsymbol{Q}_\lambda^2}{5\pi R_{amas}} \qquad (19.71)$$

On constate que celle-ci est finie et dépend essentiellement du rayon R_{amas} et de la charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de l'amas.

19.6 – Singularité sphérique de charge de courbure donnée

Une singularité topologique macroscopique localisée de rayon R_{amas}, hormis de posséder une charge globale de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$, peut aussi posséder une charge globale de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$. En effet, une telle singularité peut être formée d'un amas de singularités topologiques élémentaires du réseau, telles que des boucles prismatiques de dislocation (fig. 9.36) qui possèdent chacune une charge de courbure élémentaires $\boldsymbol{q}_{\theta(i)}$. Si $\boldsymbol{Q}_\theta > 0$, on parle d'un amas *de nature lacunaire* car il manque des sites de réseau au sein de l'amas, et si $\boldsymbol{Q}_\theta < 0$, on parle d'un amas *de nature interstitielle*, car il y a alors excès de sites de réseau au sein de l'amas.

Le champ de flexion dû à une singularité localisée de courbure

Une singularité localisée de courbure est responsable d'un champ de flexion non nul et divergent dans son voisinage. En effet, si on connaît la densité $\theta^{ch}(\vec{r})$ de charges de courbure au sein de la singularité, on a d'après *(8.39)*

$$\mathrm{div}\,\vec{\chi} = \theta^{ch}(\vec{r}) \qquad (19.72)$$

L'intégration de cette relation sur une sphère de rayon supérieur à R

$$\iiint_{\substack{sphère \\ r>R}} \mathrm{div}\,\vec{\chi}\, dV = \iiint_{\substack{sphère \\ r>R}} \theta^{ch}(\vec{r})\, dV = \boldsymbol{Q}_\theta = \sum_i \boldsymbol{q}_{\theta(i)} \qquad (19.73)$$

permet d'écrire, grâce au théorème de la divergence

$$\oiint_{\substack{sphère \\ r>R}} \vec{\chi}\, d\vec{S} = \boldsymbol{Q}_\theta = \sum_i \boldsymbol{q}_{\theta(i)} \qquad (19.74)$$

et cette intégrale implique l'apparition d'un champ de flexion divergent à l'extérieur de la singularité de courbure, lié à une courbure spatiale du réseau (voir figure 3.3)

$$\vec{\chi}_{ext} = \frac{\boldsymbol{Q}_\theta}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\sum_i \boldsymbol{q}_{\theta(i)}}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (19.75)$$

Les vecteurs de ce champ de flexion convergent vers la singularité si celle-ci est de nature interstitielle (excès de sites de réseau au sein de la singularité), et divergent de la singularité si celle-ci est de nature lacunaire (déplétion de sites de réseau au sein de la singularité). D'autre

part, on constate aussi que le champ de flexion dû à l'amas de charges de courbure ne dépend pas du rayon R_{amas} de l'amas en-dehors de celui-ci.

19.7 – Charge «électrique» de rotation, énergies et masse d'inertie d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

La singularité topologique de réseau la plus simple qui puisse présenter une charge $\boldsymbol{q}_\lambda$ localisée de rotation, parmi toutes les singularités topologiques trouvées à l'échelle d'un réseau solide au chapitre 9, est évidemment la boucle de désinclinaison vis (BV) décrite à la figure 9.40. On rappelle qu'une telle boucle est générée par une rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{BV}$ du plan supérieur d'une coupure circulaire du milieu d'un angle α_{BV} par rapport au plan inférieur. Le fait qu'on recolle deux plans qui ont été déplacés l'un par rapport à l'autre par rotation fait apparaître sur le plan de la boucle une charge surfacique Π_{BV} de rotation. D'après (9.74) à (9.78), on a

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{BV} = \alpha_{BV}\vec{\boldsymbol{n}} = -\vec{\boldsymbol{n}}\Pi_{BV} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = \pi R_{BV}^2 \Pi_{BV} = -\pi R_{BV}^2 \boldsymbol{\Omega}_{BV} \tag{19.76}$$

Cette charge globale $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ est en fait la charge globale de rotation de la boucle de désinclinaison vis telle qu'elle est vue à grande distance de la boucle. Cela signifie qu'une telle boucle peut effectivement se comporter comme la source d'un champ divergent $\vec{\omega}$ de rotation au sein du milieu solide. On a aussi montrer au chapitre 9 qu'une telle boucle peut être vue de manière un peu différente. En effet, le fait d'effectuer la rotation des deux plans l'un par rapport à l'autre induit un déplacement curviligne $R_{BV}\alpha_{BV}$ le long de la boucle similaire à celui d'une dislocation vis. Le vecteur de Burgers curviligne $\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}$ et la charge linéique Λ_{BV} de cette boucle de pseudo-dislocation vis vaut alors

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{BV} = R_{BV}\alpha_{BV}\vec{\boldsymbol{t}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{BV} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\vec{\boldsymbol{t}}/2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = 2\pi R_{BV}\Lambda_{BV} = -\pi R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\vec{\boldsymbol{t}} \tag{19.77}$$

On obtient la même valeur de la charge globale que celle obtenue en considérant la charge surfacique Π_{BV}, ce qui permet de considérer indifféremment cette singularité topologique comme une boucle de désinclinaison vis ou comme une boucle de pseudo-dislocation vis!

Les champs de rotation interne et externe d'une boucle de désinclinaison vis

Une boucle de désinclinaison vis peut donc être considérée comme une pseudo-dislocation vis de vecteur de Burgers curviligne $\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}$. Considérons alors le champ proche de rotation au sein du tore entourant une boucle située dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$ (fig. 19.2), en introduisant la distance ξ séparant, dans une section perpendiculaire du tore, un point quelconque de cette section de son centre (par où passe la boucle). La norme du champ de rotation proche en ce point ξ se déduit de (19.2)

$$\left|\vec{\omega}_{int}^{tore}\right|(\xi) \cong \frac{|\Lambda|}{2\pi}\frac{1}{\xi} = \frac{\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right|}{4\pi}\frac{1}{\xi} \tag{19.78}$$

Considérons maintenant le champ de rotation lointain de la boucle, qui correspond au champ divergent externe d'une charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$, et dont la norme peut se déduire de (19.4)

$$\left|\vec{\omega}_{ext}^{charge}\right| = \frac{\left|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\right|}{4\pi}\frac{1}{r^2} = \frac{R_{BV}\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right|}{4}\frac{1}{r^2} \tag{19.79}$$

où r représente alors la distance séparant le point considéré du centre $\boldsymbol{O}$ de la boucle de désinclinaison.

Dans le cas de la boucle de désinclinaison, on passe donc d'un champ proche divergent de rotation de symétrie torique à un champ lointain divergent de rotation de symétrie sphérique.

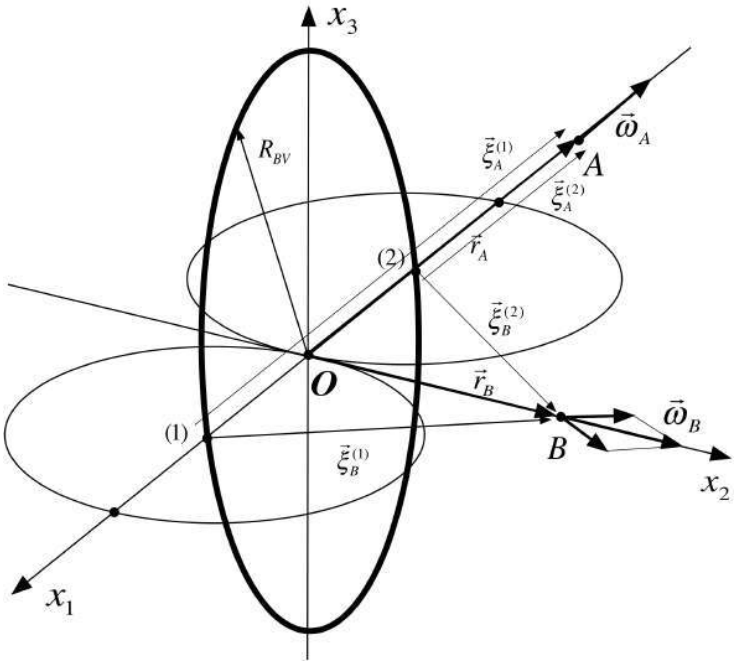


Figure 19.2 *- Boucle de désinclinaison vis de rayon R_{BV} dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$ et champ de rotation $\vec{\omega}_A$ dans le plan de la boucle et $\vec{\omega}_B$ dans le plan perpendiculaire à la boucle*

Pour trouver approximativement la distance à partir de laquelle on passe du champ proche torique au champ lointain sphérique, il faut comparer les expressions *(19.78)* et *(19.79)*, et supposer qu'on passe d'un champ à l'autre lorsque les valeurs des champs deviennent à peu près égales, ce qui signifie que:

- dans le plan de la boucle, au point $\boldsymbol{A}$, on doit avoir

$$\left|\vec{\omega}_{int\,A}^{\,tore}\right|(\xi_A^{(2)}) - \left|\vec{\omega}_A^{\,tore}\right|(\xi_A^{(1)}) \approx \left|\vec{\omega}_{ext\,A}^{\,charge}\right|(r_A) \qquad (19.80)$$

ce qui se traduit par la relation

$$\frac{\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right|}{4\pi}\frac{1}{\xi_A^{(2)}} - \frac{\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right|}{4\pi}\frac{1}{\xi_A^{(2)}+2R_{BV}} \approx \frac{R_{BV}\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right|}{4}\frac{1}{(\xi_A^{(2)}+R_{BV})^2} \qquad (19.81)$$

La recherche des valeurs de $\xi_A^{(2)}$ et r_A pour lesquelles le champ torique est à peu près égal au champ sphérique dans le plan de la boucle donne les valeurs suivantes

$$\xi_A^{(2)} = \frac{(4-2\pi) \pm \sqrt{(2\pi-4)^2 + 8(\pi-2)}}{2(\pi-2)} R_{BV} \cong 0.66 R_{BV} \quad \Rightarrow \quad r_A = R_{BV} + \xi_A^{(2)} \cong 1,66 R_{BV} \qquad (19.82)$$

- dans le plan perpendiculaire à la boucle, au point $\boldsymbol{B}$, on doit avoir

$$\left|\vec{\omega}_{int\,B}^{\,tore}(\vec{\xi}_B^{(1)}) + \vec{\omega}_{int\,B}^{\,tore}(\vec{\xi}_B^{(2)})\right| \approx \left|\vec{\omega}_{ext\,B}^{\,charge}\right|(r_B) \qquad (19.83)$$

ce qui se traduit par la relation

$$\frac{\left|\vec{\underset{\frown}{\boldsymbol{B}}}_{BV}\right|}{2\pi}\frac{r_B}{R_{BV}^2+r_B^2}\approx\frac{R_{BV}\left|\vec{\underset{\frown}{\boldsymbol{B}}}_{BV}\right|}{4}\frac{1}{r_B^2} \qquad (19.84)$$

La recherche de la valeur r_B pour laquelle le champ torique est à peu près égal au champ sphérique donne en ce cas la valeur suivante

$$2r_B^3\approx\pi R_{BV}\left(R_{BV}^2+r_B^2\right)\quad\Rightarrow\quad r_B\approx 2R_{BV} \qquad (19.85)$$

On en déduit donc que la limite de passage entre le champ interne de symétrie torique et le champ externe de symétrie sphérique se situe à une distance r du centre de la boucle valant à peu de chose près $r_B\approx 2R_{BV}$. Cette constatation va nous permettre de calculer les énergies et la masse d'inertie de la boucle de désinclinaison vis.

Les énergies et la masse d'inertie d'une boucle de désinclinaison vis

L'énergie de distorsion d'une boucle de désinclinaison vis est l'énergie qui est stockée par les rotations générées par la pseudo-dislocation vis de rayon R_{BV} dans un tore dont la fibre centrale est la boucle de désinclinaison et dont le rayon de la section correspond à peu près à R_{BV}, à laquelle s'ajoute l'énergie du champ externe de symétrie sphérique pour les distances supérieures à $r\geq 2R_{BV}$. Le calcul de la valeur exacte de cette énergie est évidemment très complexe, notamment du fait que le champ de rotation s'annule exactement au centre de la boucle. Cependant, on peut essayer de faire une approximation de l'énergie de distorsion réelle de la boucle, en utilisant l'énergie d'une dislocation rectiligne pour calculer l'énergie de la dislocation courbée. Dans le cas où le rayon R_{BV} de la boucle est énormément plus grand que le rayon de coeur a de la pseudo-dislocation vis ($R_{BV}>>a$), cette approximation doit s'approcher de la valeur réelle de l'énergie de distorsion au sein du tore entourant la boucle, et on peut la corriger en introduisant une constante A_{BV} corrigeant la valeur du rayon externe du tore pour approcher au mieux la valeur réelle de l'énergie. On écrira donc l'énergie de distorsion du champ torique à partir de l'énergie d'une dislocation vis par unité de longueur (19.7), comme l'énergie contenue dans le tore entourant la boucle de désinclinaison vis et qui vaut donc approximativement

$$E_{dist\ tore}^{BV}\cong 2\pi R_{BV}\left(\frac{\left(K_2+K_3\right)\Lambda_{BV}^2}{\pi}\ln\frac{A_{BV}R_{BV}}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)R_{BV}\vec{\underset{\frown}{\boldsymbol{B}}}_{BV}^2\ln\frac{A_{BV}R_{BV}}{a} \qquad (19.86)$$

où a est le rayon de coeur de la pseudo-dislocation vis, de l'ordre de grandeur du pas du réseau cosmologique en présence d'un champ d'expansion τ quelconque, $A_{BV}R_{BV}$ est la portée du champ torique de la boucle et A_{BV} est une constante qui ne peut être obtenue que par le calcul exact de l'énergie de la boucle, mais qui doit être très proche de l'unité d'après notre discussion précédente. Pour simplifier la suite de notre exposé, comme le rapport $A_{BV}R_{BV}/a$ ne dépend quasiment pas de l'expansion de fond, on va le considérer comme à peu près constant, et introduire une constante ζ_{BV} propre à la boucle de désinclinaison vis, et valant

$$\zeta_{BV}=\ln\left(A_{BV}R_{BV}/a\right)\cong cste\quad avec\quad A_{BV}\approx 1 \qquad (19.87)$$

de sorte à pouvoir écrire l'énergie du champ torique sous la forme simplifiée suivante

$$E_{dist\ tore}^{BV}\cong 2\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2=\frac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\underset{\frown}{\boldsymbol{B}}}_{BV}^2 \qquad (19.88)$$

On peut alors comparer cette énergie du champ torique de la boucle à l'énergie associée au champ sphérique de rotation à grande distance de la boucle, qui intervient au-delà de la distance $2R_{BV}$ de la boucle, et qui est due à sa charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$, à savoir

$$\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l} = \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{2}R_{BV}\Lambda_{BV}\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\vec{t}\,\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (r > 2R_{BV}) \tag{19.89}$$

L'énergie de ce champ se déduit directement de la valeur *(19.69)* et vaut par conséquent approximativement

$$E_{dist\,ext}^{BV} \cong 2K_3\int_{2R_{BV}}^{R_\infty}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{16\pi^2 r^4}4\pi r^2\,dr \cong \frac{K_3\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{4\pi R_{BV}} \cong\cong \pi K_3 R_{BV}\Lambda_{BV}^2 \cong \frac{\pi}{4}K_3 R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \tag{19.90}$$

En comparant cette valeur avec l'énergie du champ torique *(19.88)*, on obtient le rapport

$$\frac{E_{dist\,ext}^{BV}}{E_{dist\,tore}^{BV}} \cong \frac{\pi K_3}{2(K_2+K_3)\zeta_{BV}} \cong \frac{\pi}{2\ln(A_{BV}R_{BV}/a)} \tag{19.91}$$

Admettons ici une nouvelle conjecture, à savoir que

Conjecture 7: *le rayon d'une boucle de désinclinaison vis est beaucoup plus grand que le pas du réseau cosmologique:*

$$\ln(A_{BV}R_{BV}/a) >> 1 \tag{19.92}$$

Avec cette conjecture, l'énergie associé au champ externe sphérique de rotation devient parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie du champ torique de la boucle. Par conséquent, l'énergie E_{dist}^{BV} de la boucle de désinclinaison vis est essentiellement contenue dans le champ torique de la boucle

$$E_{dist}^{BV} \cong E_{dist\,tore}^{BV} \cong 2(K_2+K_3)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 = \frac{1}{2}(K_2+K_3)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \tag{19.93}$$

L'énergie cinétique non-relativiste d'une boucle de désinclinaison vis mobile est l'énergie qui est stockée par les mouvements du réseau générés par la pseudo-dislocation vis mobile. En utilisant la relation (19.9), et en admettant l'hypothèse (19.92), l'énergie cinétique de la boucle contenue dans le tore précédent vaut donc approximativement

$$E_{cin}^{BV} \cong 2\pi R_{BV}\left(\frac{mn\Lambda_{BV}^2\ln(A_{BV}R_{BV}/a)}{2\pi}\boldsymbol{v}^2\right) = mn\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{4}mn\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2\boldsymbol{v}^2 \tag{19.94}$$

A nouveau, l'énergie cinétique du champ de rotation extérieur est négligeable en comparaison de cette énergie cinétique, de sorte qu'on peut considérer que l'énergie cinétique de la boucle est essentiellement cantonnée dans le champ torique de la boucle. On en déduit par conséquent que la relation d'Einstein s'applique parfaitement à l'énergie cinétique non-relativiste de la boucle de désinclinaison vis

$$E_{cin}^{BV} = \frac{1}{2}\frac{E_{dist}^{BV}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}M_0^{BV}\boldsymbol{v}^2 \tag{19.95}$$

On en déduit la masse d'inertie de la boucle de désinclinaison vis, exprimée à partir du rayon de la boucle et de son pseudo-vecteur de Burgers

$$M_0^{BV} = \frac{E_{dist}^{BV}}{c_t^2} \cong \frac{2}{c_t^2}(K_2+K_3)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 = \frac{1}{2c_t^2}(K_2+K_3)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \tag{19.96}$$

On sait que l'existence des champs de distorsion élastique induit, via leur énergie, un champ de perturbations de l'expansion. On reviendra plus tard en détail sur ce champ de perturbations d'expansion associé à la boucle de désinclinaison vis .

19.8 – Interaction «électrique» entre singularités topologiques localisées

Supposons tout d'abord deux boucles de désinclinaison vis de charges de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}$ et $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)}$. Il existe une force d'interaction entre ces deux boucles, de type électrique, et cette force d'interaction peut être déduite de manière très générale en utilisant la force de Peach et Koehler. En effet, le champ de rotation externe sphérique généré par une charge $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}$ située au centre du système de coordonnées est donné par (19.66)

$$\vec{\omega}^{BV}_{ext(1)} = \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (r > 2R_{BV}) \tag{19.97}$$

On en déduit grâce à (17.17) le torseur de moment dû à la charge $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}$

$$\vec{m}^{BV}_{ext(1)} = 4\left(K_2 + K_3\right)\vec{\omega}^{BV}_{ext(1)} = \left(K_2 + K_3\right)\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}}{\pi r^3}\vec{r} \qquad (r > 2R_{BV}) \tag{19.98}$$

Si une boucle de désinclinaison vis de charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)}$ se trouve alors à la position repérée par le vecteur lieu $\vec{r} = \vec{d}$ dans le système de coordonnée, la force d'interaction agissant sur cette charge de la part de la charge $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}$ est la force de Peach et Koehler

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{BV}_{PK(2)} = \boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)}\vec{m}^{BV}_{ext(1)} = \frac{K_2 + K_3}{\pi}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}\boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)}}{d^2}\frac{\vec{d}}{d} \tag{19.99}$$

Ainsi, la force réciproque entre les deux charges est répulsive si $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}\boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)} > 0$ et attractive si $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(1)}\boldsymbol{q}_{\lambda BV(2)} < 0$. Cette force d'interaction entre les charges de rotation de boucles de désinclinaison vis est l'analogue parfait de la force d'interaction $\vec{\boldsymbol{F}}^{électrique} = \boldsymbol{q}_{(1)}\boldsymbol{q}_{(2)}\vec{d} / 4\pi\varepsilon_0 d^3$ entre deux charges électriques $\boldsymbol{q}_{(1)}$ et $\boldsymbol{q}_{(2)}$ en électromagnétisme, et cadre donc parfaitement avec l'analogie développée à la section 17.3 avec les équations de Maxwell.

Interaction «électrique» entre deux amas macroscopiques de singularités

Comme la relation (19.99) est parfaitement indépendante de la taille des boucles, elle peut se généraliser sans problème à deux amas macroscopiques de singularités topologiques qui auraient des charges de rotation macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(1)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\lambda(2)}$ et qui seraient distants de d

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK(2)} = \frac{K_2 + K_3}{\pi}\frac{\boldsymbol{Q}_{\lambda(1)}\boldsymbol{Q}_{\lambda(2)}}{d^2}\frac{\vec{d}}{d} \tag{19.100}$$

Dans ce cas de deux amas macroscopiques, la force d'interaction «électrique» entre eux ne dépend donc pas des rayons respectifs $R_{amas(1)}$ et $R_{amas(2)}$ des deux amas.

19.9 – Charge «gravitationnelle» de courbure, énergies et masse d'une boucle de dislocation coin prismatique (BC)

La structure microscopique la plus simple d'une seule charge localisée de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$, parmi

toutes les singularités topologiques trouvées à l'échelle d'un réseau solide au chapitre 9, est évidemment la boucle de dislocation coin prismatique (BC) décrite à la figure 9.36b.
De telles boucles possèdent une vecteur de Burgers perpendiculaire au plan de la boucle, et présentent une charge scalaire globale $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ de courbure donnée par (9.68) à (9.70). Comme $\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} = \vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}_{BC}$, on a

$$\boldsymbol{q}_{\theta BC} = -2\pi \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC} = -2\pi \vec{\boldsymbol{n}} \left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}_{BC} \right) = 2\pi \vec{\Lambda}_{BC} \vec{\boldsymbol{m}} \qquad (19.101)$$

D'après cette dernière relation, on déduit qu'une boucle de dislocation coin de type lacunaire présente un produit $\vec{\Lambda}_{BC} \vec{\boldsymbol{m}}$ positif, et donc une charge $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ positive, alors qu'une boucle de dislocation coin de type interstitiel présente un produit $\vec{\Lambda}_{BC} \vec{\boldsymbol{m}}$ négatif, et par conséquent une charge $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ négative.

Les énergies et la masse d'inertie d'une boucle de dislocation prismatique

Si on considère une boucle prismatique de dislocation coin de rayon R_{BC}, les distorsions induites dans le réseau sont celles d'une dislocation coin. On peut donc calculer approximativement l'énergie élastique de distorsion de cette boucle comme l'énergie qui est stockée dans le réseau par les distorsions élastiques générées par la dislocation coin dans un tore centré sur la boucle. En utilisant les mêmes arguments que pour la boucle de désinclinaison vis, on déduit que, dans un réseau cosmologique parfait, l'énergie élastique de distorsion d'une boucle prismatique est essentiellement contenue dans les champs toriques entourant la boucle

$$E_{dist}^{BC} \cong E_{dist\ tore}^{BC} \cong 2\pi R_{BC} \left[\left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 \frac{K_3 \vec{\Lambda}_{BC}^2}{2\pi} \ln \frac{A_{BC} R_{BC}}{a} \right] \cong \left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 K_3 \zeta_{BC} R_{BC} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \qquad (19.102)$$

où A_{BC} est une constante voisine de l'unité, qui devrait être calculée de manière exacte par l'intégration exacte de l'énergie des champs au sein du tore, et où $\zeta_{BC} = \ln\left(A_{BC} R_{BC} / a \right)$ est une constante propre à la boucle de dislocation coin.
A l'extérieur de la boucle, les champs dus à la boucle de dislocation coin se réduisent au champ de flexion *(19.75) de symétrie sphérique,* qui s'écrit alors

$$\vec{\chi}_{ext}^{BC} = \frac{\boldsymbol{q}_{\theta BC}}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{2} \vec{\Lambda}_{BC} \vec{\boldsymbol{m}} \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (r > 2R_{BC}) \qquad (19.103)$$

Il est clair que ce champ de flexion doit être associé à une perturbation du champ d'expansion volumique qui doit posséder une certaine énergie. Nous reviendrons plus tard sur ce problème, et on montrera que l'énergie associée à ce champ de flexion est parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie de distorsion *(19.102)*, de sorte que l'énergie de la boucle de dislocation coin est essentiellement contenue dans les champs toriques au voisinage immédiat de la boucle.
L'énergie cinétique non-relativiste de cette boucle est essentiellement l'énergie cinétique stockée dans le réseau par les distorsions dynamiques générées par la dislocation coin dans le tore centré sur la boucle. En utilisant les relations (19.60) déduites pour la dislocation coin, on déduit que, dans le réseau cosmologique, on a approximativement l'énergie cinétique suivante pour une boucle de dislocation prismatique

$$E_{cin}^{BC} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 mnR_{BC} \vec{\Lambda}_{BC}^2 \left(\ln \frac{A_{BC} R_{BC}}{a} \right) \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 mn\zeta_{BC} R_{BC} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \boldsymbol{v}^2 \qquad (19.104)$$

A nouveau, *cette énergie cinétique est essentiellement contenue dans le voisinage immédiat de la boucle,* et on constate que la *relation d'Einstein* s'applique parfaitement à l'énergie cinétique non-relativiste de la boucle de dislocation prismatique puisque

$$E_{cin}^{BC} \cong \frac{1}{2}\frac{E_{dist}^{BC}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 \qquad (19.105)$$

On déduit par conséquent la masse d'inertie de la boucle de dislocation prismatique dans le *réseau cosmologique*

$$M_0^{BC} = \frac{E_{dist}^{BC}}{c_t^2} \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{1}{c_t^2} K_3 \zeta_{BC} R_{BC} \vec{\Lambda}_{BC}^2 = \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{1}{c_t^2} K_3 \zeta_{BC} R_{BC} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \qquad (19.106)$$

Quant au champ de perturbation d'expansion associé à cette boucle, on y reviendra en détail plus tard.

19.10 – Champ dipolaire «électrique» de rotation, énergies et masse d'une boucle de dislocation mixte de glissement (BM)

La boucle de dislocation mixte de glissement (BM), de nature «vectorielle», est obtenue par glissement (translation parallèle au plan de la boucle) dans la direction du vecteur de Burgers, de sorte que le réseau ne présente pas d'«extra-matière» en ce cas (fig. 9.36a). Par contre, la présence d'une composante vis dans les régions où $\vec{\boldsymbol{B}}_{BM} \,||\, \vec{\boldsymbol{t}}$ induit un champ dipolaire de rotation $\vec{\omega}_{dipolaire}^{BM}(r,\theta,\varphi)$ au voisinage de la boucle de glissement.

Les énergies et la masse d'inertie d'une boucle mixte de glissement

Si on considère une boucle de glissement de rayon R_{BM}, les distorsions induites dans le réseau à courte distance sont celles d'une dislocation vis pour les angles $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, et celles d'une dislocation coin pour les angles $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 3\pi/2$. On peut donc considérer qu'on passe continument en fonction de l'angle α d'une dislocation vis à une dislocation coin via des états intermédiaires mixtes. L'énergie de distorsion associée à la corde courbée est stockée essentiellement dans le tore centré sur la boucle. Mais comme les deux parties coin et les deux parties vis de la boucle sont respectivement de charges opposées, les champs associés aux parties coin et aux parties vis de la boucle diminuent très rapidement à grande distance de la boucle. Par exemple, le module du champ de rotation dans le plan de la boucle et sur un diamètre passant par les parties vis de la boucle se comporte approximativement comme

$$\left|\vec{\omega}_{dist}^{BM}\right| \propto \frac{\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\right| R_{BM}}{4\pi r^2} \qquad (r >> R_{BM}) \qquad (19.107)$$

à grande distance. Si le rayon R_{BM} de la boucle est très largement supérieur au pas a du réseau, on peut à peu près tenir compte de cette décroissance rapide du champ dipolaire en imaginant que le champ au voisinage de la corde est celui d'une dislocation. On peut ainsi calculer approximativement l'énergie de repos d'une telle boucle en intégrant les énergies par unité de longueur de corde au sein du tore pour les composantes vis et coin de la corde en fonction de l'angle α. Il vient par conséquent approximativement, dans le réseau cosmologique parfait

$$E_{dist}^{BM} \cong \int_0^{2\pi} \frac{(K_2+K_3)\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\cos\alpha\right)^2}{4\pi}\left(\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a}\right)R_{BM}\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2\frac{K_3\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\sin\alpha\right)^2}{2\pi}\left(\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a}\right)R_{BM}\,d\alpha \quad (19.108)$$

Un calcul exacte de l'énergie devrait conduire à la valeur de la constante A_{BM} propre à la géométrie de la boucle mixte, et qui doit approchée la valeur 1, de sorte que

$$E_{dist}^{BM} \cong \frac{(K_2+K_3)R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2}{4}\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a} + \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2\frac{K_3R_{BM}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2}{2}\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a} \quad (19.109)$$

Comme $K_2 << K_3$ dans le réseau cosmologique parfait, on obtient approximativement

$$E_{dist}^{BM} = \frac{\zeta_{BM}R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2}{4}\left[K_2+K_3\left(1+2\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2\right)\right] \cong \frac{1}{4}(K_2+K_3)\zeta_{BM}R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2 \quad (19.110)$$

où $\zeta_{BM} = \ln\left(A_{BM}R_{BM}/a\right)$ est une constante propre à la boucle de dislocation mixte.
Il faudrait encore tenir compte de l'énergie de distorsion associée au champ de rotation dipolaire extérieur à la boucle. Cependant, celle-ci est évidemment inférieure à l'énergie de distorsion (19.90) associée au champ de rotation extérieur d'une boucle de désinclinaison vis, de sorte qu'on peut parfaitement négliger cette énergie en comparaison de l'énergie de distorsion E_{dist}^{BM} contenue dans le tore. Ceci signifie à nouveau que l'énergie de la boucle de dislocation mixte est essentiellement contenue dans le voisinage immédiat de la boucle de dislocation.
L'énergie cinétique non-relativiste de la boucle de dislocation de glissement se calcule approximativement de la même façon que son énergie élastique de distorsion

$$E_{cin}^{BM} = \int_0^{2\pi}\frac{mn\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\cos\alpha\right)^2}{8\pi}\left(\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a}\right)\boldsymbol{v}^2R_{BM}\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2\frac{mn\left(\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\sin\alpha\right)^2}{4\pi}\left(\ln\frac{A_{BM}R_{BM}}{a}\right)\boldsymbol{v}^2R_{BM}\,d\alpha \quad (19.111)$$

de sorte que

$$E_{cin}^{BM} \cong \frac{mnR_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2}{8}\zeta_{BM}\left[1+2\left(K_2/K_3\right)^2\right]\boldsymbol{v}^2 \cong \frac{1}{8}mn\zeta_{BM}R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2\boldsymbol{v}^2 \quad (19.112)$$

On constate que les énergies E_{dist}^{BM} et E_{cin}^{BM} sont en fait celles fournies par les parties vis de la boucle de glissement, et que celles-ci sont essentiellement contenues dans le voisinage immédiat de la boucle de dislocation. La relation d'Einstein s'applique donc parfaitement à l'énergie cinétique non-relativiste de la boucle de dislocation de glissement puisque

$$E_{cin}^{BM} \cong \frac{1}{2}\frac{E_{dist}^{BM}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 \quad (19.113)$$

On en déduit la masse d'inertie de cette boucle dans le *réseau cosmologique parfait*

$$M_0^{BM} = \frac{E_{dist}^{BM}}{c_t^2} \cong \frac{1}{4c_t^2}(K_2+K_3)\zeta_{BM}R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2 \quad (19.114)$$

Quant au champ de perturbation d'expansion associé à cette boucle, on y reviendra plus tard en détail au chapitre 24, où on verra que l'énergie associée à ce champ est négligeable vis-à-vis de l'énergie de distorsion E_{dist}^{BM} contenue dans le tore.

Tableau 19.1 - Energies et masses d'inertie des boucles élémentaires de dislocation et de désinclinaison dans un «réseau cosmologique parfait»

La boucle de désinclinaison vis (boucle vis - BV)

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = 2\pi R_{BV}\Lambda_{BV} = -\pi R_{BV}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\vec{\boldsymbol{t}} \quad \& \quad \boldsymbol{q}_{\theta BV} = 0 \\ \vec{\omega}_{ext}^{BV} = \dfrac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{4\pi}\dfrac{\vec{r}}{r^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{dist}^{BV} \cong E_{dist\,tore}^{BV} \cong 2\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 = \dfrac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \\ E_{cin}^{BV} \cong E_{cin\,tore}^{BV} \cong mn\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{4}mn\zeta_{BV}R_{BV}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2\boldsymbol{v}^2 \\ M_0^{BV} = \dfrac{E_{dist}^{BV}}{c_t^2} = \dfrac{2}{c_t^2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 = \dfrac{1}{2c_t^2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \\ \zeta_{BV} = \ln\left(A_{BV}R_{BV}/a\right) \end{cases}$$

La boucle de dislocation coin prismatique (boucle coin - BC)

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BC} = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{q}_{\theta BC} = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\left(\vec{\boldsymbol{t}}\wedge\vec{\Lambda}_{BC}\right) = 2\pi\vec{\Lambda}_{BC}\vec{\boldsymbol{m}} = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} \\ \vec{\chi}_{ext}^{BC} = \dfrac{\boldsymbol{q}_{\theta BC}}{4\pi}\dfrac{\vec{r}}{r^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{dist}^{BC} \cong E_{dist\,tore}^{BC} \cong \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 K_3\zeta_{BC}R_{BC}\vec{\Lambda}_{BC}^2 \cong \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 K_3\zeta_{BC}R_{BC}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \\ E_{cin}^{BC} \cong E_{cin\,tore}^{BC} \cong \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 mn\zeta_{BC}R_{BC}\vec{\Lambda}_{BC}^2\boldsymbol{v}^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 mn\zeta_{BC}R_{BC}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2\boldsymbol{v}^2 \\ M_0^{BC} = \dfrac{E_{dist}^{BC}}{c_t^2} = \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2\dfrac{1}{c_t^2}K_3\zeta_{BC}R_{BC}\vec{\Lambda}_{BC}^2 = \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2\dfrac{1}{c_t^2}K_3\zeta_{BC}R_{BC}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \\ \zeta_{BC} \cong \ln\left(A_{BC}R_{BC}/a\right) \end{cases}$$

La boucle de dislocation mixte de glissement (boucle mixte - BM)

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BM} = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{q}_{\theta BM} = 0 \\ \exists \text{ un champ externe dipolaire de rotation } \vec{\omega}_{dipolaire}^{BM}(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{dist}^{BM} \cong E_{dist\,tore}^{BM} \cong \dfrac{1}{4}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BM}R_{BM}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2 \\ E_{cin}^{BM} \cong E_{cin\,tore}^{BM} \cong \dfrac{1}{8}mn\zeta_{BM}R_{BM}\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2\boldsymbol{v}^2 \\ M_0^{BM} = \dfrac{E_{dist}^{BM}}{c_t^2} \cong \dfrac{1}{4c_t^2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BM}R_{BM}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2 \\ \zeta_{BM} = \ln\left(A_{BM}R_{BM}/a\right) \end{cases}$$

19.11 – Briques topologiques élémentaires pour construire le monde des particules élémentaires

Dans le tableau 19.1, on a reporté l'ensemble des résultats obtenus pour les trois types de boucles les plus élémentaires qu'on peut trouver dans le réseau cosmologique parfait. Dans notre analogie avec le monde réel, les trois boucles de désinclinaison et de dislocation qui y apparaissent pourraient bien constituer les briques topologiques les plus élémentaires du réseau cosmologique, qui pourraient permettre d'élaborer des boucles dispiratives de structures plus complexes qui soient des analogues des particules élémentaires du Modèle Standard.

La boucle de désinclinaison vis, singularité topologique la plus élémentaire à l'origine d'une charge électrique

A une certaine distance du centre d'une boucle de désinclinaison vis, supérieure à environ $2R_{BV}$, le champ de rotation externe de la boucle de désinclinaison se comporte exactement comme le champ extérieur d'une charge sphérique de valeur $\boldsymbol{q}_{\lambda BV} = 2\pi R_{BV}\Lambda_{BV}$. On peut alors se demander quel devrait être le rayon R_{ch} de la charge sphérique pour que celle-ci présente une énergie élastique de distorsion globale égale à l'énergie de distorsion de la boucle. Avec la valeur de charge $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ assurant un champ à grande distance semblable à celui de la boucle de désinclinaison vis, l'énergie d'une charge sphérique de rayon R_{ch} vaut, d'après (19.71)

$$E_{dist}^{\boldsymbol{q}_\lambda} \cong \frac{3K_3\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{5\pi R_{ch}} \cong \frac{12K_3\pi R_{BV}^2\Lambda_{BV}^2}{5R_{ch}} \qquad (19.115)$$

Pour que cette énergie globale de la charge sphérique soit égale à celle de la boucle de distorsion de rayon R_{BV} et de charge linéique Λ_{BV}, il faut que le rayon R_{ch} de la charge satisfasse la relation suivante, en se rappelant que $K_2 << K_3$ dans le réseau cosmologique parfait

$$E_{dist}^{\boldsymbol{q}_\lambda} \cong E_{dist}^{BV} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12K_3\pi R_{BV}^2\Lambda_{BV}^2}{5R_{ch}} = 2\left(K_2 + K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 \cong 2K_3\zeta_{BV}R_{BV}\Lambda_{BV}^2 \qquad (19.116)$$

Le rayon R_{ch} de la charge sphérique $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ qui présenterait la même énergie élastique de distorsion que la boucle de désinclinaison vaudrait donc

$$R_{ch} \cong \frac{6\pi R_{BV}}{5\zeta_{BV}} \cong R_{BV}\frac{6\pi}{5\ln\left(A_{BV}R_{BV}/a\right)} \qquad (19.117)$$

On constate donc que le rayon d'une charge sphérique qui présenterait une énergie du champ de rotation égale à l'énergie du champ torique d'une boucle de désinclinaison vis devrait être nettement plus petit que le rayon de la boucle de désinclinaison vis. Comme la boucle de désinclinaison vis est la singularité microscopique de réseau la plus élémentaire qu'il soit possible de trouver qui présente une charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ non nulle, la boucle de désinclinaison vis correspond donc à la structure la plus élémentaire d'une charge électrique1 dans notre analogie avec le monde réel.

---

[1] *L'idée d'un électron de forme annulaire a été proposée initialement en 1915 par Parson (Smithsonian miscellaneous collections, nov. 1915) puis développée ensuite par Webster (Amer. Acad., janv. 1915) et Allen (Phil. Mag., 4, 1921, p. 113), et la proposition qu'un électron puisse être similaire à une boucle de désinclinaison vis a été proposée en 1996 par Unziker (arXiv:gr-qc/9612061v2).*

La boucle de dislocation prismatique, singularité topologique la plus élémentaire à l'origine d'une charge de courbure spatiale

Lorsqu'on compare l'énergie élastique de distorsion d'une boucle prismatique avec l'énergie de distorsion élastique d'une boucle de désinclinaison vis, avec mêmes rayons et mêmes modules de leur vecteur de Burgers, on constate que, dans un réseau cosmologique parfait avec $K_2 << K_3$, on a

$$M_0^{BV} \cong \frac{1}{2}\frac{K_3}{c_t^2}\zeta_{BV} R_{BV} \underset{\sim}{\vec{\boldsymbol{B}}}^2_{BV} \quad >> \quad \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{K_3}{c_t^2}\zeta_{BC} R_{BC} \vec{\boldsymbol{B}}^2_{BC} \cong M_0^{BC} \qquad (19.118)$$

Ainsi, la masse d'inertie de la boucle de dislocation coin prismatique est beaucoup plus faible que la masse d'inertie de la boucle de désinclinaison vis.

D'autre part, comme la boucle de dislocation prismatique possède une charge de courbure non nulle $\boldsymbol{q}_{\theta BC} = -2\pi \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}$, qui peut être positive (boucle de type lacunaire) ou négative (boucle de type interstitiel), elle est forcément associée à un champ de flexion $\vec{\chi}_{ext}^{BC}$ à grande distance par courbure du réseau, donné par (19.103)

$$\vec{\chi}_{ext}^{BC} = \frac{\boldsymbol{q}_{\theta BC}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{2}\vec{\Lambda}_{BC}\vec{\boldsymbol{m}}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (r > R_{BC}) \qquad (19.119)$$

Ainsi, la boucle de dislocation prismatique est la singularité microscopique de réseau la plus élémentaire qui soit source de courbure spatiale du réseau par le champ de flexion divergent qui lui est associé, alors que la boucle de désinclinaison vis la singularité microscopique de réseau la plus élémentaire qui soit source de torsion spatiale du réseau par le champ de rotation divergent qui lui est associé.

Comme on a essayé de prime abord une analogie entre la boucle de désinclinaison vis et l'a charge de l'électron de la physique des particules, alors la boucle de dislocation prismatique, qui ne présente pas de champ de rotation et qui est de masse au repos beaucoup plus faible que la boucle de désinclinaison vis pourrait très bien, de prime abord, s'identifier par analogie au *neutrino du monde réel*, qui est effectivement une particule électriquement neutre et de masse beaucoup plus faible que l'électron.

Si on admet cette analogie, le neutrino serait en ce cas source d'une courbure spatiale par flexion du réseau cosmologique parfait, correspondant au champ de courbure de l'espace de la relativité générale, alors que la charge de l'électron serait source d'une torsion spatiale par rotation du réseau cosmologique parfait, correspondant au champ électrique de l'électromagnétisme! Cette analogie avec les deux leptons de base de la physique des particules est évidemment très sommaire pour l'instant, et il pourrait très bien intervenir en fait des combinaisons plus complexes de ces boucles élémentaires sous la forme de boucles de dispiration de structures complexes pour expliquer les différentes particules élémentaires du monde réel.

La boucle de dislocation de glissement, singularité topologique la plus élémentaire à l'origine d'un moment dipolaire électrique

Au contraire de la boucle de désinclinaison vis et de la boucle de dislocation prismatique, la boucle de dislocation de glissement ne présente aucun champ à grande distance comme un champ de rotation divergent ou un champ de flexion divergent. Cependant, cette boucle pré-

sente un moment dipolaire de rotation $\vec{\omega}^{BM}_{dipolaire}(r,\theta,\varphi)$ dans son voisinage, lié aux deux charges de rotation opposées situées de part et d'autre de la boucle. Ainsi, la boucle de dislocation de glissement est la singularité microscopique de réseau la plus élémentaire qui puisse être source d'un moment dipolaire de rotation.

Dans notre analogie avec le monde réel, une boucle de dislocation de glissement dans le réseau cosmologique parfait pourrait correspondre à la structure la plus élémentaire qui pourrait générer un *moment dipolaire électrique pour une particule élémentaire*. Or, il s'avère que la recherche et la mesure d'un moment dipolaire électrique des particules élémentaires est actuellement un sujet de recherche important de la Physique des particules élémentaires!

Des diverses propriétés physiques transportées par les singularités en boucle

De la discussion précédente, il semblerait donc que la boucle de désinclinaison vis pourrait transporter la charge électrique, la boucle de dislocation prismatique la charge de courbure et la boucle de dislocation par glissement le moment dipolaire électrique.

On peut ajouter à ces trois propriétés une autre propriété qui pourrait avoir un intérêt énorme. Dans notre analogie avec le monde réel, il est assez difficile d'imaginer, pour trouver l'analogue du spin d'une particule chargée et du moment magnétique qui lui est associé, qu'une singularité sphérique symétrique de charge de rotation comme celle décrite à la section 19.5 puisse tourner sur elle-même. Par contre, si on considère que l'analogue d'une charge électrique est bien la boucle de désinclinaison vis traitée à la section 19.7, la topologie de cette singularité, constituée d'une pseudo-dislocation vis, permet d'imaginer très naïvement que celle-ci puisse tourner autour d'un de ses diamètres. Dans ce cas de figure, la distribution de la charge de rotation, analogue à une distribution de la charge électrique sous forme d'un anneau le long du périmètre de la boucle de désinclinaison vis, imposerait forcément l'apparition d'un moment magnétique de la boucle associé à ce mouvement réel de rotation. On reviendra sur ce sujet plus tard!

Il est encore une cinquième propriété fondamentale et très importante des particules élémentaires qui pourrait s'expliquer avec notre analogie. C'est le fait de pouvoir calculer les énergies élastiques de distorsion E^{boucle}_{dist} et les énergies cinétiques E^{boucle}_{cin} des boucles, et de pouvoir en déduire leurs masses d'inertie M_0^{boucle}, et que celles-ci sont contenues essentiellement dans le voisinage immédiat des boucles! Mais c'est aussi et surtout le fait qu'elles satisfont toutes, dans le réseau cosmologique parfait, la fameuse relation d'Einstein

$$E^{boucle}_{dist} = M_0^{boucle} c_t^2 \qquad (19.120)$$

qui est une propriété fondamentale de ces boucles qui a été démontrée *sans aucunement faire appel à un principe de relativité restreinte*.

D'autre part, la masse d'inertie des boucles est une propriété liée à la masse d'inertie du réseau cosmologique dans le référentiel absolu de l'observateur extérieur ***GO***. Dans une analogie avec le monde réel, la masse d'inertie du réseau topologique correspondrait alors au fameux *champs de Higgs* qu'il a fallu introduire dans le Modèle Standard pour expliquer la masse des particules élémentaires, et la *particule de Higgs* serait alors la seule vraie particule du monde réel puisqu'elle correspondrait à une particule constitutive du réseau cosmologique parfait, alors que les autres particules élémentaires du Modèle Standard correspondraient à des singularités topologiques du réseau cosmologique parfait!

Il y a certes encore un chemin énorme à parcourir pour trouver une analogie qui fournirait, par combinaison judicieuse des différentes boucles topologiques élémentaires sous forme de différentes dispirations de structures plus ou moins complexes, l'ensemble des particules élémentaires du Modèle Standard et de leurs propriétés physiques. Mais le problème majeur qu'on va aborder dans la suite sera surtout de trouver les analogies qui expliquent le *comportement gravitationnel* des objets du monde réel à l'échelle macroscopique (gravitation de Newton, Relativité Générale), ainsi que le *comportement quantique* du monde réel à l'échelle microscopique (Physique Quantique).

Cependant, on retiendra pour l'instant de ce chapitre que plusieurs des propriétés fondamentales des particules élémentaires de notre monde réel trouvent une explication fort simple et parfaitement classique à l'aide de l'analogie avec les singularités élémentaires en boucle d'un réseau cosmologique parfait.

Chapitre 20

Dynamique relativiste des singularités topologiques dans le réseau cosmologique parfait

Dans les deux chapitres précédents, on a déduit l'énergie cinétique associée au mouvement d'une dislocation ou d'une boucle de dislocation ou de désinclinaison au sein d'un réseau cosmologique parfait, en supposant *implicitement* que les perturbations de distorsion dues à la charge en mouvement sont transmises au sein du réseau à une célérité quasi-infinie en comparaison à la vitesse de la charge au sein du réseau. Cependant, on sait bien que les perturbations au sein d'un réseau solide sont transmises en réalité aux vitesses finies c_t des perturbations transversales ou c_l des perturbations longitudinales. Pour tenir compte des effets de propagation des perturbations à célérité finie au sein du réseau solide lorsque la vitesse de déplacement de la charge devient non négligeable en comparaison avec les célérités de propagation des ondes transversales et/ou longitudinales, on devra introduire la *transformation de Lorentz* pour passer d'un repère immobile dans le réseau au repère mobile associé à la charge en mouvement.

On appliquera ici la transformation de Lorentz aux singularités en mouvement à vitesse relativiste au sein d'un réseau topologique parfait, à savoir les dislocations vis et coin, la charge localisée de rotation, la boucle de désinclinaison vis, la boucle de dislocation prismatique et la boucle de dislocation de glissement. On calculera leur énergie totale, due à la somme de l'énergie potentielle stockée par les distorsions du réseau générées par la présence de la charge et de l'énergie cinétique emmagasinée dans le réseau par le mouvement de leur charge, et on montrera que celles-ci satisfont bien une *dynamique relativiste*.

Finalement, on montrera que la transformation de Lorentz fait apparaître un terme de *force relativiste* agissant sur les charges de rotation en mouvement, terme qui est parfaitement analogue à la *force de Lorentz* en électromagnétisme.

20.1 – Charges mobiles et transformations de Lorentz

Lorsque des singularités topologiques de densités de charge $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ ou λ se déplacent dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ fixé au réseau solide à des vitesses non négligeables par rapport aux célérités de propagation d'ondes transversales et/ou longitudinales, il serait évidemment très utile de pouvoir retrouver les champs dynamiques $\tau(\vec{r},t)$, $\vec{\omega}(\vec{r},t)$ and $\vec{\alpha}_i(\vec{r},t)$ générés par ces singularités dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Trouver une solution des équations différentielles pour des singularités se mouvant dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ n'est pas aisé du tout. Par contre, utiliser un référentiel mobile avec les singularités, dans lequel les singularités paraissent immobiles, devrait nous permettre de calculer beaucoup plus simplement les champs statiques dans $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$, puis d'obtenir les champs dynamiques dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ en utilisant des lois de

transformation qui doivent encore être définies.

L'exemple d'une dislocation vis mobile

Considérons une dislocation vis infinie le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ et supposons que celle-ci se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$. Dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ se déplaçant avec la corde de dislocation, le champ de déplacement doit être le champ de déplacement d'une dislocation vis statique, qui doit s'écrire dans $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ comme

$$\vec{u}_{ext}^{vis}{}' = \vec{e}_2 \frac{\Lambda}{\pi} \arctan \frac{x_1'}{x_3'} \tag{20.1}$$

Dans le but de transformer ce champ statique dans $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ en un champ dynamique associé à la dislocation vis mobile dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, on doit établir les lois de transformation qui nous fourniront les champs dynamiques dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Et les champs dynamiques ainsi obtenus doivent satisfaire les équations d'évolution spatio-temporelles dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Comme il y translation du repère $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ par rapport au repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, Les lois de transformation doivent transformer la coordonnée x_1' de $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ en une coordonnée qui doit dépendre de $(x_1 - \boldsymbol{v}t)$ dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. On peut émettre *à priori* l'hypothèse suivante pour les lois de transformation

Hypothèse 1:
$$\begin{cases} x_1' = \alpha(x_1 - \boldsymbol{v}t) \\ x_2' = \beta x_2 \\ x_3' = \beta x_3 \end{cases} \tag{20.2}$$

Avec ces lois de transformation, le champ de déplacement statique $\vec{u}_{ext}^{vis}{}'$ en devient un qui dépend du facteur $(x_1 - \boldsymbol{v}t)$ dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\vec{u}_{ext}^{vis}(\vec{r},t) = \vec{e}_2 \frac{\Lambda}{\pi} \arctan \frac{x_1'}{x_3'} = \vec{e}_2 \frac{\Lambda}{\pi} \arctan \frac{\alpha(x_1 - \boldsymbol{v}t)}{\beta x_3} \tag{20.3}$$

Il est possible de calculer les champs dynamiques de rotation $\vec{\omega}_{ext}^{screw}(\vec{r},t)$ et de vitesse du réseau $\vec{\phi}_{ext}^{screw}(\vec{r},t)$ associés avec la dislocation vis mobile dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\vec{\omega}_{ext}^{screw}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_{ext}^{screw}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\pi}\frac{\alpha\beta(x_1 - \boldsymbol{v}t)\vec{e}_1 + \alpha\beta x_3\vec{e}_3}{\alpha^2(x_1 - \boldsymbol{v}t)^2 + \beta^2 x_3^2} \tag{20.4}$$

$$\vec{\phi}_{ext}^{vis}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{u}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{e}_2 \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\alpha\beta\boldsymbol{v}x_3}{\alpha^2(x_1 - \boldsymbol{v}t)^2 + \beta^2 x^2{}_3} \tag{20.5}$$

Mais dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, *ces champs doivent satisfaire les équarions d'évolution spatio-temporelle suivantes*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(n\vec{p})}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{m} \\ \mathrm{div}(n\vec{p}) = 0 \end{cases} \tag{20.6}$$

qui peuvent être écrites, en utilisant le fait que $\vec{m} = 4(K_2 + K_3)\vec{\omega}_{ext}^{screw}$ et $n\vec{p} = nm\vec{\phi}_{ext}^{screw}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\phi}_{ext}^{vis}}{\partial t} = -2c_t^2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega}_{ext}^{vis} \\ \mathrm{div}\,\vec{\phi}_{ext}^{vis} = 0 \end{cases} \tag{20.7}$$

Il est facile de vérifier que la seconde relation est parfaitement vérifiée. Pour que la première relation soit satisfaite, en introduisant $\vec{\phi}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)$ and $\vec{\omega}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)$, la relation suivante doit être satisfaite entre les paramètres α et β introduits dans les lois de transformation l'hypothèse *(20.2)*

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2}} = \beta/\gamma_t \qquad \text{avec} \qquad \gamma_t = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2} \tag{20.8}$$

dans lesquelles il apparaît the facteur bien connu $\gamma_t = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2}$ des transformations de Lorentz.

En introduisant cette relation dans *(20.3)*, *(20.4)* et *(20.5)*, on obtient les expressions des champs de la dislocation vis dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \vec{u}_{ext}^{vis}(\vec{r},t) = \vec{e}_2 \dfrac{\Lambda}{\pi}\dfrac{1}{\gamma_t}\arctan\dfrac{(x_1-\boldsymbol{v}t)}{x_3} \\ \vec{\omega}_{ext}^{vis}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Lambda}{\pi}\dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{(x_1-\boldsymbol{v}t)\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3}{(x_1-\boldsymbol{v}t)^2/\gamma_t^2 + x_3^2} \\ \vec{\phi}_{ext}^{vis}(\vec{r},t) = -\vec{e}_2\dfrac{\Lambda}{\pi}\dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{\boldsymbol{v}x_3}{(x_1-\boldsymbol{v}t)^2/\gamma_t^2 + x^2{}_3} \end{cases} \tag{20.9}$$

Il est remarquable que ces champs, qui satisfont parfaitement les équations d'évolution spatio-temporelle dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, ne dépendent pas du paramètre β, mais seulement du paramètre γ_t, de telle sorte que le paramètre β peut être choisi librement, et ici on admettra la valeur de 1, de telle sorte que les lois de transformation spatiale deviennent simplement

$$\begin{cases} x_1' = (x_1-\boldsymbol{v}t)/\gamma_t \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \tag{20.10}$$

La contraction des champs dynamiques dans la direction du mouvement de la vis

Les expressions *(20.9)* pour les champs dynamiques $\vec{u}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)$, $\vec{\omega}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)$ et $\vec{\phi}_{ext}^{vis}(\vec{r},t)$ sont des solutions effectives des équations topologiques et de l'équation de Newton pour une dislocation vis se déplaçant dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Il est intéressant de jeter un coup d'oeil sur le comportement de ces champs en fonction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ de la dislocation. On peut prendre par exemple la projection ω_1 du champ vectoriel externe de rotation dans la direction du mouvement de la dislocation, et reporter sa valeur $\omega_1(t=0,x_3=0)$, prise à l'instant $t=0$ et pour la coordonnée $x_3=0$, en fonction de x_1 pour différentes valeurs du rapporto $\boldsymbol{v}/c_t$, comme illustré dans la figure 20.1. On observe alors que la composante horizontale du champ de rotation semble se contracter le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$. Il est facile de calculer à partir de (*20.9)* que la même valeur de $\omega_1(t=0,x_3=0)$ est observé à une distance Δx_1 de l'origine, donnée par

$$\Delta x_1 = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{\gamma_t}{\omega_1(t=0,x_3=0)} = \Delta x_1(\boldsymbol{v}=0)\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2} \tag{20.11}$$

de telle sorte que le champ de rotation de la dislocation vis mobile *est effectivement contracté le long de l'axe* $\boldsymbol{O}x_1$ *d'un facteur* γ_t.

La contraction spatiale d'un amas mobile de singularités topologiques de rotation

Imaginons maintenant un amas de singularités de rotation qui sont liées entre elles via leurs champs de rotation (il faut rappeler ici que le champ de rotation correspond au champ électrique dans notre analogie avec le monde réel). Si l'amas se déplace le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***GO,*** les champs de rotation associés à cet amas doivent se contracter le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ avec un facteur γ_t afin de satisfaire les équations topologiques et l'équation de Newton du réseau. La conséquence est alors que l'amas lui-même, qui est lié par ces champs de rotation, doit se contracter le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$. Si cet amas représente un "objet" pour le ***GO***, cet "objet" va se contracter le long de $\boldsymbol{O}x_1$. Mais s'il est observé dans son propre référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, cet "objet" va rester exactement le même qu'il est au repos dans le référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, et sa forme ne changera pas dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ quelle que soit la vitesse de cet "objet" dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$!

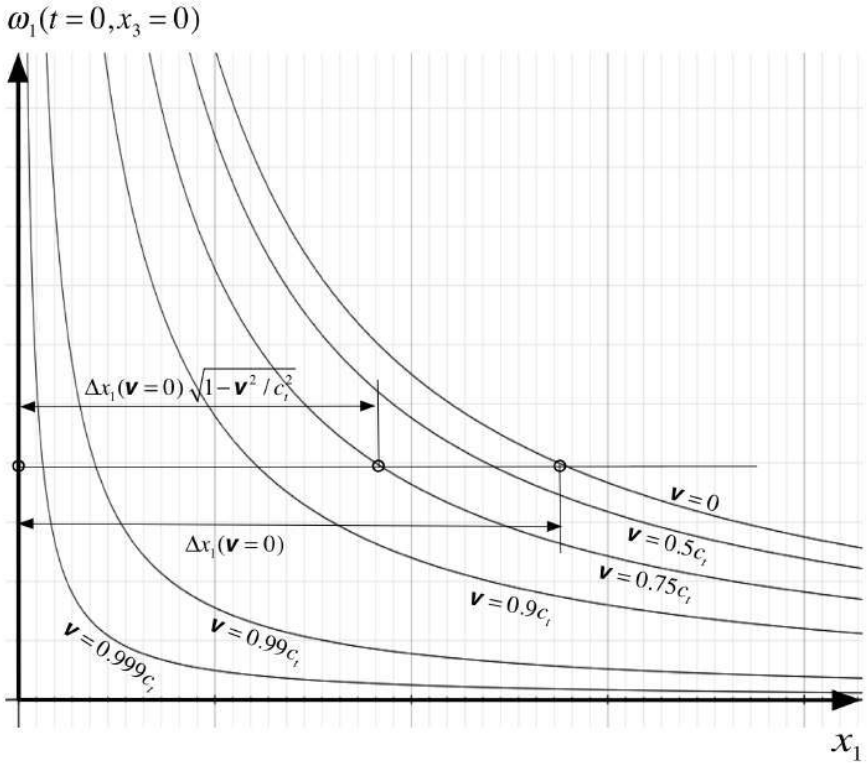


Figure 20.1 *- Contraction de la composante* $\omega_1(t=0,x_3=0)$ *du vecteur de rotation d'une dislocation vis dans* $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$*, dans la direction de son mouvement, en fonction de sa vitesse* $\vec{\boldsymbol{v}}$

La dilatation du temps d'un amas mobile de singularités topologiques de rotation

Imaginons maintenant que l'observateur mesure le temps T_0 nécessaire à une onde transversale pour parcourir la distance d_0 dans le référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, être réfléchie sur un miroir et retourner à son point d'émission. Il est clair que l'observateur mesure un temps égal à

$$T_0 = 2d_0 / c_t \qquad (20.12)$$

Un tel système basé sur un “objet” constitué par un amas de singularités lié par les champs de rotation peut être utilisé par l’observateur ***GO*** comme une base de temps, *une horloge donnant le le laps de temps de base* T_0.

Imaginons que le même système, basé sur le même “objet”, mais se déplaçant maintenant à une vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ le long de l’axe $\boldsymbol{O}x_1$ dans le référentiel de base $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, est observé par le ***GO***. Si l’onde transversale est émise dans le référentiel mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ dans la direction verticale au sein de ce référentiel, cette même onde est vue par le ***GO*** comme une onde non verticale dans son référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, comme illustré dans la figure 20.2. Pour l’observateur ***GO,*** le temps T qui est nécessaire pour que l’onde parcourt son périple via la réflection sur le miroir de l’”objet” mobile est facilement calculable en utilisant le triangle dans le plan $\boldsymbol{O}x_1x_3$

$$c_t^2\frac{T^2}{4}=\boldsymbol{v}^2\frac{T^2}{4}+d_0^2 \quad\Rightarrow\quad T=\frac{2d_0/c_t}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2}}=\frac{T_0}{\gamma_t} \tag{20.13}$$

Ceci signifie que le temps de base de l’horloge mobile dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, mesuré par le ***GO*** dans son référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, semble dilaté en fonction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ d’un facteur $1/\gamma_t$. Ceci signifie que l’horloge de l’”objet” mobile ralentit en comparaison de l’horloge absolue du ***GO.***

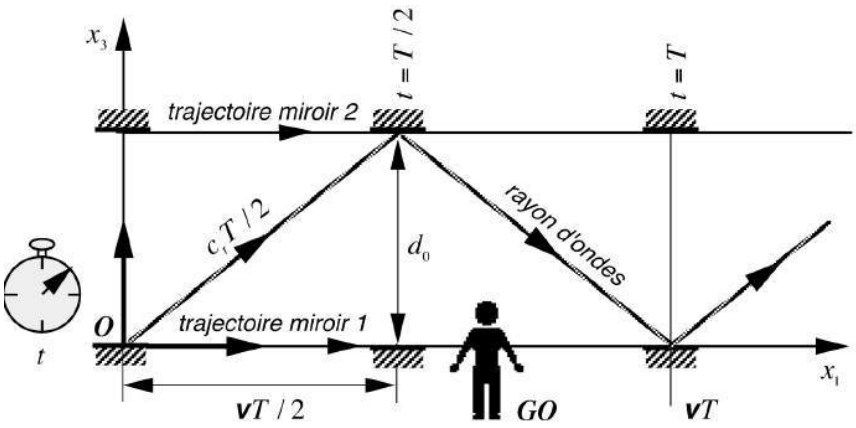


Figure 20.2 *- La trajectoire de l’onde transversale émise verticalement par l’horloge locale de l’”objet” mobile dans le référentiel* $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ *, telle qu’observée par le* ***GO*** *dans son référentiel* $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

On peut encore se demander si le temps dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ de l’”objet” reste isotrope dans ce référentiel, autrement dit si une horloge basée sur une trajectoire horizontale de l’onde transversale, donne le même temps que l’horloge verticale. Si l’horloge horizontale est observée par le ***GO*** dans son référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, la trajectoire de l’onde peut être illustrée comme dans la figure 20.3.

Dans le diagramme de la trajectoire de la figure 20.3, les trajectoires des miroirs mobiles sont représentées par deux lignes avec une pente $\boldsymbol{v}$, séparées par une distance d dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$. Les trajectoires des raies d’onde transversale sont représentées par deux lignes avec des pentes $+c_t$ et $-c_t$ respectivement, pour les deux directions de propagation de l’onde. Dans ce diagramme des trajectoires, on a donc

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = c_t T_1 = \boldsymbol{v} T_1 + d = -c_t T_1 + A \\ x_1^{(2)} = \boldsymbol{v} T \ = -c_t T \ + A \end{cases} \qquad (20.14)$$

Ce système d'équations possède la solution suivante pour le laps de temps T nécessaire à l'onde pour parcourir un chemin d'aller-retour via une réflection sur un miroir de l'"objet" mobile

$$T = \frac{2d / c_t}{1 - \boldsymbol{v}^2 / c_t^2} \qquad (20.15)$$

Mais pour le ***GO***, la distance d entre les deux miroirs associés à l'"objet" mobile est contractée d'un facteur γ_t comme on l'a vu dans la section précédente *(20.11),* ce qui fournit la relation entre la distance d et la distance d_0 au repos qui séparent les deux miroirs

$$d = \gamma_t d_0 = d_0 \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 / c_t^2} \qquad (20.16)$$

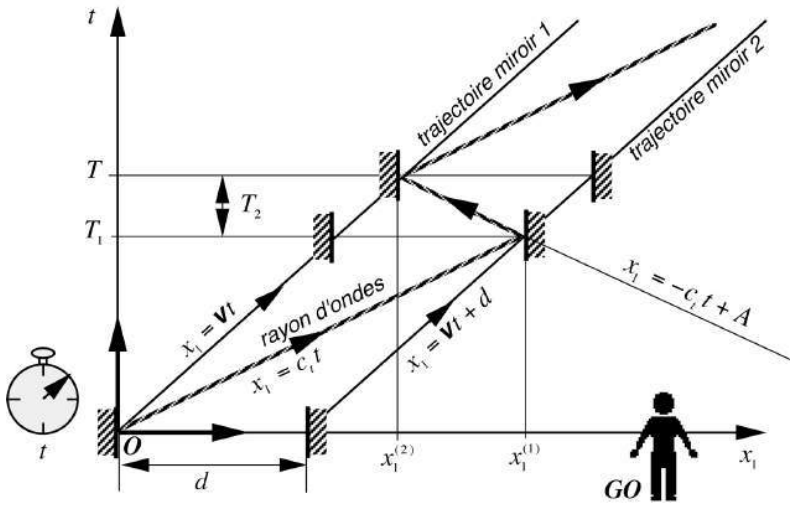


Figure 20.3 *- La trajectoire de l'onde transversale émise horizontalement par l'horloge locale de l'"objet" mobile dans le référentiel* $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ *, telle qu'observée par le* ***GO*** *dans son référentiel* $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

En combinant les relations *(20.15)* et *(20.16)*, on déduit que

$$T = \frac{2d_0 / c_t}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 / c_t^2}} = \frac{T_0}{\gamma_t} \qquad (20.17)$$

qui montre clairement, en comparaison avec la relation *(20.13)*, que les deux horloges mobiles, fonctionnant respectivement avec une propagation d'onde verticale et horizontale dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ fournissent exactement le même temps local, signifiant *qu'il existe bien un temps local* t' *et que ce temps local* t' *reste bien isotrope dans le référentiel mobile* $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$*, indépendamment de la direction du mouvement de l'"objet" dans le réseau*.

Dans le référentiel mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, la longueur que l'onde a à parcourir le long de $\boldsymbol{O'}x_1'$ ou $\boldsymbol{O'}x_3'$ à l'intérieur du système de l'horloge est mesurée comme une longueur d_0, et le laps de temps local pour faire l'aller-retour via la réflection sur un miroir est mesurée comme valant T_0 aussi bien dans le cas d'un onde se propageant verticalement qu'horizontalement. ceci si-

gnifie que la vitesse de l'onde mesurée dans le référentiel mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ a exactement la même valeur c_{t0} que celle mesurée dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ à expansion nulle, indépendamment de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ du référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ par rapport au référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Imaginons alors qu'une onde transversale se propage le long de $\boldsymbol{O'}x_1'$ danse $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$

$$\vec{\omega}' = \omega_0\vec{e}_3'\sin\left(k'x_1' - \omega't'\right) = \omega_0\vec{e}_3'\sin\left(\frac{\omega'}{c_t}x_1' - \omega't'\right) \qquad (20.18)$$

pour transformer cette onde dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, on utilise la transformation *(20.10)* et la relation suivante dans laquelle les paramètres ε etd δ doivent encore être déterminés

$$t' = \varepsilon t + \delta x_1 \qquad (20.19)$$

de telle sorte que l'expression de l'onde *(20.18)* devient, dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\vec{\omega} = \omega_0\vec{e}_3\sin\left[\omega'\left(\frac{1}{\gamma_t c_t} - \delta\right)x_1 - \omega'\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\gamma_t c_t} + \varepsilon\right)t\right] = \omega_0\vec{e}_3\sin\left(kx_1 - \omega t\right) \qquad (20.20)$$

Cette onde se propage avec une vitesse c_t dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, d'où

$$c_t = \frac{\omega}{k} = \quad \Rightarrow \quad c_t - \delta c_t^2\gamma_t = \boldsymbol{v} + \varepsilon\gamma_t c_t \qquad (20.21)$$

qui ne peut être satisfaite que si les paramètres ε et δ possèdent les valeurs suivantes

$$\delta = -\frac{\boldsymbol{v}}{\gamma_t c_t^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma_t} \qquad (20.22)$$

La loi de transformation pour t' devient alors

$$t' = \frac{t - \boldsymbol{v}\,x_1/c_t^2}{\gamma_t} \qquad (20.23)$$

La transformation de Lorentz pour un "objet" mobile lié par les champs de rotation

Les faits que les champs de rotation, et par conséquent les "objets" mobiles liés par les champs de rotation, sont réellement contractés dans la direction du mouvement d'un facteur $\gamma_t = \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c_t^2}$, que le temps isotrope mesuré par les horloges de l'"objet" mobile est réellement dilaté d'un facteur $1/\gamma_t$ et que les vitesses des ondes transversales mesurées dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et dans $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ ont exactement les mêmes valeurs c_t, signifient que les lois de transformation *(20.10)* et *(20.23)* permettant de passer d'un référentiel à l'autre sont les mêmes que les *transformations de Lorentz* bien connues de l'électromagnétisme

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ t' = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(t - \dfrac{\boldsymbol{v}x_1}{c_t^2}\right) \end{cases} \qquad (20.24)$$

Il faut noter ici que ces transformations ont été utilisées initialement comme de simples *outils mathématiques* permettant de calculer avec les équations de Maxwell les champs électroma-

gnétiques générés par des charges électriques mobiles. Plus tard, ces transformations ont été utilisées en relativité restreinte en postulant que les relations *(20.24)* sont applicables *à tout référentiel se déplaçant à vitesse* $\boldsymbol{v}$ *par rapport à un autre*, ce qui correspond en fait à *admettre axiomatiquement la constance de la vitesse de la lumière* dans tout référentiel!

Ici, dans le cas d'un réseau solide, la transformation de Lorentz est obtenue par une approche différente basée sur l'existence d'un réseau solide dans le référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***GO***, qui est *le support (l'éther) pour la propagation des ondes transversales*. Cette approche permet de démontrer la réalité des conséquences physiques de la transformation de Lorentz, telles que la contraction spatiale et la dilatation du temps mesurées dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ pour des "objets" mobiles constitués de singularités topologiques liées par des champs de rotation. Et cette démonstration est basée sur l'hypothèse initiale (*20.2)* que le ***GO*** peut introduire un référentiel relatif $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ associé à l'"objet" mobile dans son référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. L'utilisation de la transformation de Lorentz dans le cas du réseau cosmologique est donc limitée uniquement à transformer les champs entre un référentiel relatif mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et le référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ du ***GO,*** qui est fixé au réseau. Par conséquent, il n'y a absolument pas d'hypothèses axiomatique que la transformation de Lorentz est applicable à tout référentiel se mouvant relativement à un autre!

20.2 – Les deux transformations de Lorentz dans le cas du réseau cosmologique avec une expansion de fond $\tau_0 > \tau_{0cr}$

Considérons que l'expansion de fond du réseau cosmologique satisfait l'hypothèse suivante

Hypothèse 2: $\tau_0 > \tau_{0cr}$ *(20.25)*

Dans ce cas particulier, les ondes transversales et longitudionales peuvent se propager au sein du réseau.

Si l'observateur extérieur ***GO*** doit calculer les champs associés avec un "objet" mobile constitué de singularité topologiques qui sont liées par des champs de rotation et d'expansion, le problème devient beaucoup plus compliqué que précédemment quand seulement des champs de rotation sont impliqués. En supposant que le déplacement des charges liées dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ à lieu à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, on peut définir deux référentiels mobiles qui se déèlacent avec les charges, $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$, en attribuant à chacun de ces référentiels les lois de transformation de Lorentz avec les vitesses c_t et c_l respectivement. On définit alors

$$\begin{cases} \gamma_t = \sqrt{1-\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}} \\ \gamma_l = \sqrt{1-\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{c_l^2}} \end{cases} \qquad (20.26)$$

Pour le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, les transformations de Lorentz et leurs inverses deviennent respectivement

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right) \\ x_2' = x_2'' = x_2 \\ x_3' = x_3'' = x_3 \\ t' = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(t - \boldsymbol{v}x_1 / c_t^2\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(x_1' + \boldsymbol{v}t'\right) \\ x_2 = x_2' = x_2'' \\ x_3 = x_3' = x_3'' \\ t = \dfrac{1}{\gamma_t}\left(t' + \boldsymbol{v}x_1' / c_t^2\right) \end{cases} \tag{20.27}$$

Pour le référentiel $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$, les transformations de Lorentz sont aussi faciles à établir

$$\begin{cases} x_1'' = \dfrac{1}{\gamma_l}\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right) \\ x_2'' = x_2' = x_2 \\ x_3'' = x_3' = x_3 \\ t'' = \dfrac{1}{\gamma_l}\left(t - \boldsymbol{v}x_1 / c_l^2\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\gamma_l}\left(x_1'' + \boldsymbol{v}t''\right) \\ x_2 = x_2'' = x_2' \\ x_3 = x_3'' = x_3' \\ t = \dfrac{1}{\gamma_l}\left(t'' + \boldsymbol{v}x_1'' / c_l^2\right) \end{cases} \tag{20.28}$$

Grâce à ces transformations, on peut encore établir les relations existant entre les expressions des opérateurs de temps et d'espace dans chacun des référentiels. Au premier et au deuxième ordre respectivement, on obtient pour $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{\partial}{\partial x_1'} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{\gamma_t c_t^2}\dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x_2'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} = \dfrac{\partial}{\partial x_3'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{\partial}{\partial t'} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{\gamma_t}\dfrac{\partial}{\partial x_1'} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \dfrac{1}{\gamma_t^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1'^2} - \dfrac{2\boldsymbol{v}}{\gamma_t^2 c_t^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1'\partial t'} + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{\gamma_t^2 c_t^4}\dfrac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_2'^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_3'^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\gamma_t^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t'^2} - \dfrac{2\boldsymbol{v}}{\gamma_t^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1'\partial t'} + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{\gamma_t^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1'^2} \end{cases} \tag{20.29}$$

et pour $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\gamma_l}\dfrac{\partial}{\partial x''_1} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{\gamma_l c_l^2}\dfrac{\partial}{\partial t''} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x''_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} = \dfrac{\partial}{\partial x''_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{\gamma_l}\dfrac{\partial}{\partial t''} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{\gamma_l}\dfrac{\partial}{\partial x''_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \dfrac{1}{\gamma_l^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x''^2_1} - \dfrac{2\boldsymbol{v}}{\gamma_l^2 c_l^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x''_1\partial t''} + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{\gamma_l^2 c_l^4}\dfrac{\partial^2}{\partial t''^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x''^2_2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial}{\partial x''^2_3} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\gamma_l^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t''^2} - \dfrac{2\boldsymbol{v}}{\gamma_l^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x''_1\partial t'} + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{\gamma_l^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x''^2_1} \end{cases} \tag{20.30}$$

Un exemple d'application des transformations de Lorentz dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

A partir des équations d'évolution d'un réseau cosmologique en présence de *faibles perturbations* $\tau^{(p)}$ *de l'expansion volumique* , il est possible de retrouver une version simplifiée de l'équation de Newton *(13.14)* dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Dans le cas très simple où il n'y a ni charges, ni

flux de charges, ni auto-diffusion, à savoir si

$$\textbf{Hypothèses 3:}\quad \begin{cases} \vec{J}=0 \;\;;\;\; \lambda=0 \;\;;\;\; \vec{\lambda}=0 \\ \vec{\omega}^{an}=0 \\ \vec{J}_I=\vec{J}_L=0 \end{cases} \qquad (20.31)$$

les équations principales en présence de perturbations faibles peuvent se résumer aux trois couples suivants, en remplaçant d/dt par $\partial/\partial t$ au voisinage de l'origine de $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} \partial\vec{\omega}/\partial t \cong \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}\right)/2 \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega}=0 \\ \partial\tau^{(p)}/\partial t \cong \mathrm{div}\,\vec{\phi} \end{cases}$$

$$\left\{ \quad n\partial\vec{p}/\partial t \cong -\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{m}\right)/2+\left[-K_0+4K_2/3+2K_1\left(1+\tau_0\right)\right]\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau^{(p)} \right. \qquad (20.32)$$

$$\begin{cases} \vec{m} \cong 4\left(K_2+K_3\right)\vec{\omega} \\ \vec{p} \cong m\left(1+C_I-C_L\right)\vec{\phi} \\ n=n_0\,\mathrm{e}^{-\tau_0} \end{cases}$$

On en déduit aisément une équation d'onde *linéarisée* pour le champ de vitesse $\vec{\phi}$

$$\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial t^2} \cong -c_t^2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}+c_l^2\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{\phi} \qquad (20.33)$$

dans laquelle les célérités des ondes transversales et longitudinales valent respectivement

$$c_t \cong \sqrt{\left(K_2+K_3\right)/mn\left(1+C_I-C_L\right)} \qquad (20.34)$$

$$c_l \cong \sqrt{\left[-K_0+4K_2/3+2K_1\left(1+\tau_0\right)\right]/mn\left(1+C_I-C_L\right)} \qquad (20.35)$$

En utilisant un vecteur de déplacement donné approximativement par la relation $\vec{\phi} \cong -\partial\vec{u}/\partial t$, on peut encore écrire l'équation d'ondes sous la forme

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \cong -c_t^2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}+c_l^2\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} \qquad (20.36)$$

Reprenons l'équation *(20.11)* et appliquons lui le rotationnel et la divergence, en introduisant les grandeurs auxiliaires $\vec{A}$ et B définies par les relations suivantes

$$\vec{A}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \qquad \textit{et} \qquad B=\mathrm{div}\,\vec{u} \qquad (20.37)$$

Il vient les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \cong -c_t^2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}=c_t^2\Delta\vec{A} \\ \\ \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} \cong c_l^2\,\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,B=c_l^2\Delta B \end{cases} \qquad (20.38)$$

Ainsi, dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ lié au réseau solide, les grandeurs auxiliaires $\vec{A}$ et B se découplent et satisfont chacune à une équation d'ondes indépendante, $\vec{A}$ gérant le champ de déplacement transversal et B le champ de déplacement longitudinal.

En appliquant alors les relations de transformations de Lorentz *(20.28)* à *(20.30)* aux équations

d'onde *(20.38),* on obtient les équations suivantes dans les référentiels $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$ respectivement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t'^2} = c_t^2 \Delta' \vec{A} = c_t^2 \left(\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x_1'^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x_2'^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x_3'^2} \right) \\ \dfrac{\partial^2 B}{\partial t''^2} = c_l^2 \Delta'' B = c_l^2 \left(\dfrac{\partial^2 B}{\partial x_1''^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial x_2''^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial x_3''^2} \right) \end{cases} \qquad (20.39)$$

On constate que les transformations de Lorentz introduites précédemment permettent d'assurer que les champs $\vec{A}$ et B *satisfont les mêmes équations d'ondes* dans les deux référentiels mobiles que dans le référentiel initial fixé au réseau solide. On en conclue que les transformations de Lorentz laissent *invariantes* les lois physiques dans les repères mobiles.

Si un champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r},t)$ est généré dans un réseau par des charges localisées en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, on applique les transformations définies ci-dessus en utilisant les référentiels $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$ mobiles avec les charges à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$. Le problème revient alors à résoudre des équations statiques pour décrire les champs $\vec{A}$ et B, qui sont dus aux charges immobiles dans les référentiels $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$ respectivement. Connaissant les solutions statiques pour $\vec{A}$ et B dans les référentiels mobiles $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ et $\boldsymbol{O''}x_1''x_2''x_3''$, il est en principe possible de remonter à la solution dynamique pour $\vec{u}(\vec{r},t)$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ lié au réseau solide.

20.3 – L'unique transformation de Lorentz dans le cas du réseau cosmologique avec une expansion de fond $\tau_0 < \tau_{0cr}$

Cependant, la résolution complète de ce type de problème pour une densité $\vec{\lambda}_i$ quelconque de charges mobiles dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ peut s'avérer extrêmement complexe. Notamment, s'il existe un champ d'expansion non homogène au sein du réseau, d'autant plus que les perturbations longitudinales peuvent se propager comme des ondes.

C'est pourquoi nous ne traiterons dans la suite de ce chapitre que le cas particulier, *qui est en fait le cas vraiment intéressant pour notre analogie avec l'univers*, de singularités topologiques qui se déplacent dans le réseau cosmologique parfait présentant une expansion volumique homogène et constante qui satisfait l'hypothèse suivante;

Hypothèse 4: *l'expansion volumique de fond du réseau cosmologique est constante et homogène, et satisfait* $\tau_0 < \tau_{0cr}$ *(20.40)*

Dans ce cas, nous savons que *les ondes longitudinales n'existent pas*, signifiant par là que ***toute perturbation des champs de distorsion ne peut se propager qu'à la vitesse des ondes transversales***, et que le problème de déterminer les champs de singularités mobiles peut être résolu ***en appliquant uniquement la transformation de Lorentz pour le référentiel*** $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$.

Le problème des champs de perturbation de l'expansion liés aux singularités topologiques sera traité plus tard, dans les chapitres traitant, d'une part des *"champs gravitationnels"* (les perturbations statiques du champ d'expansion dues aux singularités topologiques, chapitre 22), et d'autre part des *"champs quantiques"* (les perturbations dynamiques du champ d'expansion

dues aux singularités topologiques mobiles lorsque $\tau_0 < \tau_{0cr}$, chapitre 27).

L'application des transformations de Lorentz aux charges scalaires de rotation

Si on considère maintenant des charges de rotation mobiles, de densité de charge λ, qui se déplacent au sein du réseau à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ le long de l'axe Ox_1, les champs $\vec{\omega}$ générés par ces charges seront des champs dynamiques qui évolueront en fonction des mouvements des charges. Comme la transmission des informations des charges mobiles en un point quelconque du réseau solide se fait en ce cas à la vitesse c_t des ondes transversales, on peut utiliser la transformation de Lorentz décrite à la section 20.1 en associant un référentiel mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ aux charges. Il est intéressant ici de trouver les relations de transformation concernant le couple d'équations *(20.6)* gérant la dynamique au sein du réseau, à l'extérieur des charges, dans le cas où l'expansion volumique est homogène et constante ($n = cste$). Ce couple d'équations peut s'écrire en composantes, pour p_i et m_i dans le référentiel fixe $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et pour p'_i et m'_i dans le référentiel mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ respectivement, de la façon suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(np_1)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial m_2}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{\partial(np_2)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial m_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{\partial(np_3)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial m_1}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{\partial(np_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(np_2)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(np_3)}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(np_1)'}{\partial t'} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_3'}{\partial x'_2} - \dfrac{\partial m_2'}{\partial x'_3}\right) \\ \dfrac{\partial(np_2)'}{\partial t'} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_1'}{\partial x'_3} - \dfrac{\partial m_3'}{\partial x'_1}\right) \\ \dfrac{\partial(np_3)'}{\partial t'} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_2'}{\partial x'_1} - \dfrac{\partial m_1'}{\partial x'_2}\right) \\ \dfrac{\partial(np_1)'}{\partial x'_1} + \dfrac{\partial(np_2)'}{\partial x'_2} + \dfrac{\partial(np_3)'}{\partial x'_3} = 0 \end{cases} \tag{20.41}$$

En appliquant dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ les règles de transformation de Lorentz à ces équations, on obtient, après quelques manipulations, le set d'équations suivantes dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(np_1)}{\partial t'} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_2'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(m_3 + 2\boldsymbol{v}np_2\right)\right] + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_3'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(m_2 - 2\boldsymbol{v}np_3\right)\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial t'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(np_2 + \dfrac{\boldsymbol{v}}{2c_t^2}m_3\right)\right] = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial m_1}{\partial x_3'} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(m_3 + 2\boldsymbol{v}np_2\right)\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial t'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(np_3 - \dfrac{\boldsymbol{v}}{2c_t^2}m_2\right)\right] = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(m_2 - 2\boldsymbol{v}np_3\right)\right] + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial m_1}{\partial x_2'} \\ \dfrac{\partial(np_1)}{\partial x_1'} + \dfrac{\partial}{\partial x_2'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(np_2 + \dfrac{\boldsymbol{v}}{2c_t^2}m_3\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial x_3'}\left[\dfrac{1}{\gamma_t}\left(np_3 - \dfrac{\boldsymbol{v}}{2c_t^2}m_2\right)\right] = 0 \end{cases} \tag{20.42}$$

qui peuvent être comparées aux équations pour les composantes de $(n\vec{p})'$ et $\vec{m}'$ dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$. On en déduit donc les équations de transformation des champs de quantité de mouvement $(n\vec{p})$ et de moment $\vec{m}$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ en les champs $(n\vec{p})'$ et $\vec{m}'$ dans le référentiel $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$

$$\begin{cases} m_1' = m_1 \\ m_2' = \left(m_2 - 2\boldsymbol{v} n p_3\right)/\gamma_t \\ m_3' = \left(m_3 + 2\boldsymbol{v} n p_2\right)/\gamma_t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} np_1' = np_1 \\ np_2' = \left(np_2 + \boldsymbol{v} m_3/(2c_t^2)\right)/\gamma_t \\ np_3' = \left(np_3 - \boldsymbol{v} m_2/(2c_t^2)\right)/\gamma_t \end{cases} \qquad (20.43)$$

Grâce à ces relations de transformation, on va pouvoir calculer les champs associés au mouvement au sein d'un réseau solide de différents types de charges de rotation, ainsi que leur énergie totale, composée de leur énergie potentielle élastique et de leur énergie cinétique.

20.4 – Dynamique relativiste d'une dislocation vis ou coin rectiligne

Considérons une corde vis cylindrique infinie et supposons que celle-ci se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$. Dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$ en mouvement avec la corde, on a évidemment $p_1' = p_2' = p_3' = 0$, ainsi que $m_2' = 0$, de sorte que, à partir des relations *(20.43),* on déduit

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_1' \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 = \omega_3'/\gamma_t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = -2\boldsymbol{v}\omega_3'/\gamma_t \\ \phi_3 = 0 \end{cases} \qquad (20.44)$$

A partir de l'expression *(19.1)* du champ statique $\vec{\omega}_{ext}$ ainsi que des relations de transformation de Lorentz *(20.27),* on peut déduire les champs dynamiques $\vec{\omega}_{ext}$ et $\vec{\phi}$ exprimés dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{ext}^{vis} &= \omega_1\vec{e}_1 + \omega_3\vec{e}_3 = \omega_1'\vec{e}_1 + \frac{1}{\gamma_t}\omega_3'\vec{e}_3 = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_1'}{x_1'^2 + x_3'^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\gamma_t}\frac{\Lambda}{2\pi}\frac{x_3'}{x_1'^2 + x_3'^2}\vec{e}_3 \\ &= \frac{\Lambda}{2\pi}\left[\frac{x_1'\vec{e}_1}{x_1'^2 + x_3'^2} + \frac{1}{\gamma_t}\frac{x_3'\vec{e}_3}{x_1'^2 + x_3'^2}\right] = \frac{\Lambda}{2\pi\gamma_t}\frac{\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right)\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3}{\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right)^2/\gamma_t^2 + x_3^2} \end{aligned} \qquad (20.45a)$$

$$\vec{\phi}_{ext}^{vis} = \phi_2^{vis}\vec{e}_2 = -\frac{2\boldsymbol{v}\omega_3'\vec{e}_2}{\gamma_t} = -2\boldsymbol{v}\omega_3\vec{e}_2 = \frac{\Lambda}{\pi\gamma_t}\frac{-\boldsymbol{v}x_3\vec{e}_2}{\left(x_1 - \boldsymbol{v}t\right)^2/\gamma_t^2 + x_3^2} \qquad (20.45b)$$

A noter qu'on aurait pu utiliser ici la méthode que Frank[1] à publié en 1949, en exprimant le champ de déplacement obtenu en *(19.3)* dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ en utilisant les transformations de Lorentz *(20.6)*

$$\vec{u}_{ext}^{vis} = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\arctan\frac{x_1'}{x_3'} = \vec{e}_2\frac{\Lambda}{\pi}\arctan\frac{x_1 - \boldsymbol{v}t}{\gamma_t x_3} \qquad (20.45c)$$

et en déduire directement les expressions *(20.45)* dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ grâce aux deux relations $\vec{\omega}_{ext}^{vis} = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_{ext}^{vis})/2$ et $\vec{\phi}_{ext}^{vis} = \partial\vec{u}_{ext}^{vis}/\partial t$.

L'énergie relativiste totale d'une dislocation vis en mouvement

On déduit directement des relations *(20.45)* la densité d'énergie élastique de distorsion F_{dist}^{vis} et la densité d'énergie cinétique F_{cin}^{vis} dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

---

[1] *F. C. Frank, Proc. Phys. Soc., vol. A62, , p. 131, 1949*

$$\begin{cases} F_{dist}^{vis} = 2\left(K_2+K_3\right)\sum_i \omega_i^2 = 2\left(K_2+K_3\right)\left(\omega_1'^2+\omega_3'^2/\gamma_t^2\right) \\ F_{cin}^{vis} = mn\phi_2^2/2 = 2mn\boldsymbol{v}^2\omega_3'^2/\gamma_t^2 \end{cases} \qquad (20.46)$$

ainsi que la densité totale d'énergie $F_{tot}^{vis} = F_{dist}^{vis} + F_{cin}^{vis}$ simplement en utilisant la relation $\left(K_2+K_3\right)/mn = c_t^2$

$$F_{tot}^{vis} = F_{dist}^{vis} + F_{cin}^{vis} = 2\left(K_2+K_3\right)\left[\omega_1'^2+\omega_3'^2/\gamma_t^2+\boldsymbol{v}^2\omega_3'^2/c_t^2\gamma_t^2\right] \qquad (20.47)$$

L'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{vis}$ par unité de longueur de dislocation vient par intégration dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{vis} = \frac{2\left(K_2+K_3\right)}{\gamma_t^2}\iiint_V\left[\gamma_t^2\omega_1'^2+\omega_3'^2+\boldsymbol{v}^2\omega_3'^2/c_t^2\right]dx_1dx_2dx_3 \qquad (20.48)$$

Mais cette intégration peut être faite de manière beaucoup plus simple dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$ puisque $dx_1 = \gamma_t dx_1'$, $dx_2 = dx_2'$ et $dx_3 = dx_3'$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{vis} = \frac{2\left(K_2+K_3\right)}{\gamma_t}\iiint_{V'}\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\right)\omega_1'^2+\omega_3'^2+\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\omega_3'^2\right]dx_1'dx_2'dx_3' \qquad (20.49)$$

Dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$, il est clair que $\omega_1'^2 = \omega_3'^2 = \vec{\omega}'^2/2$, de sorte que

$$E_{\boldsymbol{v}}^{vis} = \frac{1}{\gamma_t}\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)+\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right]\left(2\left(K_2+K_3\right)\iiint_{V'}\vec{\omega}'^2\,dx_1'dx_2'dx_3'\right) \qquad (20.50)$$

La valeur de la deuxième parenthèse est l'énergie de repos E_0^{vis} par unité de longueur de la dislocation vis que nous avions obtenue par la relation *(19.7)*, de sorte que

$$E_{\boldsymbol{v}}^{vis} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{vis}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}E_{dist}^{vis}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{vis}}{\gamma_t} = \frac{1}{\gamma_t}\frac{\left(K_2+K_3\right)\Lambda^2}{\pi}\ln\frac{R_\infty}{R} \qquad (20.51a)$$

Cette expression de l'énergie mérite quelques commentaires:

- il est possible de transformer quelque peu la relation *(20.31a)* pour y faire apparaître à bon escient la masse d'inertie $M_0^{vis} \cong E_{dist}^{vis}/c_t^2$ au repos de la dislocation vis. Il vient

$$E_{\boldsymbol{v}}^{vis} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{vis}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}M_0^{vis}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{vis}}{\gamma_t} = \frac{M_0^{vis}c_t^2}{\gamma_t} \qquad (20.51b)$$

Cette expression est tout à fait remarquable, car elle permet de mieux comprendre les véritables origines physiques des termes relativistes $E_{\boldsymbol{v}}^{dist}$ et $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ propres à notre théorie.

En effet, sous cette forme, le terme $E_{\boldsymbol{v}}^{dist}$ correspond à *la correction relativiste de l'énergie de distorsion élastique de repos* E_{dist}^{vis}, alors que le terme $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ correspond à *la correction relativiste de l'énergie cinétique non relativiste* $M_0^{vis}\boldsymbol{v}^2/2$.

- dans ce cas de dislocation vis, c'est-à-dire lorsque la densité de charge scalaire λ se trouve répartie dans une *corde rectiligne infinie*, le comportement de l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{vis}$ est un pur *comportement relativiste*, satisfaisant très exactement la fameuse relation de la relativité restreinte $E = E_0/\gamma$,

- l'énergie totale associée à la charge en mouvement tend vers une valeur infinie lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ tend vers la célérité des ondes transversales c_t comme le montre la figure 20.4. Ce comportement est généré par la présence du terme $\gamma_t = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2}$ dans l'expression

(20.51) de l'énergie, terme qui est dû à la contraction relativiste du champ de rotation dans la direction du mouvement, imposée par la transformation de Lorentz,

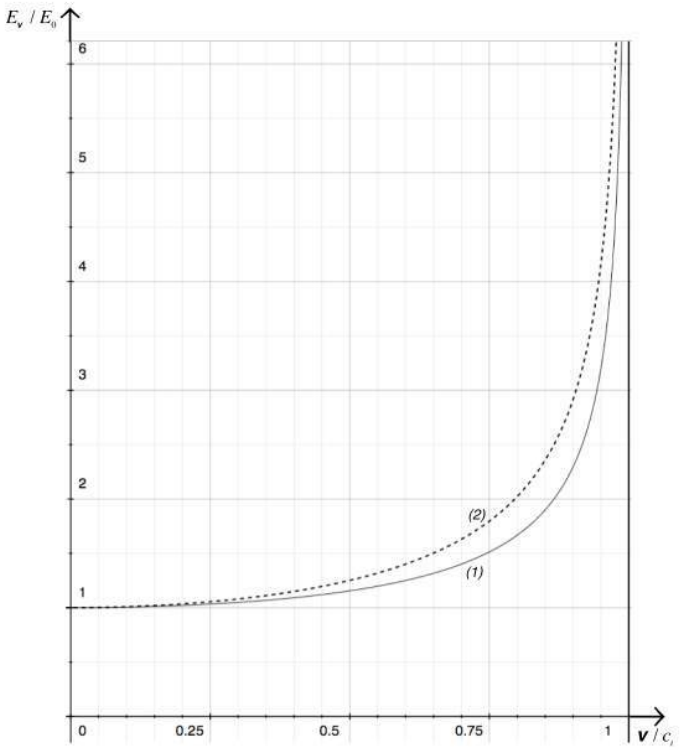


Figure 20.4 *- Energie totale de la charge rapportée à son énergie de repos, en fonction de la valeur de* $\boldsymbol{v} / c_t$ *, dans le cas d'une dislocation vis ou coin (1) ou d'une charge sphérique de rotation (2)*

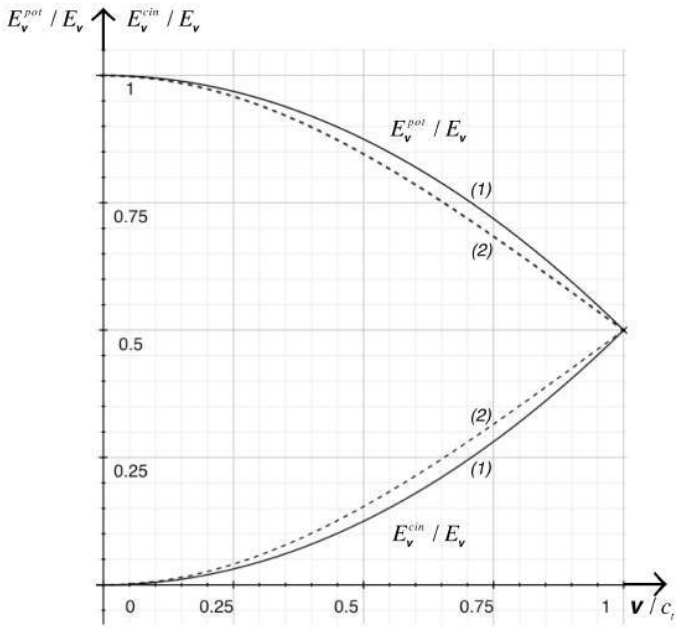


Figure 20.5 *- fractions de l'énergie totale sous forme potentielle et cinétique, en fonction de la valeur de* $\boldsymbol{v} / c_t$ *, dans le cas d'une dislocation vis ou coin (1) ou d'une charge sphérique de rotation (2)*

- l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{vis}$ associée à la charge en mouvement n'est pas du tout de l'énergie stockée dans la singularité elle-même, mais c'est le mouvement de la singularité dans le réseau qui stocke à la fois de l'énergie potentielle $E_{\boldsymbol{v}}^{dist}$ de distorsion élastique du réseau et de l'énergie cinétique newtonienne $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ de mouvement du réseau dans son voisinage,
- les fractions de l'énergie totale se retrouvant sous forme d'énergie potentielle élastique de rotation du réseau et sous forme d'énergie cinétique des mailles du réseau dépendent de la valeur du rapport $\boldsymbol{v} / c_t$ comme le montre la figure 20.5. On y constate entre autre que les fractions d'énergie sous forme potentielle et sous forme cinétique deviennent parfaitement égales lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ d'une charge tend vers la célérité c_t des ondes transversales!
- le fait d'obtenir très exactement un comportement relativiste est dû à la particularité que le terme d'énergie cinétique $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ est exactement compensé par un terme négatif additionnel dans l'énergie potentielle $E_{\boldsymbol{v}}^{dist}$ dans le cas d'une dislocation vis. Nous verrons par la suite que cet effet de compensation n'est pas systématique, et qu'il dépend essentiellement de la topologie de la charge considérée. On a par conséquent ici une situation quelque peu paradoxale, à savoir que *la dynamique relativiste des dislocations vis est une conséquence directe de la dynamique purement newtonienne du réseau* dans l'espace absolu du ***GO***, car c'est la compensation exacte du terme d'énergie cinétique newtonienne $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ du réseau par le terme négatif additionnel dans l'énergie potentielle élastique $E_{\boldsymbol{v}}^{pot}$ qui en est responsable!

L'énergie relativiste d'une dislocation coin en mouvement dans le réseau cosmologique parfait

Reprenons le cas de la dislocation coin rectiligne traité à la section 19.2, en supposant que le réseau est un *réseau cosmologique parfait* satisfaisant les conjectures *(19.58)* et l'hypothèse 4 *(20.40).* En ce cas, nous avons vu par le calcul purement classique de l'énergie de distorsion et de l'énergie cinétique que la dislocation coin satisfait aussi une vraie relation d'Einstein *(19.59)*, tout comme la dislocation vis

$$E_{dist}^{coin} \cong M_0^{coin} c_t^2 \qquad (20.52)$$

Ainsi, les conjectures *(19.58)*, à savoir que $K_0 = K_3 > 0$ et que $K_1 << K_0$ et $K_2 << K_3$, et l'hypothèse 4 *(20.40)*, à savoir que $\tau_0 < \tau_{0cr}$ et que les ondes longitudinales n'existent pas, impliquent que les dislocations coin dans un réseau cosmologique parfait sont soumises exactement aux mêmes comportements relativistes que les dislocations vis, et donc qu'on a

$$E_{\boldsymbol{v}}^{coin} = \frac{E_{dist}^{coin}}{\gamma_t} \qquad (20.53)$$

ce qui est facilement vérifiable, puisqu'aux faibles vitesses on obtient une relation qui corrobore parfaitement les résultats obtenus à la section 19.2

$$E_{\boldsymbol{v}}^{coin} = \frac{E_{dist}^{coin}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c_t^2}} \underset{\boldsymbol{v}<<c_t}{\longrightarrow} E_{dist}^{coin}\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2/c_t^2\right) = E_{dist}^{coin} + \frac{1}{2}\frac{E_{dist}^{coin}}{c_t^2}\boldsymbol{v}^2 = E_{dist}^{coin} + \frac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2 = E_{dist}^{coin} + E_{cin}^{coin} \qquad (20.54)$$

Ainsi, la relation *(20.51b)* est aussi applicable aux dislocations coin dans le réseau cosmologique quand $\tau_0 < \tau_{0cr}$, de sorte que

$$E_{\boldsymbol{v}}^{coin} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{coin}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}M_0^{coin}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{coin}}{\gamma_t} = \frac{M_0^{coin}c_t^2}{\gamma_t} = \frac{1}{\gamma_t}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2\frac{K_3\vec{\Lambda}^2}{2\pi}\ln\frac{R_\infty}{R} \qquad (20.55)$$

La dynamique relativiste d'une dislocation vis ou coin en mouvement

Supposons qu'une dislocation vis ou coin rectiligne, qui se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans un *réseau cosmologique parfait*, soit soumise à une *force de Peach et Koehler* $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ par unité de longueur. De par la géométrie rectiligne de la dislocation, les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ ne peuvent être que perpendiculaire à la ligne de dislocation. La puissance transmise à la dislocation par la force $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ s'écrit évidemment $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}\vec{\boldsymbol{v}}$, et cette puissance vient accroître l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}$ de la dislocation, de sorte que l'équation dynamique relativiste de la dislocation peut s'écrire

$$\frac{dE_{\boldsymbol{v}}^{disloc}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}}_{PK}\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (20.56)$$

En supposant que les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ soient parallèles, l'équation peut s'écrire

$$\frac{dE_{\boldsymbol{v}}^{disloc}}{dt} = \frac{\partial E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\frac{E_{dist}^{disloc}}{\gamma_t}\right)\boldsymbol{a} = E_{dist}^{disloc}\frac{\boldsymbol{v}}{\gamma_t^3 c_t^2}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{PK}\boldsymbol{v} \qquad (20.57)$$

dans laquelle $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ est l'accélération de la dislocation.
En utilisant la relation $E_{dist}^{disloc} = M_0^{disloc}c_t^2$ *(19.59)*, l'équation dynamique relativiste peut donc s'écrire sous la forme vectorielle

$$\frac{E_{dist}^{disloc}}{\gamma_t^3 c_t^2}\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{M_0^{disloc}}{\gamma_t^3}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{PK} \qquad (20.58)$$

En introduisant la *quantité de mouvement relativiste* $\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc}$ par unité de longueur de la dislocation vis ou coin

$$\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc} = \frac{E_{dist}^{disloc}}{\gamma_t c_t^2}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{M_0^{disloc}}{\gamma_t}\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (20.59)$$

on vérifie aisément que l'équation dynamique relativiste peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc}}{dt} = \frac{E_{dist}^{disloc}}{\gamma_t^3 c_t^2}\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{M_0^{disloc}}{\gamma_t^3}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{PK} \qquad (20.60)$$

L'expression *(20.37)* de la quantité de mouvement relativiste $\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc}$ permet d'introduire une masse relativiste $M_{\boldsymbol{v}}^{disloc}$ de la dislocation en mouvement dont on peut déduire l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}$ et la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc}$

$$M_{\boldsymbol{v}}^{disloc} = \frac{M_0^{disloc}}{\gamma_t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_{\boldsymbol{v}}^{disloc} = \dfrac{M_0^{disloc}c_t^2}{\gamma_t} = M_{\boldsymbol{v}}^{disloc}c_t^2 \\ \vec{\boldsymbol{P}}^{disloc} = \dfrac{M_0^{disloc}}{\gamma_t}\vec{\boldsymbol{v}} = M_{\boldsymbol{v}}^{disloc}\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases} \qquad (20.61)$$

Les relations *(20.59)* à *(20.61)* sont parfaitement identiques aux relations dynamiques obtenues en relativité restreinte. On peut d'ailleurs vérifier que la relation classique en relativité restreinte $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ possède ici son analogue sous la forme

$$\left(E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}\right)^2 = \left(M_0^{disloc}\right)^2 c_t^4 + \left(\vec{\boldsymbol{P}}^{disloc}\right)^2 c_t^2 \qquad (20.62)$$

Une remarque très intéressante s'impose ici: l'énergie relativiste totale $E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}$ associée au mouvement de la dislocation est la somme de l'énergie potentielle $E_{\boldsymbol{v}}^{dist}$ de déformation élastique du réseau et de l'énergie cinétique newtonienne $E_{\boldsymbol{v}}^{cin}$ de mouvement du réseau. Mais en associant l'énergie relativiste totale $E_{\boldsymbol{v}}^{disloc}$ à cette corde en mouvement, et sachant que l'énergie au repos de cette corde est donnée par E_{dist}^{disloc}, on pourrait aussi considérer que l'énergie de la corde en mouvement est égale la somme de son énergie de repos E_{dist}^{disloc} et d'une *énergie de mouvement* E_{mvt}^{disloc} qui correspond à l'énergie additionnelle générée par son déplacement au sein du milieu, en écrivant

$$E_{mvt}^{disloc} = E_{\boldsymbol{v}}^{disloc} - E_{dist}^{disloc} = \left(M_{\boldsymbol{v}}^{disloc} - M_0^{disloc}\right)c_t^2 = M_0^{disloc}\left(\frac{1}{\gamma_t} - 1\right)c_t^2 \qquad (20.63)$$

En relativité restreinte, cette énergie de mouvement E_{mvt}^{disloc} est souvent appelée *l'énergie cinétique* T *de la particule*. Mais dans le cas de la dislocation considérée ici, on sait qu'il ne s'agit pas réellement d'une énergie cinétique puisque E_{mvt}^{disloc} est en fait la combinaison suivante d'énergie potentielle et d'énergie cinétique réelle des particules du réseau

$$E_{mvt}^{disloc} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{disloc}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}E_{dist}^{disloc}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} - E_{dist}^{disloc} \qquad (20.64)$$

Finalement, si on calcule l'énergie totale pour les faibles vitesses ($\boldsymbol{v} << c_t$) , on obtient

$$E_{\boldsymbol{v}}^{disloc} \cong E_{dist}^{disloc}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2} + ...\right) \cong E_{dist}^{disloc} + \frac{E_{dist}^{disloc}}{2c_t^2}\boldsymbol{v}^2 + ... = E_{dist}^{disloc} + \frac{1}{2}M_0^{disloc}\boldsymbol{v}^2 + ... \qquad (20.65)$$

et on retrouve la *masse d'inertie au repos* M_0^{disloc} de la dislocation *(19.59),* exactement telle qu'on l'avait trouvée de manière tout-à-fait classique au chapitre 19!

20.5 – Dynamique relativiste des singularités en boucles

Nous avons vu au chapitre 19 que les singularités topologiques en boucles dans un *réseau cosmologique parfait* satisfont aussi toutes la relation d'Einstein

$$E_{dist}^{boucle} = M_0^{boucle}c_t^2 \qquad (20.66)$$

qui a été obtenue à partir d'un calcul classique de leur énergie élastique de distorsion et de leur énergie cinétique. Ceci implique que l'énergie relativiste des singularités en boucles se déduit de manière identique qu'on a déduit l'énergie relativiste d'une dislocation coin ci-dessus. Par conséquent, on déduit les énergies relativistes suivantes pour les singularités en boucles dans un réseau cosmologique parfait, à savoir la *boucle de désinclinaison vis, la boucle de dislocation coin prismatique et la boucle de dislocation mixte de glissement*

$$E_{\boldsymbol{v}}^{BV} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{BV}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}M_0^{BV}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{BV}}{\gamma_t} = \frac{M_0^{BV}c_t^2}{\gamma_t} \qquad (20.67)$$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{BC} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{BC}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}M_0^{BC}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{BC}}{\gamma_t} = \frac{M_0^{BC}c_t^2}{\gamma_t} \qquad (20.68)$$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{BM} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{BM}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}M_0^{BM}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{E_{dist}^{BM}}{\gamma_t} = \frac{M_0^{BM}c_t^2}{\gamma_t} \qquad (20.69)$$

On en déduit aussi que, dans un *réseau cosmologique parfait*, l'équation dynamique relativiste d'une singularité en boucle est identique à celle d'une dislocation vis ou coin, à savoir

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}^{\,boucle}}{dt} = \frac{E_{dist}^{boucle}}{\gamma_t^3 c_t^2}\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{M_0^{boucle}}{\gamma_t^3}\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}^{\,boucle} \qquad (20.70)$$

dans laquelle $\vec{\boldsymbol{F}}^{\,boucle}$ est la force agissant globalement sur la boucle et $\vec{\boldsymbol{P}}^{\,boucle}$ est la quantité de mouvement relativiste de la boucle, donnée par

$$\vec{\boldsymbol{P}}^{\,boucle} = \frac{E_{dist}^{boucle}}{\gamma_t c_t^2}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{M_0^{boucle}}{\gamma_t}\vec{\boldsymbol{v}} \qquad (20.71)$$

20.6 – Dynamique relativiste d'une charge sphérique de rotation

Considérons maintenant une charge sphérique localisée de rotation, comme celle décrite à la figure 19.1, qui se déplace le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ à vitesse $\vec{v}$. Dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$ mobile avec la charge, on a évidemment, puisque la charge y est immobile, que $p_1' = p_2' = p_3' = 0$. Par conséquent, d'après *(20.43)*, on les relations

$$\begin{cases} m_1 = m_1' \\ m_2 = m_2'/\gamma_t \\ m_3 = m_3'/\gamma_t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} np_1 = 0 \\ np_2 = -\boldsymbol{v}m_3'/2c_t^2\gamma_t \\ np_3 = +\boldsymbol{v}m_2'/2c_t^2\gamma_t \end{cases} \qquad (20.72)$$

qui permettent de déduire, puisque $m_i = 4\left(K_2+K_3\right)\omega_i$, $np_i = nm\phi_i$ et $\left(K_2+K_3\right)/mn = c_t^2$

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_1' \\ \omega_2 = \omega_2'/\gamma_t \\ \omega_3 = \omega_3'/\gamma_t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = -2\boldsymbol{v}\omega_3'/\gamma_t \\ \phi_3 = +2\boldsymbol{v}\omega_2'/\gamma_t \end{cases} \qquad (20.73)$$

L'énergie relativiste totale d'une charge sphérique de rotation en mouvement

On déduit les densités d'énergie potentielle $F_{dist}^{Q_\lambda}$ et d'énergie cinétique $F_{cin}^{Q_\lambda}$ dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$F_{dist}^{Q_\lambda} = 2\left(K_2+K_3\right)\sum_i \omega_i^2 = 2\left(K_2+K_3\right)\left(\omega_1'^2 + \frac{1}{\gamma_t^2}\omega_2'^2 + \frac{1}{\gamma_t^2}\omega_3'^2\right) \qquad (20.74)$$

$$F_{cin}^{Q_\lambda} = \frac{1}{2}mn\left(\phi_2^2+\phi_3^2\right) = \frac{2mn\boldsymbol{v}^2}{\gamma_t^2}\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right) \qquad (20.75)$$

ainsi que la densité totale d'énergie $F_{tot}^{Q_\lambda} = F_{dist}^{Q_\lambda} + F_{cin}^{Q_\lambda}$ en utilisant $\left(K_2+K_3\right)/mn = c_t^2$

$$F_{tot}^{Q_\lambda} = F_{dist}^{Q_\lambda} + F_{cin}^{Q_\lambda} = 2\left(K_2+K_3\right)\left[\omega_1'^2 + \frac{1}{\gamma_t^2}\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right) + \frac{1}{\gamma_t^2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right)\right] \qquad (20.76)$$

L'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{Q_\lambda}$ de la charge de rotation en mouvement est donnée par l'intégration sur le

volume du solide infini dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} = \frac{2\left(K_2+K_3\right)}{\gamma_t^2}\iiint_V\left[\gamma_t^2\omega_1{}'^2+\left(\omega_2{}'^2+\omega_3{}'^2\right)+\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\left(\omega_2{}'^2+\omega_3{}'^2\right)\right]dx_1dx_2dx_3 \qquad (20.77)$$

Mais cette intégration peut aussi être faite de manière beaucoup plus simple dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$ puisque $dx_1=\gamma_t dx_1'$, $dx_2=dx_2'$ et $dx_3=dx_3'$

$$E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} = \frac{2\left(K_2+K_3\right)}{\gamma_t}\iiint_{V'}\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\right)\omega_1{}'^2+\left(\omega_2{}'^2+\omega_3{}'^2\right)+\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\left(\omega_2{}'^2+\omega_3{}'^2\right)\right]dx_1'dx_2'dx_3' \qquad (20.78)$$

Dans le référentiel $\boldsymbol{O}'x_1'x_2'x_3'$, il est clair que $\omega_1{}'^2=\omega_2{}'^2=\omega_3{}'^2=\vec{\omega}'^2/3$, de sorte que

$$E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} = \frac{1}{\gamma_t}\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{3c_t^2}\right)+\frac{2\boldsymbol{v}^2}{3c_t^2}\right]\left(2\left(K_2+K_3\right)\iiint_{V'}\vec{\omega}'^2\,dx_1'dx_2'dx_3'\right) \qquad (20.79)$$

La valeur de la deuxième parenthèse n'est rien d'autre que l'énergie de repos $E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}$ de la charge que nous avions obtenue par la relation *(19.71)*. Il vient donc

$$E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{3c_t^2}\right)E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}}_{E_{pot}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}}+\underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{2\boldsymbol{v}^2}{3c_t^2}E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}}_{E_{cin}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}} = \frac{1}{\gamma_t}\left(1+\frac{\boldsymbol{v}^2}{3c_t^2}\right)\underbrace{\frac{3\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{5\pi R}}_{E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}} \qquad (20.80)$$

De par le terme γ_t au dénominateur, on retrouve là un comportement de l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}$ de la charge similaire à celui d'un comportement relativiste puisque celle-ci tend vers une valeur infinie lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ tend vers la célérité des ondes transversales c_t comme le montre bien la figure 20.4 dans laquelle on a reporté $E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}/E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}$ en fonction de $\boldsymbol{v}/c_t$.

Comme dans le cas d'une dislocation vis ou coin, l'énergie totale se retrouve sous forme d'énergie potentielle élastique de rotation du réseau et sous forme d'énergie cinétique des mailles du réseau, et les fractions de chacune de ces énergies dépendent de la valeur du rapport $\boldsymbol{v}/c_t$ comme le montre la figure 20.5. On constate que ces fractions d'énergie sous forme potentielle et sous forme cinétique deviennent ici aussi parfaitement égales lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la charge localisée tend vers la célérité c_t des ondes transversales!

Cependant, l'expression *(20.80)* de l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}$ n'est cette fois pas en parfait accord avec un comportement relativiste classique, car $E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} \neq E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}/\gamma_t$. Ce désaccord est à associer au fait que le terme négatif additionnel dans l'énergie potentielle ne compense plus exactement le terme d'énergie cinétique (le terme d'énergie cinétique est deux fois supérieur à la valeur absolue du terme additionnel dans l'énergie potentielle). Si on calcule l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}$ pour les faibles vitesses ($\boldsymbol{v} << c_t$) en développant le terme γ_t au dénominateur, on obtient

$$E_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} \cong E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}\left(1+\boldsymbol{v}^2/2c_t^2+\ldots\right)\left(1+\boldsymbol{v}^2/3c_t^2\right) \cong E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}+5E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}\boldsymbol{v}^2/6c_t^2+\ldots \qquad (20.81)$$

En ce cas, l'énergie de la charge en mouvement est donc égale à son énergie de repos et à un deuxième terme d'énergie proportionnel à la vitesse de la charge au carré, et qui peut être assimilé à un terme *d'énergie cinétique de la charge*. On peut par conséquent attribuer une *masse d'inertie au repos* M_0 à la charge sphérique de rotation, donnée par

$$\frac{1}{2}M_0 \cong \frac{5}{6}\frac{E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}}{c_t^2} \quad\Rightarrow\quad M_0 \cong \frac{5}{3}\frac{E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda}}{c_t^2} \quad\Rightarrow\quad E_{dist}^{\boldsymbol{Q}_\lambda} \cong \frac{3}{5}M_0c_t^2 \qquad (20.82)$$

On constate que la relation entre énergie au repos et masse d'inertie pour une charge de rota-

tion $\boldsymbol{Q}_\lambda$ sphérique s'écarte quelque peu de la fameuse relation d'Einstein de la relativité restreinte, qui stipule que $E_0 = M_0 c^2$.

20.7 – De l'explication du paradoxe de l'énergie des électrons

On retrouve avec la relation *(20.82)* un paradoxe fameux de l'électromagnétisme classique. En effet, le même type de calcul effectué en électromagnétisme classique pour trouver l'énergie stockée par le champ électrique d'un électron en mouvement donne un résultat très similaire, à savoir que $E^{relativiste}_{électromagnétique} \neq E^{repos}_{champ\ électrique} / \gamma$, et donc que la masse associée aux champs électromagnétiques de l'électron *ne satisfait pas les principes de la relativité restreinte* ! Ce résultat célèbre en électromagnétisme a fait couler beaucoup d'encre et a été l'objet de nombreuses discussions. Plusieurs modèles ont été proposés pour l'expliquer, sans beaucoup de succès d'ailleurs. On peut considérer en fait qu'il n'a jamais été vraiment compris dans le cadre de la théorie classique de l'électromagnétisme et de la relativité restreinte ! Une discussion détaillée de ce sujet peut se trouver dans le fameux cours de physique de R. P. Feynman [2].

Ce fameux *paradoxe de l'énergie électrique de l'électron* pourrait trouver ici une explication simple, si on suppose que l'électron possède lui aussi une structure annulaire[3] similaire à une boucle de désinclinaison vis, ou à une boucle de pseudo-dislocation vis et que le champ électrique de l'électron est l'analogue du champ de rotation. En effet, l'expression *(20.67)* de l'énergie relativiste d'une boucle de désinclinaison vis satisfait parfaitement l'expression d'Einstein $E_{\boldsymbol{v}} \cong E_0 / \gamma_t$, de sorte que si l'électron présentait la structure topologique de boucle de désinclinaison vis dans un réseau cosmologique, on aurait une charge localisée $\boldsymbol{q}_\lambda$ de rotation qui présenterait à grande distance un champ de rotation $\vec{\omega}^{él}$ divergent tout comme l'électron présente un champ électrique $\vec{E}^{él}$ divergent, et qui satisferait à faible vitesse ($\boldsymbol{v} << c_t$) la relation de la relativité restreinte puisque pour une boucle de désinclinaison vis on a

$$E^{BV}_{dist} = M^{BV}_0 c_t^2 \qquad (20.83)$$

20.8 – Force de Peach & Koehler et force relativiste de Lorentz

A la section 11.2, nous avons déduit la *force de Peach et Koehler* $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \lambda \vec{m} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$ qui agit par l'intermédiaire du champ $\vec{m}$ sur l'unité de volume de charges de rotation présentant une densité λ de charges. Dans cette relation, le terme $\lambda \vec{m}$ est l'analogue de la force électrique $\vec{\boldsymbol{f}} = \rho \vec{E}$ agissant par unité de volume sur une densité de charge électrique ρ dans les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, alors que le terme $\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$ avait été introduit pour tenir compte des forces qui ne produisent aucun travail. Pour une densité λ de charges en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, la densité de force agissant dans le repère $\boldsymbol{O'}x_1' x_2' x_3'$ lié à la charge s'écrit donc, puisque la charge est immobile dans ce repère et que, par consé-

---

[2] *Richard P. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesly Publ. Company, 1970, chap. 28*

[3] *L'idée d'un électron de forme annulaire a été proposée initialement en 1915 par Parson (Smithsonian miscellaneous collections, nov. 1915) puis développée ensuite par Webster (Amer. Acad., janv. 1915) et Allen (Phil. Mag., 4, 1921, p. 113), et la proposition qu'un électron puisse être similaire à une boucle de désinclinaison vis a été proposée en 1996 par Unziker (arXiv:gr-qc/9612061v2).*

quent, $\vec{\boldsymbol{v}} = 0$ dans ce repère

$$\vec{\boldsymbol{f}}'_{PK} = \lambda \vec{m}' \tag{20.84}$$

On peut dès lors retrouver la force par unité de volume agissant sur la même densité de charge qui se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans le référentiel immobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, en utilisant *(20.38)*

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1' = \lambda m_1' = \lambda m_1 = f_1 \\ \boldsymbol{f}_2' = \lambda m_2' = \lambda\left(m_2 - 2\boldsymbol{v}_1 n p_3\right)/\gamma_t = \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_3' = \lambda m_3' = \lambda\left(m_3 + 2\boldsymbol{v}_1 n p_2\right)/\gamma_t = \boldsymbol{f}_3 \end{cases} \tag{20.85}$$

Il vient alors pour la force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \lambda m_1 \vec{e}_1 + \lambda \frac{1}{\gamma_t}\left(m_2 - 2\boldsymbol{v}_1 n p_3\right)\vec{e}_2 + \lambda \frac{1}{\gamma_t}\left(m_3 + 2\boldsymbol{v}_1 n p_2\right)\vec{e}_3 \tag{20.86}$$

qu'on transforme facilement, tout d'abord en utilisant le produit vectoriel $\vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}$

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \lambda m_1 \vec{e}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_t}\left(m_2 \vec{e}_2 + m_3 \vec{e}_3\right) + \frac{2\lambda}{\gamma_t}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right) \tag{20.87}$$

puis en utilisant le fait que $\vec{J}^{(\lambda)} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \lambda m_1 \vec{e}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_t}\left(m_2 \vec{e}_2 + m_3 \vec{e}_3\right) + \frac{1}{\gamma_t}\left(\vec{J} \wedge 2n\vec{p}\right) \tag{20.88}$$

Dans le cas où $\left|\vec{\boldsymbol{v}}\right| << c_t$, γ_t devient voisin de l'unité et la force par unité de volume dans le repère immobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ devient égale à

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{PK} = \lambda \vec{m} + \vec{J} \wedge 2n\vec{p} = 2\lambda\left(\frac{\vec{m}}{2} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right) \tag{20.89}$$

qui est l'analogue parfait de la *force électromagnétique de Lorentz*

$$\vec{\boldsymbol{f}}_L = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \rho\left(\vec{E} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{B}\right) \tag{20.90}$$

Le terme $2\lambda\left(\vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right)$ dans la force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ n'est rien d'autre que le terme $\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$ que nous avions introduit dans la relation *(11.10)* pour tenir compte des forces qui ne travaillent pas, de sorte que le vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ a maintenant une valeur connue, qui vaut

$$\vec{\boldsymbol{A}} = 2\lambda n\vec{p} \tag{20.91}$$

On peut alors appliquer la relation *(20.84)* aux diverses singularités topologiques:

- *dans le cas d'une dislocation vis rectiligne*, l'intégration de *(20.69)* sur l'unité de longueur de la dislocation donne la force suivante agissant sur l'unité de longueur de dislocation

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = 2\Lambda\left(\frac{\vec{m}}{2} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right) \tag{20.92}$$

Cependant, si une dislocation vis rectiligne se déplace dans un solide, sa vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ est forcément perpendiculaire à la ligne de dislocation, et la force $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ n'aura d'action que si elle est elle aussi perpendiculaire à la corde, de sorte que seule la composante de $n\vec{p}$ dirigée dans la direction de la corde peut donner une force $\vec{\boldsymbol{F}}_{PK}$ capable d'agir sur la dislocation!

- *dans le cas d'une charge sphérique de rotation de charge* $\boldsymbol{Q}_\lambda$, la relation *(20.89)* peut s'intégrer sur le volume de la charge, et on obtient la force totale agissant sur la charge de rotation

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = 2\boldsymbol{Q}_\lambda\left(\frac{\vec{m}}{2} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right) \tag{20.93}$$

Cette relation correspond directement à l'expression de la force électromagnétique agissant sur une charge électrique q , à savoir $\vec{\boldsymbol{F}} = q\left(\vec{E} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{B}\right)$.

- *dans le cas d'une boucle de désinclinaison vis de charge* $\boldsymbol{q}_{\lambda BV} = 2\pi R\Lambda_{BV} = -\pi R\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\vec{\boldsymbol{t}}$, on peut appliquer la relation *(20.92)* ou la relation *(20.93)* à la boucle, ce qui permet d'écrire

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{PK} = 2\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\left(\frac{\vec{m}}{2} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge n\vec{p}\right) \qquad (20.94)$$

Chapitre 21

Rôle d'«éther» joué par le réseau cosmologique pour un amas mobile de singularités

Dans un réseau cosmologique parfait satisfaisant $\tau_0 < \tau_{0cr}$, nous avons montré que toutes les singularités topologiques microscopiques comme les dislocations et les boucles de dislocation et de désinclinaison satisfont la transformation de Lorentz. Par conséquent, un amas localisé de singularités topologiques interagissant entre elles via leurs champs de rotation est aussi soumis globalement à la transformation de Lorentz lorsque celui-ci de déplace à une certaine vitesse par rapport au réseau.

Sur cette base, on discute alors des analogies existant entre notre théorie du réseau cosmologique parfait et la Relativité Restreinte. On y discute entre autre le rôle d'*«éther»* que joue le réseau vis-à-vis des amas de singularités en mouvement interagissant via leurs champs de rotation. On montre que cette notion d'*«éther»* fournit un éclairage nouveau et original sur la théorie de la Relativité Restreinte, ainsi qu'une solution très élégante au fameux paradoxe des jumeaux de la Relativité Restreinte.

21.1 – Transformation de Lorentz appliquée à un amas de singularités topologiques mobiles interagissant via leurs champs de rotation

La transformation de Lorentz vers le repère mobile d'un amas de singularités

Au chapitre 20, on a vu que le déplacement d'une singularité topologique dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ d'un réseau cosmologique parfait, à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction de l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, peut être décrit dans un repère $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ mobile avec la singularité grâce à la transformation de Lorentz. A expansion volumique constante, un amas de singularités mobile au sein du réseau, formé par exemple par un ensemble de singularités localisées comme des boucles de dislocation et de désinclinaison interagissant entre elles via leurs champs de rotation, est soumis à la même *transformation de Lorentz (20.24), avec toutes les propriétés qui lui sont attribuées comme la dilatation du temps et la contraction des longueurs,* puisque le champ de rotation qui fournit les interactions entre les singularités satisfait cette transformation.

De l'analogie mathématique forte des transformations de Lorentz appliquées au réseau cosmologique et à la Relativité Restreinte

Il existe évidemment une analogie mathématique forte entre la transformation de Lorentz appliquée ici pour la transmission des informations et des interactions via les ondes transversales au sein du réseau cosmologique et la transformation de Lorentz de la Relativité Restreinte applie-

quée pour décrire la dynamique relativiste des objets mobiles dans l'Univers en relation avec la vitesse de la lumière. Mais il existe aussi une très sérieuse différence physique entre ces deux théories, liée surtout à l'existence d'un *«éther»* pour les singularités topologiques, qui est en fait le réseau et qui donne un statut privilégié aux singularités fixes dans le réseau comparativement aux singularités mobiles par rapport au réseau, alors qu'en théorie de la Relativité Restreinte, tous les objets mobiles ont le même statut, d'où le fameux nom de *«relativité»*. Cette différence essentielle permet d'apporter un éclairage tout-à-fait nouveau et original sur les phénomènes de relativité. C'est ce qu'on va discuter dans la suite.

Des différences physiques essentielles d'avec la Relativité Restreinte: rôle d'éther joué par le réseau et existence d'un référentiel absolu

La dynamique des singularités au sein d'un réseau cosmologique se différencie de la Relativité Restreinte par l'existence même du réseau qui fait office de *référentiel absolu* pour le mouvement des singularités et d'*éther* pour la propagation des ondes transversales et longitudinales.
Au contraire de la Relativité Restreinte, le réseau peut être décrit de l'extérieur par un observateur ***GO*** *(**G**rand **O**bservateur imaginaire)* qui possède une horloge universelle et des règles universelles dans le référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$. Cet observateur extérieur au réseau n'est soumis à aucune contrainte de vitesse de propagation de l'information, de sorte qu'il est seul à pouvoir observer qualitativement et déterminer quantitativement et exactement la notion *d'instantanéité d'événements* intervenant au sein du réseau.

L'observateur local HS (Homo Sapiens)

On peut aussi imaginer un type d'observateurs complètement différent. Ce sont les observateurs locaux ***HS*** *(**H**omo **S**apiens)*, qui font *partie intégrante du réseau* et qui seraient constitués eux-mêmes de singularités topologiques du réseau. Ces observateurs particuliers ont alors un statut très différent de l'observateur ***GO*** puisqu'ils font *partie intégrante du réseau* et qu'ils peuvent s'y mouvoir. Mais ces observateurs sont astreints à une transmission de l'information d'un point à l'autre du réseau à la vitesse finie des ondes transversales ou des ondes longitudinales. Un observateur ***HS*** n'a donc pas d'accès à une définition absolue de la simultanéité d'événements telle que celle du ***GO***, mais ne possède qu'une définition relativiste de la simultanéité, qui dépend notamment de sa vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ de déplacement par rapport au réseau et de la valeur locale de l'expansion volumique du réseau.
Pour des raisons de commodité, l'observateur extérieur ***GO*** peut évidemment se choisir comme règles universelles et horloge universelle les règles et l'horloge d'un observateur ***HS*** immobile par rapport au réseau, et qui se situerait en un endroit du réseau qui serait immobile et d'expansion volumique nulle ($\tau = 0$).
Tout observateur ***HS*** est muni d'un repère local qui possède des règles et une horloge propre, qui paraissent d'ailleurs immuables pour ce ***HS***, alors que la longueur de ses règles et la vitesse de comptage du temps de son horloge varient en réalité dans le référentiel absolu du ***GO*** en fonction de l'expansion volumique du réseau à l'endroit où il se trouve (on reviendra plus tard sur ce point en détail), et de sa vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau. Par conséquent, le ***HS*** n'a pas d'accès direct à la valeur de l'expansion volumique locale du réseau ou à sa propre vitesse

de déplacement $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau. Seul le ***GO*** a un accès direct à ce type d'informations!

Les transformations de Lorentz que nous avons définies sont donc en réalité des outils du ***GO***, qui peut s'en servir sans problème pour déterminer les règles et les horloges locales de tous les ***HS*** attachés au réseau, ou simplement pour calculer les divers champs associés à des singularités topologiques en mouvement au sein du réseau. Et il peut appliquer ces transformations à tout endroit du réseau où il est possible de trouver un état d'expansion homogène et constant, qui peut très bien être différent de l'expansion nulle puisque les transformations de Lorentz se basent sur la vitesse de transmission des ondes transversales, qui est parfaitement déterminée quelle que soit l'état d'expansion du réseau ($c_t(\tau) = c_{t0}\,\mathrm{e}^{\tau/2}$). De ce point de vue, notre interprétation des transformations de Lorentz est assez éloignée de l'interprétation de la Relativité Restreinte, pour laquelle ces transformations sont des outils que peut utiliser tout observateur ***HS*** pour passer d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen en mouvement par rapport au premier, et pour lequel la vitesse de la lumière est une constante absolue!

Les principales conséquences de ces différences essentielles vont être analysées en détail dans les prochaines sections.

21.2 – Contraction des règles, dilatation du temps et existence de l'«éther»

De la contraction réelle de l'architecture d'un amas de singularités en mouvement

Les transformations de Lorentz *(21.1)* impliquent de fait que, pour des singularités mobiles à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, la règle selon la direction $\boldsymbol{O}x_1$ se raccourcit d'un facteur γ_t. En effet, considérons un vecteur $\vec{d} = x_1\vec{e}_1$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ à l'instant $t = 0$ dans un repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ immobile par rapport au réseau. Ce vecteur $\vec{d}$ peut aussi être décrit dans le repère mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ en écrivant

$$\vec{d} = x_1\vec{e}_1 = x_1'\vec{e}_1' \qquad (21.1)$$

En utilisant les lois de la transformation de Lorentz directe *(20.27),* prises à l'instant $t = 0$, on obtient

$$\vec{d} = x_1\vec{e}_1 = x_1'\vec{e}_1' = \frac{x_1}{\gamma_t}\vec{e}_1' \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\gamma_t}\vec{e}_1' \qquad (21.2)$$

On peut aussi utiliser les lois de la transformation de Lorentz inverse *(21.1),* prises à l'instant $t = 0$, et on obtient évidemment le même résultat

$$\left.\begin{aligned} \vec{d} = x_1\vec{e}_1 = \frac{x_1' + \boldsymbol{v}t'}{\gamma_t}\vec{e}_1 = x_1'\vec{e}_1' \quad &\Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \frac{\gamma_t x_1'}{x_1' + \boldsymbol{v}t'}\vec{e}_1' \\ t = 0 = \frac{t' + \boldsymbol{v}x_1'/c_t^2}{\gamma_t} \quad &\Rightarrow \quad t' = -\boldsymbol{v}x_1'/c_t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\gamma_t}\vec{e}_1' \qquad (21.3)$$

Ces calculs montrent donc que, pour le ***GO***, la règle $\vec{e}_1'$ dans le repère mobile $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ s'est effectivement raccourcie d'un facteur γ_t par rapport à la règle $\vec{e}_1$ dans le repère immobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ dans lequel se déplace les singularités à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{e}_1' = \gamma_t \vec{e}_1 \qquad (21.4)$$

Pour interpréter ce raccourcissement de règle dans la direction du mouvement, il faut imaginer *l'architecture de l'amas comme un ensemble de singularités topologiques* liées entre elles par leurs interactions via leurs champs de rotation respectifs (figure 21.1). Ces singularités du réseau se déplacent par rapport au réseau à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, et la finitude de la vitesse c_t de leurs interactions via le champ de rotation impose que l'architecture complète de l'amas de singularité se contracte dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$. Mais cette contraction n'affecte en rien le réseau, qui conserve son état d'expansion volumique originel, ce qui est représenté dans la figure 21.1 pour le cas de deux amas de singularités identiques qui se meuvent à deux vitesses différentes, $\vec{\boldsymbol{v}}'$ et $\vec{\boldsymbol{v}}''$, mesurées par rapport au réseau par l'observateur ***GO***.

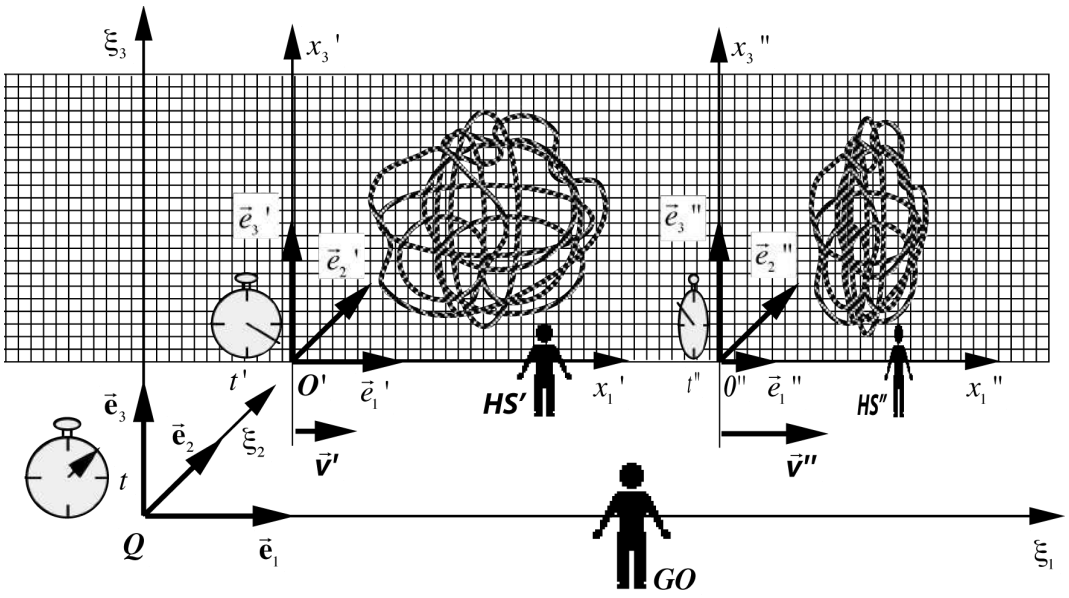


Figure 21.1 *- les repères de Lorentz mobiles des observateurs **HS'** et **HS' '** en mouvement*

Ainsi, les effets relativistes sur les règles des observateurs ***HS***, associés au mouvement collectif des singularités par rapport au réseau, n'ont rien à faire avec des effets d'expansion volumique du réseau, pour lesquels les modifications des longueurs des règles des observateurs ***HS*** seront associées à des variations réelles du paramètre de maille du réseau cosmologique comme nous le verrons par la suite! A noter aussi que ces deux effets sont cumulatifs, à savoir que les règles d'un observateur ***HS*** peuvent être contractées ou expansées par des variations d'expansion volumique et encore contractées par un mouvement de l'amas de singularités par rapport au réseau! De la sorte, la contraction-expansion des règles et de l'horloge d'un observateur ***HS*** dépend à la fois de l'expansion locale du réseau et de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ de ***HS*** par rapport au réseau. De plus, dans la transformation de Lorentz appliquée par l'observateur ***GO***, la valeur de $\gamma_t = (1 - \boldsymbol{v}^2 / c_t^2)^{1/2}$ n'est pas seulement liée à la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ de ***HS*** par rapport au réseau, mais aussi à la célérité locale c_t des ondes transversales, qui dépend de l'expansion volumique τ du réseau cosmologique, puisque

$$c_t\big|_{\tau \neq 0} = c_{t0}\big|_{\tau = 0} \, \mathrm{e}^{\tau/2} \qquad (21.5)$$

De la dilatation réelle du temps d'un observateur HS en mouvement au sein du réseau

Le phénomène de ralentissement de l'horloge de l'observateur ***HS*** qui se déplace par rapport au réseau a déjà été expliqué dans le chapitre 20, avec les figures 20.2 et 20.3. Imaginons qu'il existe un observateur ***HS*** qui construit ses propres horloges dans son référentiel $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$, en fixant deux miroirs face à face à une distance d_0 l'une de l'autre, miroirs qui ont la propriété de réfléchir les ondes transversales. En envoyant une onde transversale entre les deux miroirs, ***HS*** peut parfaitement utiliser, comme base de temps, le laps de temps $T_0 = 2d_0 / c_t$ qui s'écoule entre un aller-retour de l'onde entre les deux miroirs, parce que la distance d_0 et la vitesse c_t des ondes transversales sont pour lui des constantes. Si l'observateur ***HS*** est initialement au repos par rapport au réseau, le ***GO*** peut considérer le laps de temps $T_0 = 2d_0 / c_t$ comme sa propre base de temps dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$.

Imaginins maintenant que l'observateur ***HS*** se déplace par rapport au réseau avec la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$, et qu'il place deux horloges en quadrature, c'est-à-dire une horloge ayant ses deux miroirs dans la direction $\boldsymbol{O}x_1'$ et une seconde horloge ayant ses deux miroirs le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_3'$ (ou $\boldsymbol{O}x_2'$). En principe, dans son référentiel $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$, le laps de temps $T_0 = 2d_0 / c_t$ mesuré par ***HS*** avec ses deux horloges est exactement le même.

Prenons maintenant le point de vue du ***GO***. Dans la section 20.1, nous avons montré que le temps de base de l'horloge mobile de l'observateur ***HS*** dans $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, mesuré par l'observateur ***GO*** dans son référentiel absolu $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, paraît dilaté en fonction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ d'un facteur $1/\gamma_t$, de manière identique pour les deux horloges en quadrature.

$$T = \frac{2d_0 / c_t}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2 / c_t^2}} = \frac{T_0}{\gamma_t} \qquad (21.8)$$

Ceci signifie qu'un temps local t' existe réellement pour l'observateur ***HS***, que ce temps local s'écoule plus lentement pour un observateur ***HS*** en mouvement par rapport au réseau, et que ce temps local t' reste isotrope dans $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$, indépendamment de la direction du mouvement de l'observateur ***HS*** au sein du réseau.

Concernant la dilatation ou la contraction du temps, il peut aussi y avoir couplage entre les effets relativistes et les effets d'expansion volumique. Nous verrons par exemple plus tard que, dans le cas d'un réseau cosmologique, un observateur ***HS'*** qui serait placé dans une zone de forte contraction volumique ($\tau << 0$) présenterait un temps propre très fortement ralenti par rapport au temps propre du ***GO***. De plus, s'il se déplaçait encore à une vitesse $\boldsymbol{v}$ proche de c_t par rapport au réseau, son temps propre serait aussi très fortement ralenti par rapport au temps propre du ***GO***, non seulement par l'effet direct de la contraction volumique sur le ralentissement de son horloge, mais aussi par l'effet de l'expansion sur la valeur de γ_t puisque

$$\gamma_t = \left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_t^2}\right)^{1/2} = \left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_{t0}^2}\mathrm{e}^{-\tau}\right)^{1/2} < \left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c_{t0}^2}\right)^{1/2} \quad si \quad \tau < 0 \qquad (21.9)$$

21.3 – L'expérience de Michelson-Morley et l'effet Doppler-Fizeau dans le réseau cosmologique

Il est clair que le réseau joue vis-à-vis des singularités et de la propagation des ondes transver-

sales le même rôle que le fameux *«éther»* censé propagé les ondes lumineuses et tant discuté au début du XXème siècle. L'expérience de Michelson-Morley, qui consistait à essayer de mesurer à l'aide d'un interféromètre une différence de vitesse de propagation des ondes lumineuses dans la direction d'un déplacement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ et transversalement à la direction de ce déplacement, a donné des résultats négatifs, et on en a conclu à l'époque à l'inexistence d'un éther. Mais dans les deux exemples ci-dessus, le calcul proposé dans le réseau solide avec deux horloges locales en quadrature montre que le résultat est identique à celui obtenu par Michelson-Morley, à savoir qu'il n'y a aucune différence de temps de parcours dans les deux directions perpendiculaires, ce que le ***HS*** interprète évidemment comme le fait que la vitesse de propagation ne dépend pas de la direction dans laquelle on la mesure. Mais dans le cas que nous avons traité ici, il existe bel et bien un éther constitué par le réseau au sein duquel les singularités se déplacent, et qui est parfaitement connu du ***GO***!

On en déduit que, dans le cas du réseau solide faisant office d'éther, les singularités qui se déplacent à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ ont effectivement leur horloge propre qui ralentit puisque le ***GO*** mesure un temps d'horloge T_0 avec l'horloge du ***HS*** immobile par rapport au réseau, mais un temps $T = T_0 / \gamma_t$ avec l'horloge d'un ***HS*** qui se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau.

D'autre part, il est clair que si le ***HS*** mesure la vitesse c_t' d'une onde transversale dans son référentiel en mouvement $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$, avec ses propres règles et horloge, il trouve exactement la même valeur que celle mesurée par le ***GO*** dans le réseau, puisque

$$c_t' = \frac{2d_0}{T_0} = \frac{2d/\gamma_t}{T/\gamma_t} = \frac{2d}{T} = c_t \qquad \textit{dans la direction } \boldsymbol{O}x_1' \tag{21.10}$$

Le point de vue d'un observateur HS en mouvement par rapport au réseau

Pour illustrer le point de vue des observateurs ***HS***, et notamment le fait que ces observateurs liés au réseau n'ont pas accès à la notion absolue de simultanéité du ***GO***, on peut imaginer deux expériences très simples.

Dans une première expérience, considérons deux événements simultanés observés par ***GO*** dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ à l'instant $t = 0$ aux coordonnées $x_1^{(1)} = 0$ et $x_1^{(2)} = \Delta x_1$, donc distants de Δx_1. Ces deux événements simultanés sont alors observés par un ***HS*** dans son repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ aux coordonnées d'espace-temps suivantes, obtenues à l'aide des relations *(21.1)*

$$\begin{cases} x_1^{(1)\prime} = 0 & \text{et} \quad t_1' = 0 \\ x_1^{(2)\prime} = \dfrac{x_1^{(2)}}{\gamma_t} = \dfrac{\Delta x_1}{\gamma_t} & \text{et} \quad t_2' = -\dfrac{\boldsymbol{v}x_1^{(2)}}{c_t^2\gamma_t} = -\dfrac{\boldsymbol{v}\Delta x_1}{c_t^2\gamma_t} \end{cases} \tag{21.11}$$

On constate que les deux événements ne sont pas observés comme simultanés par le ***HS***, mais séparés par un intervalle de temps non nul $\Delta t' = t_2'$, et la distance mesurée par le ***HS*** entre les deux événements est égale à $\Delta x_1' = x_1^{(2)\prime} = \Delta x_1 / \gamma_t$ qui est supérieure à la distance Δx_1 mesurée par le ***GO***, et qui est la conséquence de la contraction de la règle $\vec{e}_1'$ de ***HS*** dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$.

Dans une deuxième expérience, considérons un événement intervenant à l'origine du référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ de ***GO*** et qui se prolonge de $t_1 = 0$ à $t_2 = \Delta t$, donc sur un laps de temps absolu

de Δt. Cet événement est alors observé par un ***HS*** dans son repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ aux coordonnées d'espace-temps suivantes, obtenues à l'aide des relations *(20.27)*

$$\begin{cases} x_1^{(1)\prime} = 0 & \text{et} \quad t_1' = 0 \\ x_1^{(2)\prime} = -\dfrac{\boldsymbol{v}t_2}{\gamma_t} = -\dfrac{\boldsymbol{v}\Delta t}{\gamma_t} & \text{et} \quad t_2' = \dfrac{t_2}{\gamma_t} = \dfrac{\Delta t}{\gamma_t} \end{cases} \qquad (21.12)$$

On constate que l'événement semble se déplacer dans le repère de ***HS*** sur une distance $\Delta x_1' = \left|x_1^{(2)\prime}\right| = \boldsymbol{v}\Delta t / \gamma_t$, plus longue que le parcours absolu $\boldsymbol{v}\Delta t$ du repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ dans le réseau, à cause de la contraction de la règle $\vec{e}_1'$ utilisé par ***HS***, et que le laps de temps que dure l'événement pour ***HS*** vaut $\Delta t' = t_2' = \Delta t / \gamma_t$, et paraît donc plus long pour ***HS*** que pour ***GO***, ce qui est de prime abord assez étrange puisque l'horloge de ***HS*** tourne plus lentement que celle de ***GO***! Ce phénomène est dû aux temps de vol qu'ont mis les ondes transversales pour atteindre le ***HS*** en mouvement par rapport au réseau. Cette dernière expérience montre bien que les intervalles de temps mesurés par les ***HS*** sont des intervalles relatifs puisqu'ils dépendent de la vitesse de propagation finie de l'information au sein du réseau.

Les relations entre deux observateurs HS en mouvement par rapport au réseau

Dans la figure 21.1, on a représenté deux repères en translation selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ aux vitesses $\vec{\boldsymbol{v}}'$ et $\vec{\boldsymbol{v}}''$ mesurées par l'observateur ***GO***. On peut se demander comment se traduit la relativité des vitesses mesurées par les ***PO***, et notamment quelle est la vitesse relative $\vec{\boldsymbol{v}}_r$ que mesure l'observateur ***HS'*** dans son repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ pour le déplacement du repère $\boldsymbol{O}''x''_1x''_2x''_3$ de l'observateur ***HS''***. Pour ***GO***, le point $\boldsymbol{O}''$ du repère de ***HS''*** se déplace dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ de $x_1^{(1)}$ à $x_1^{(2)}$ dans un laps de temps qui va de t_1 à t_2, de sorte que

$$\boldsymbol{v}'' = \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{t_2 - t_1} \qquad (21.13)$$

Si ***HS'*** observe ce même déplacement, il trouve une vitesse relative $\vec{\boldsymbol{v}}_r$ donnée grâce aux transformations *(20.22)* comme

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{x_1^{(2)\prime} - x_1^{(1)\prime}}{t_2' - t_1'} = \frac{\dfrac{x_1^{(2)} - \boldsymbol{v}'t_2}{\gamma_t'} - \dfrac{x_1^{(1)} - \boldsymbol{v}'t_1}{\gamma_t'}}{\dfrac{t_2 - \boldsymbol{v}'x_1^{(2)}/c_t^2}{\gamma_t'} - \dfrac{t_1 - \boldsymbol{v}'x_1^{(1)}/c_t^2}{\gamma_t'}} \qquad (21.14)$$

Quelques transformations permettent alors d'écrire cette relation sous la forme

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\dfrac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{t_2 - t_1} - \boldsymbol{v}'}{1 - \left(\dfrac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{t_2 - t_1}\right)\dfrac{\boldsymbol{v}'}{c_t^2}} = \frac{\boldsymbol{v}'' - \boldsymbol{v}'}{1 - \boldsymbol{v}''\boldsymbol{v}'/c_t^2} \qquad (21.15)$$

La vitesse relative du repère $\boldsymbol{O}''x''_1x''_2x''_3$ mesurée par ***HS'*** correspond à la composition relativiste classique des vitesses. Par symétrie, la vitesse relative du repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ mesurée par ***HS''*** sera donnée par la même expression changée de signe.

Considérons maintenant deux événements simultanés dans le repère mobile $\boldsymbol{O}"x"_1x"_2x"_3$, aux coordonnées $x_1^{(1)}"=0$ et $x_1^{(2)}"=\Delta x_1"$ survenant à l'instant $t"=0$. Dans le référentiel immobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, les coordonnées de ces deux événements deviennent deux événements distincts dans le temps

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=0 & \text{et} \quad t_1=0 \\ x_1^{(2)}=\dfrac{x_1^{(2)}"}{\gamma_t"}=\dfrac{\Delta x_1"}{\gamma_t"} & \text{et} \quad t_2=\dfrac{\boldsymbol{V''}x_1^{(2)}"}{c_t^2\gamma_t"}=\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta x_1"}{c_t^2\gamma_t"} \end{cases} \tag{21.16}$$

Dans le repère $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ de ***HS'***, les coordonnées de ces deux événements s'écrivent alors

$$\begin{cases} x_1^{(1)}'=0 & \text{et} \quad t_1'=0 \\ x_1^{(2)}'=\left(\dfrac{\Delta x_1"}{\gamma_t"}-\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta x_1"}{c_t^2\gamma_t"}\boldsymbol{V'}\right)/\gamma_t' & \text{et} \quad t_2'=\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta x_1"}{c_t^2\gamma_t"}-\dfrac{\boldsymbol{V'}}{c_t^2}\dfrac{\Delta x_1"}{\gamma_t"} \end{cases} \tag{21.17}$$

qu'on peut expliciter sous la forme d'une distance spatiale $\Delta x_1'=x_1^{(2)}'$ et d'un intervalle de temps $\Delta t'=t_2'$ entre les deux événements

$$\Delta x_1'=\left(1-\frac{\boldsymbol{V'V''}}{c_t^2}\right)\frac{\Delta x_1"}{\gamma_t'\gamma_t"} \quad et \quad \Delta t'=\left(\boldsymbol{V''}-\boldsymbol{V'}\right)\frac{\Delta x_1"}{c_t^2\gamma_t"\gamma_t'} \tag{21.18}$$

Les deux événements originels simultanés distants de $\Delta x_1"$ dans le repère $\boldsymbol{O}"x"_1x"_2x"_3$ de ***HS''*** deviennent donc deux événements non simultanés dans le repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ de ***HS'***.

Considérons maintenant deux événements successifs dans le repère mobile $\boldsymbol{O}"x"_1x"_2x"_3$, intervenant au même endroit à la coordonnée $x_1^{(1)}"=0$ et survenant aux instants $t_1"=0$ et $t_2"=\Delta t"$. Dans le référentiel immobile $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, les coordonnées de ces deux événements deviennent deux événements distincts dans l'espace

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=0 & \text{et} \quad t_1=0 \\ x_1^{(2)}=\dfrac{\boldsymbol{V''}t_2"}{\gamma_t"}=\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta t"}{\gamma_t"} & \text{et} \quad t_2=\dfrac{t_2"}{\gamma_t"}=\dfrac{\Delta t"}{\gamma_t"} \end{cases} \tag{21.19}$$

Dans le repère $\boldsymbol{O'}x_1'x_2'x_3'$ de ***HS'***, les coordonnées de ces deux événements s'écrivent alors

$$\begin{cases} x_1^{(1)}'=0 & \text{et} \quad t_1'=0 \\ x_1^{(2)}'=\left(\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta t"}{\gamma_t"}-\dfrac{\boldsymbol{V'}\Delta t"}{\gamma_t"}\right)/\gamma_t' & \text{et} \quad t_2'=\left(\dfrac{\Delta t"}{\gamma_t"}-\dfrac{\boldsymbol{V'}}{c_t^2}\dfrac{\boldsymbol{V''}\Delta t"}{\gamma_t"}\right)/\gamma_t' \end{cases} \tag{21.20}$$

qu'on peut expliciter sous la forme d'une distance spatiale $\Delta x_1'=x_1^{(2)}'$ et d'un intervalle de temps $\Delta t'=t_2'$ entre les deux événements

$$\Delta x_1'=\left(\boldsymbol{V''}-\boldsymbol{V'}\right)\frac{\Delta t"}{\gamma_t'\gamma_t"} \quad \text{et} \quad \Delta t'=\left(1-\frac{\boldsymbol{V'V''}}{c_t^2}\right)\frac{\Delta t"}{\gamma_t'\gamma_t"} \tag{21.21}$$

Les deux événements survenant à l'origine du repère $\boldsymbol{O}"x"_1x"_2x"_3$ de ***HS''*** deviennent donc deux événements séparés dans l'espace du repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ de ***HS'***.

L'effet Doppler-Fizeau entre singularités en mouvement

Dans la figure 21.2, on a reporté plusieurs expériences d'échanges de signaux à fréquence donnée entre singularités en mouvement au sein du réseau via les ondes transversales. En prenant le point de vue du ***GO***, il est possible de décrire facilement ces expériences qui font apparaître le phénomène de Doppler-Fizeau. On suppose évidemment que toutes ces expériences ont lieu dans un réseau possédant une valeur d'expansion volumique homogène et constante, sans quoi la description de ces expériences deviendrait beaucoup plus complexe.

1ère expérience: un observateur ***HS'*** dans le repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}'$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau émet une onde à la fréquence f_e', mesurée avec sa propre horloge, vers un observateur ***HS*** dans un référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ immobile par rapport au réseau (figure 21.2a). L'onde transversale émise dans $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ s'écrit

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \sin\left(\omega' t' - k' x_1'\right) \qquad (21.22)$$

avec $f_e' = \omega'/2\pi$ et $k' = \omega'/c_t$.

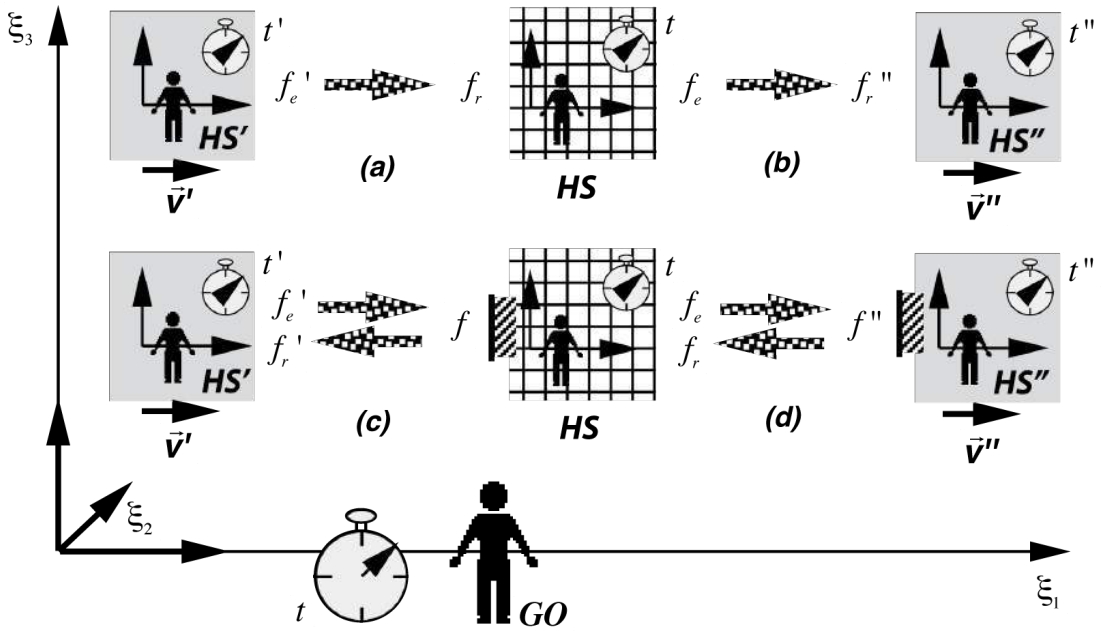


Figure 21.2 *- différentes configurations de mesure de l'effet Doppler-Fizeau*

Dans le référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, la même onde s'obtient en remplaçant les coordonnées t' et x_1' de ***HS'*** par les coordonnées t et x_1 de ***HS***, en utilisant les transformations de Lorentz

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_0 \sin\left(\omega' \frac{t - \boldsymbol{v}' x_1/c_t^2}{\gamma_t'} - k' \frac{x_1 - \boldsymbol{v}' t}{\gamma_t'}\right) \\ &= \vec{\omega}_0 \sin\left[\left(\frac{\omega'}{\gamma_t'} + \frac{k'\boldsymbol{v}'}{\gamma_t'}\right)t - \left(\frac{k'}{\gamma_t'} + \frac{\omega'\boldsymbol{v}'}{c_t^2\gamma_t'}\right)x_1\right] = \vec{\omega}_0 \sin\left(\omega t - k x_1\right)\end{aligned} \qquad (21.23)$$

On trouve par conséquent les relations donnant ω et k à partir des valeurs de ω' et k' dans

le repère $\boldsymbol{O}'x'_1 x'_2 x'_3$

$$\begin{cases} \omega = (\omega' + k'\boldsymbol{v'})/\gamma_t' \\ k = \left(k' + \omega'\boldsymbol{v'}/c_t^2\right)/\gamma_t' \end{cases} \qquad (21.24)$$

Comme $k' = \omega'/c_t$ et $f_e' = \omega'/2\pi$, on déduit la relation existant entre la fréquence f_e' du signal émis par ***HS'*** et la fréquence f_r mesurée par ***HS*** sur le signal reçu avec sa propre horloge

$$f_r = \frac{1+\boldsymbol{v'}/c_t}{\gamma_t'} f_e' = f_e' \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v'}/c_t}{1-\boldsymbol{v'}/c_t}} \qquad (21.25)$$

Pour $\boldsymbol{v'} > 0$, c'est-à-dire lorsque ***HS'*** se rapproche de ***HS***, la fréquence f_r du signal reçu par ***HS*** est plus élevée que la fréquence f_e' du signal émis par ***HS'***. C'est l'*effet Doppler-Fizeau*, et dans le jargon usuel des physiciens, on parle d'un *«shift du signal vers le bleu»*. Dans le cas contraire, si ***HS'*** s'éloigne de ***HS*** ($\boldsymbol{v'} < 0$), le signal reçu est de fréquence f_r inférieure à la fréquence f_e' du signal émis, et on parle de *«shift du signal vers le rouge»*.
Il est intéressant de réécrire la relation *(21.25)* sous la forme suivante

$$f_r = f_e' \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v'}/c_t}{1-\boldsymbol{v'}/c_t}} = \frac{1}{1-\boldsymbol{v'}/c_t} \gamma_t' f_e' \qquad (21.26)$$

car, sous cette forme, la relation fait apparaître le terme $(1-\boldsymbol{v'}/c_t)^{-1}$ de l'effet Doppler purement classique, mais qui s'applique à une fréquence émise $\gamma_t' f_e'$, qui n'est rien d'autre que la fréquence du signal émise par ***HS'***, mais mesurée par ***HS*** avec sa propre horloge, ou par ***GO*** avec l'horloge universelle.

2ème expérience: un observateur ***HS*** dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ au repos par rapport au réseau transmet un signal de fréquence f_e, mesurée avec sa propre horloge, vers un observateur ***HS''*** qui se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau (figure 21.2b). Avec le même type de calcul que dans le cas de la 1ère expérience, il est facile de vérifier que la fréquence f_r'' du signal reçu par ***HS''*** et mesurée par lui avec sa propre horloge vaut

$$f_r'' = f_e \sqrt{\frac{1-\boldsymbol{v''}/c_t}{1+\boldsymbol{v''}/c_t}} = \left(1-\boldsymbol{v''}/c_t\right)\frac{f_e}{\gamma_t''} \qquad (21.27)$$

Pour $\boldsymbol{v''} > 0$, c'est-à-dire lorsque ***HS''*** s'éloigne de ***HS***, la fréquence f_r'' du signal reçu par ***HS''*** est plus basse que la fréquence f_e du signal émis par ***HS***. C'est à nouveau l'*effet Doppler-Fizeau*. Sous la deuxième forme présentée dans *(21.27)*, l'expression de f_r'' fait apparaître le terme $(1-\boldsymbol{v''}/c_t)$ de l'effet Doppler classique, mais qui s'applique à une fréquence f_e/γ_t'', qui n'est rien d'autre que la fréquence du signal émis par ***HS***, mais telle que mesurée avec l'horloge de ***HS''***.

3ème expérience: un observateur ***HS'*** dans le repère $\boldsymbol{O}'x'_1 x'_2 x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}'$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau émet une onde à la fréquence f_e', mesurée avec sa propre horloge, vers un observateur ***HS''*** qui se déplace à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau (figure 21.4a-b). La fréquence f_r'' du signal reçu par ***HS''*** et mesurée par lui avec sa propre horloge s'obtient aisément en combinant les relations *(21.25)* et

(21.27). Il vient

$$f_r'' = f_e' \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}} \sqrt{\frac{1-\boldsymbol{v}''/c_t}{1+\boldsymbol{v}''/c_t}} = \left(\frac{1-\boldsymbol{v}''/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}\right) \frac{\gamma_t'}{\gamma_t''} f_e' \qquad (21.28)$$

Sous la deuxième forme présentée dans *(21.33)*, l'expression de f_r'' fait apparaître entre parenthèses l'effet Doppler classique dû aux mouvements des deux observateurs par rapport au réseau, ainsi que la fréquence $\gamma_t' f_e'/\gamma_t''$ qui n'est rien d'autre que la fréquence du signal émis par ***HS'***, mais mesurée avec l'horloge de ***HS''***.

4ème expérience: un observateur ***HS'*** dans le repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}'$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau émet une onde à la fréquence f_e', mesurée avec sa propre horloge, qui se réfléchit sur un miroir associé à un référentiel $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ fixe par rapport au réseau, et reçoit l'écho de cette onde dont il mesure la fréquence f_r', toujours avec sa propre horloge (figure 21.2c). Il est facile de trouver la valeur de f_r' en utilisant les relations *(21.25)* et *(21.27)* dans lesquelles on introduit la fréquence f reçue et re-émise par le miroir dans le référentiel de ***HS,*** à savoir

$$f = f_e' \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}} = \frac{1}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}\gamma_t' f_e' \quad \text{et} \quad f_r' = f\sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}} = \left(1+\boldsymbol{v}'/c_t\right)\frac{f}{\gamma_t'} \qquad (21.29)$$

La combinaison de ces deux relations nous montre alors que, dans ce cas de figure, l'effet mesuré par ***HS'*** est un pur *effet Doppler classique*, ce qui est parfaitement logique puisqu'il utilise sa propre horloge pour mesurer f_e' et f_r'

$$f_r' = \frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t} f_e' \qquad (21.30)$$

5ème expérience: un observateur ***HS*** dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ fixe par rapport au réseau émet une onde à la fréquence f_e, mesurée avec sa propre horloge, qui se réfléchit sur un miroir associé à un repère $\boldsymbol{O}''x''_1x''_2x''_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau fixe, et reçoit l'écho de cette onde dont il mesure la fréquence f_r, toujours avec sa propre horloge (figure 21.2d). Il est facile de trouver la valeur de f_r en utilisant les relations *(21.25)* et *(21.27)* dans lesquelles on introduit la fréquence f'' reçue et re-émise par le miroir dans le repère de ***HS''***. La combinaison de ces deux relations nous montre à nouveau que, dans ce cas de figure, l'effet mesuré par ***HS*** est un pur *effet Doppler classique*, puisqu'il utilise sa propre horloge pour mesurer f_e et f_r

$$f_r = \frac{1-\boldsymbol{v}''/c_t}{1+\boldsymbol{v}''/c_t} f_e \qquad (21.31)$$

6ème expérience: un observateur ***HS'*** dans le repère $\boldsymbol{O}'x'_1x'_2x'_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}'$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau émet une onde à la fréquence f_e', mesurée avec sa propre horloge, qui se réfléchit sur un miroir associé un repère $\boldsymbol{O}''x''_1x''_2x''_3$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ par rapport au réseau, et reçoit l'écho de cette onde dont il mesure la fréquence f_r', toujours avec sa propre horloge (figure 21.2c-d). Il est facile de trouver la valeur de f_r' en utilisant deux fois la relation la relation *(21.28)*. On trouve à nouveau que, dans ce cas de figure, l'effet mesuré par ***HS'*** est un pur effet Doppler classique, puisqu'il

utilise sa propre horloge pour mesurer f_e' et f_r'

$$f_r' = \frac{\left(1+\boldsymbol{v}'/c_t\right)\left(1-\boldsymbol{v}''/c_t\right)}{\left(1-\boldsymbol{v}'/c_t\right)\left(1+\boldsymbol{v}''/c_t\right)}\, f_e' \qquad (21.32)$$

21.4 – De l'explication du fameux paradoxe des jumeaux de la Relativité Restreinte

L'existence du réseau, donc d'un *«éther»*, permet de donner une explication très simple et très élégante au fameux paradoxe des jumeaux de la Relativité Restreinte.

De l'impossibilité pour un observateur HS de mesurer sa vitesse par rapport au réseau

On a déjà vu qu'un observateur local ***HS''*** dans son repère $\boldsymbol{O}''x''_1x''_2x''_3$ mobile à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ par rapport au réseau dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ n'est en principe pas capable de mesurer cette vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}''$ puisque son horloge et ses règles propres ne changent pas pour lui, ce qui a pour conséquence que des expériences du type Michelson-Morley ne lui apportent aucune information utile. On peut malgré tout se demander si des expériences de type Doppler-Fizeau avec un autre observateur ***HS'*** mobile à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}'$ par rapport au réseau dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ pouvaient lui apporter plus d'information. En relation avec l'observateur ***HS'***, l'observateur ***HS''*** peut effectuer trois types de mesure:

- il peut mesurer la vitesse relative $\boldsymbol{v}_r$ de ***HS'*** par rapport à lui, donnée par *(21.15)*

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}''}{1-\boldsymbol{v}''\boldsymbol{v}'/c_t^2} \qquad (21.33)$$

- il peut mesurer le rapport de fréquence f_r''/f_e' d'un certain événement connu survenant dans son repère et dans le repère de ***HS'***, donnée par *(21.28)*

$$\frac{f_r''}{f_e'} = \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}}\sqrt{\frac{1-\boldsymbol{v}''/c_t}{1+\boldsymbol{v}''/c_t}} \qquad (21.34)$$

- il peut mesurer le rapport de fréquence f_r''/f_e'' d'un signal qu'il a envoyé lui-même et qui se réfléchit sur un miroir dans le repère de ***HS'***, donnée par *(21.32)*

$$\frac{f_r''}{f_e''} = \frac{\left(1+\boldsymbol{v}'/c_t\right)\left(1-\boldsymbol{v}''/c_t\right)}{\left(1-\boldsymbol{v}'/c_t\right)\left(1+\boldsymbol{v}''/c_t\right)} \qquad (21.35)$$

On peut alors montrer que ces trois mesures expérimentales ne permettent pas à ***HS''*** de déterminer univoquement $\vec{\boldsymbol{v}}'$ et $\vec{\boldsymbol{v}}''$. En effet, les deux relations *(21.34)* et *(21.35)* sont absolument équivalentes et ne permettent donc pas de résoudre le problème. Quant aux deux relations *(21.33)* et *(21.34)*, il est facile de montrer qu'on a

$$\frac{f_r''}{f_e'} = \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}'/c_t}{1-\boldsymbol{v}'/c_t}}\sqrt{\frac{1-\boldsymbol{v}''/c_t}{1+\boldsymbol{v}''/c_t}} = \sqrt{\frac{1+\boldsymbol{v}_r/c_t}{1-\boldsymbol{v}_r/c_t}} \qquad (21.36)$$

et donc que ce système est lui aussi indéterminé, de sorte que ***HS''*** n'a finalement pas moyen de trouver sa vitesse relative $\vec{\boldsymbol{v}}''$ par rapport au réseau en utilisant des expériences de type

Doppler-Fizeau.

Du paradoxe des jumeaux qui n'en est un que dans l'esprit des observateurs HS!

La relation *(21.36)* est extrêmement intéressante, car elle montre que ***HS"*** peut déduire la vitesse relative $\boldsymbol{v}_r$ de ***HS'*** par rapport à lui en mesurant le rapport de fréquence $f_r"/f_e'$ d'un certain événement connu survenant dans son repère et dans le repère de ***HS'***, et que pour lui, dans son repère $\boldsymbol{O}"x"_1 x"_2 x"_3$, ce rapport de fréquence est de type relativiste. Mais l'observateur ***HS'***, dans son repère $\boldsymbol{O}'x'_1 x'_2 x'_3$, pourrait faire la même mesure, et il obtiendrait exactement le même résultat! Ainsi, pour les observateurs ***HS*** qui n'ont pas accès aux vitesses absolues par rapport au réseau (donc à l'éther!), leur principe de relativité est exactement le même principe que celui de la *Relativité Restreinte*. Notamment, en appliquant la transformation de Lorentz, ***HS"*** aura l'impression que ***HS'*** vieillit moins vite que lui, alors que ***HS'*** aura aussi l'impression que c'est ***HS"*** qui vieillit moins vite que lui. Cette situation étrange de prime abord est appelée le *paradoxe des jumeaux* en Relativité Restreinte.

Mais ce paradoxe des jumeaux n'en est un que dans les esprits des observateurs ***HS'*** etd ***HS"***. En effet, pour le ***GO*** qui a accès aux vitesses relatives des ***HS*** par rapport au réseau, il est parfaitement clair que c'est le ***HS*** qui se déplace par rapport au réseau qui vieillit moins vite que le ***HS*** qui reste fixe par rapport au réseau. Ainsi, si un couple de jumeaux ***HS*** effectuent la fameuse expérience des jumeaux de Langevin, à savoir qu'un des jumeaux part en fusée à des vitesses subluminiques et revient ensuite vers son jumeau resté au point de départ, le ***GO*** pourra dire sans équivoque que c'est le ***HS*** qui a voyagé par rapport au réseau à très grande vitesse qui sera le plus jeune lorsqu'ils se rencontreront après le voyage. Et le GO sait parfaitement que cet effet a eu lieu tout au long du voyage, même pendant les périodes où la vitesse du jumeau voyageur aura été constante par rapport au réseau!

Cette interprétation nouvelle du paradoxe des jumeaux basée sur l'existence du réseau cosmologique (l'éther) donne une réponse très logique et élégante à de nombreuses questions et interprétations du paradoxe des jumeaux suggérées par la Relativité Restreinte et par la Relativité Générale[1].

[1] *Voir par exemple:*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_jumeaux
http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_paradox

PARTIE II

C

Gravitation et Cosmologie

Champs de gravitation
des singularités topologiques localisées

Masse gravitationnelle

Interactions gravitationnelles
entre singularités topologiques

Gravitation de Newton
et relativité générale d'Einstein

«Force faible» d'interaction
liant les boucles de dispiration

Evolution cosmologique de l'univers
et «masse noire»

Constante de Hubble, «redshift»
des galaxies et fond diffus cosmologique

Chapitre 22

Perturbations «gravitationnelles» de l'expansion par des singularités topologiques localisées

Dans ce chapitre, on utilise la deuxième équation partielle de Newton obtenue dans la section 18.1 pour traiter le problème des perturbations externes du champ d'expansion d'une singularité topologique sphérique au repos, contenant une énergie $E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}$ associée à la structure interne complexe de la singularité sphérique (par exemple des boucles de dislocation et/ou de désinclinaison), ou contenant une charge globale de rotation $\boldsymbol{Q}_{\lambda}$ et/ou une charge globale de courbure $\boldsymbol{Q}_{\theta}$.

On montrera que les perturbations du champ d'expansion associées à une singularité topologique localisée sont en fait l'expression de l'existence d'un «champ gravitationnel» externe à longue distance de cette singularité.

On montrera ensuite que l'effondrement d'amas de singularités de type lacunaire ou de type interstitiel conduit à des singularités topologiques macroscopiques assez singulières: un trou dans le réseau, sorte de *lacune macroscopique*, dans le cas de l'effondrement de singularités de nature lacunaire, ou un morceau de réseau additionnel, sorte d'*interstitiel macroscopique* au sein du réseau dans le cas de l'effondrement de singularités de nature interstitielle. La description des champs «gravitationnels» de ces deux types de singularités macroscopiques complémentaires montre que la singularité macroscopique lacunaire peut se comporter comme un réel trou noir, alors que la singularité macroscopique interstitielle ne présente pas cette propriété! Par analogie, on peut comparer les *lacunes macroscopiques* aux *trous noirs* de la Relativité Générale, alors que les *interstitiels macroscopiques* seraient comparables aux *pulsars (étoiles à neutrons)*.

22.1 – Singularité localisée d'énergie de distorsion donnée

Considérons une singularité localisée au repos, de volume $\boldsymbol{V}_{amas}$, constituée d'une boucle ou d'un amas de nombreuses boucles de dislocation et/ou de désinclinaison, et supposons connues, parce qu'on a pu les calculer à l'aide des relations *(18.10)* et *(18.11)*, les densités d'énergie de distorsion $F_{dist}^{amas}(\vec{r})$ et d'énergie potentielle $F_{pot}^{amas}(\vec{r})$ au sein de cette singularité. L'équilibre du champ de perturbation $\tau_{int}^{(E)}(\vec{r})$ d'expansion au sein de cette singularité est donné par l'équation du deuxième degré *(18.14)*, dont la solution est, à l'intérieur de la singularité

$$\tau_{int}^{(E)}(\vec{r}) = \frac{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}(\vec{r})+\tau^{amas}(\vec{r})) - K_0}{2K_1}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4K_1\left(F_{dist}^{amas}(\vec{r})+F_{pot}^{amas}(\vec{r})\right)}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0+\tau^{ext}(\vec{r})+\tau^{amas}(\vec{r}))-K_0\right)^2}}\right] \qquad (22.1)$$

On ne peut évidemment pas faire ici un calcul exacte de $\tau_{int}^{(E)}(\vec{r})$ puisque celui-ci nécessiterait

de traiter un cas concret de singularité pour connaître exactement les distributions des densités d'énergie de distorsion $F_{dist}^{amas}(\vec{r})$ et d'énergie potentielle $F_{pot}^{amas}(\vec{r})$ au sein de cette singularité. Par contre, on peut traiter ce problème de manière approximative en introduisant des valeurs moyennes des divers champs concernés. C'est ce qu'on va entreprendre de manière générale dans toute la suite de ce chapitre. Dans le cas de la singularité de densité d'énergie donnée, on peut commencer par calculer l'*énergie globale de repos* $E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}$ de celle-ci par la relation

$$\left(E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}\right)=\iiint_{V_{amas}}\left(F_{dist}^{amas}(\vec{r})+F_{pot}^{amas}(\vec{r})\right)dV \qquad (22.2)$$

ce qui permet d'introduire des valeurs moyennes des densités d'énergies au sein de celle-ci

$$\overline{F}_{dist}^{amas}+\overline{F}_{pot}^{amas}=\frac{1}{\boldsymbol{V}_{amas}}\left(E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}\right) \qquad (22.3)$$

En supposant encore qu'on puisse négliger $\tau^{ext}(\vec{r})+\tau^{amas}(\vec{r})$ vis-à-vis de $1+\tau_0$, on peut déduire une valeur moyenne $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$ du champ interne de perturbation de l'expansion comme

$$\overline{\tau}_{int}^{(E)}\cong\frac{4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0}{2K_1}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4K_1\left(E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}\right)}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0))-K_0\right)^2\boldsymbol{V}_{amas}}}\right] \qquad (22.4)$$

Il est clair que ce champ moyen est purement virtuel, autrement dit qu'il n'existe pas vraiment, mais qu'il représente en fait une forme de valeur moyenne de tous les accidents du champ de perturbation $\tau_{int}^{(E)}(\vec{r})$ au sein de la singularité, accidents qui doivent être extrêmement marqués surtout si on a à faire à un amas de très nombreuses singularités topologiques.

La condition d'existence du champ moyen virtuel de perturbation statique de l'expansion

Pour qu'une telle solution virtuelle $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$ statique existe, il faut évidemment que l'argument de la racine dans l'équation *(22.4)* soit positif, ce qui implique une condition sur la densité moyenne d'énergie au sein de la singularité

Hypothèse 1: $$\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}}\le\frac{1}{4K_1}\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)^2 \qquad (22.5)$$

Cette condition dépend en fait explicitement de l'expansion volumique de fond τ_0 du réseau. Elle ne peut jamais être satisfaite dans un domaine d'expansion volumique τ_0 centré sur $\tau_0=\tau_{0cr}$, et couvrant la plage d'expansion suivante

$$\tau_{0cr}-\sqrt{\frac{1}{K_1}\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}}}\le\tau_0\le\tau_{0cr}+\sqrt{\frac{1}{K_1}\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}}} \qquad (22.6)$$

avec la valeur critique d'expansion τ_{0cr} valant, en utilisant les relations *(19.58)* tirées des conjectures 0 à 6 du réseau cosmologique parfait et la relation *(15.4)*

$$\tau_{0cr}=\frac{K_0}{2K_1}-\frac{2K_2}{3K_1}-1>1 \qquad (22.7)$$

Dans ce domaine centré sur $\tau_0=\tau_{0cr}$, il ne peut exister qu'une *solution dynamique de l'équation de Newton (18.12) pour la perturbation d'expansion*, solution dynamique qui permet de passer de la solution statique du domaine $\tau_0<\tau_{0cr}$ à la solution statique dans le *domaine* $\tau_0>\tau_{0cr}$ et vice-versa.

La condition de champ de perturbation de valeur moyenne nulle

Dans les domaines où il existe une solution statique de valeur virtuelle $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$ non nulle du champ de perturbation de l'expansion au sein de la singularité, l'expansion volumique à l'extérieur de la singularité doit aussi être perturbée par un champ de perturbation statique de symétrie sphérique $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ qui doit compenser l'expansion ou la contraction locale du réseau due à la singularité. En fait, la valeur du champ moyen de l'ensemble du réseau doit être égale à l'expansion de fond τ_0 du réseau, de sorte que la moyenne des perturbations d'expansion dû à la présence de la singularité doit être nulle. En l'absence d'une charge de courbure globale $\boldsymbol{Q}_\theta = 0$ de la singularité, le champ d'ajustement extérieur $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ doit satisfaire l'équation d'équilibre *(18.8)* avec $\theta^{ch} = 0$, donc

$$\Delta\left(\tau_{ext}^{(E)}(r)\right) = 0 \qquad (22.8)$$

Avec la symétrie sphérique du problème, ce laplacien possède une seule solution qui tend vers la valeur nulle pour $r \to R_\infty$

$$\tau_{ext}^{(E)}(r) = \frac{A}{r} \qquad (22.9)$$

Pour déterminer la constante A , on doit s'assurer que le fait d'avoir introduit la singularité dans le réseau n'a pas modifié la valeur moyenne τ_0 d'expansion du réseau. Cette condition s'écrit

$$\tau_0 = \frac{3}{4\pi R_\infty^3}\left[\iiint_{V_{amas}}\left(\tau_0 + \overline{\tau}_{int}^{(E)}\right)dV + \int_{R_{amas}}^{R_\infty}\left(\tau_0 + \frac{A}{r}\right)4\pi r^2\, dr\right] \;\Rightarrow\; \overline{\tau}_{int}^{(E)}\boldsymbol{V}_{amas} + 4\pi A\int_{R_{amas}}^{R_\infty} r\, dr = 0 \qquad (22.10)$$

Le calcul de cette expression fournit alors la valeur suivante de la constante A

$$-\overline{\tau}_{int}^{(E)}\boldsymbol{V}_{amas} = 4\pi A\left(\frac{R_\infty^2}{2} - \frac{R_{amas}^2}{2}\right) \;\Rightarrow\; A \cong -\overline{\tau}_{int}^{(E)}\frac{\boldsymbol{V}_{amas}}{2\pi R_\infty^2} \qquad (22.11)$$

On en déduit directement le champ de perturbations $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ de l'expansion généré par la singularité à l'extérieur de celle-ci, qui dépend directement du champ virtuel moyen $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$

$$\tau_{ext}^{(E)}(r) = -\frac{\overline{\tau}_{int}^{(E)}\boldsymbol{V}_{amas}}{2\pi R_\infty^2}\frac{1}{r} \qquad (22.12)$$

Les cas les plus simples de champs statiques de perturbations d'expansion

Dans le cas où la condition d'existence *(22.5)* est largement satisfaite, on peut émettre une nouvelle hypothèse concernant la valeur de la densité d'énergie interne de la singularité, mais plus forte que la condition d'existence *(22.5)*

Hypothèse 2: $$\frac{E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}} << \frac{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)^2}{4K_1} \qquad (22.13)$$

qui permet de développer au premier ordre la racine dans l'expression (22.4), de sorte que la solution statique pour le champ interne moyen $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$ peut s'écrire approximativement comme

$$\overline{\tau}_{int}^{(E)} \cong -\frac{1}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}\frac{E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}} \qquad (22.14)$$

En combinant alors l'expression *(22.13)* avec cette valeur de $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$, on obtient que $\left|\overline{\tau}_{int}^{E}\right|$ doit,

avec l'hypothèse 2, satisfaire la relation suivante

$$\left|\overline{\tau}_{int}^{(E)}\right| << \frac{\left|4K_2/3+2K_1(1+\tau_0))-K_0\right|}{4K_1} \qquad (22.15)$$

La condition associée à l'hypothèse 2 dépend explicitement de l'expansion volumique de fond τ_0 du réseau, de sorte qu'elle ne peut être satisfaite que si l'expansion de fond satisfait une ou l'autre de ces deux conditions

$$\tau_0 >> \tau_{0cr}+\sqrt{\frac{1}{K_1}\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}}} \quad \text{ou} \quad \tau_0 << \tau_{0cr}-\sqrt{\frac{1}{K_1}\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{\boldsymbol{V}_{amas}}} \qquad (22.16)$$

Les expressions *(22.12)* et *(22.14)* permettent de déduire une valeur approximative simplifiée du champ statique $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ de perturbations d'expansion externe de la singularité

$$\tau_{ext}^{(E)}(r) \cong -\frac{1}{2\pi\left(K_0-2K_1(1+\tau_0)-4K_2/3\right)R_\infty^2}\frac{E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}}{r} \qquad (22.17)$$

Il est remarquable de constater ici que ce champ de perturbation externe ne dépend *que* de l'énergie totale $E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}$ de l'amas et surtout qu'il *ne dépend pas du volume ou du rayon de celui-ci*.

L'énergie du champ des perturbations de l'expansion

L'énergie totale du champ d'expansion peut être calculée

$$E_{dist}^{(\tau)} = \iiint_V \left(K_1\tau^2-K_0\tau\right)dV = \begin{bmatrix} K_1\iiint_{\boldsymbol{V}_{amas}}\left(\tau_0+\overline{\tau}_{int}^{(E)}\right)^2 dV + K_1\int_{R_{amas}}^{R_\infty}\left(\tau_0+\frac{A}{r}\right)^2 4\pi r^2\,dr \\ -K_0\iiint_{\boldsymbol{V}_{amas}}\left(\tau_0+\overline{\tau}_{int}^{(E)}\right)dV - K_0\int_{R_{amas}}^{R_\infty}\left(\tau_0+\frac{A}{r}\right)4\pi r^2\,dr \end{bmatrix} \qquad (22.18)$$

En utilisant la relation *(22.10),* on déduit immédiatement que les termes en K_0 ont une contribution égale à $-VK_0\tau_0$ à l'énergie, et ne dépendent par conséquent pas des perturbations apportées par la singularité. Comme $K_0 >> K_1$, la relation *(22.10)* correspond en fait à *une minimisation de l'énergie* $E_{dist}^{(\tau)}$, ce qui justifie *à posteriori* notre choix de la condition de champ de perturbation de valeur moyenne nulle utilisé pour déterminer la valeur de la constante A. Ce sont donc *les termes en* K_1 *qui fournissent une contribution à l'énergie du champ de perturbation de la singularité*. Si on soustrait tous les termes d'énergie ne dépendant que de τ_0, on obtient l'accroissement d'énergie $E_{grav}^{(E)}$ associé exclusivement au champ «gravitationnel» de la singularité, et qui vaut

$$E_{grav}^{E} \cong K_1\left(\overline{\tau}_{int}^{(E)}\right)^2\boldsymbol{V}_{amas} \cong \frac{K_1}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)^2}\frac{\left(E_{dist}^{amas}\right)^2}{\boldsymbol{V}_{amas}} \qquad (22.19)$$

On constate que cette énergie est positive, qu'elle est proportionnelle au produit du volume de la singularité par le carré du champ interne de perturbation d'expansion de la singularité, et qu'elle ne dépend que du module d'élasticité K_1 qui, comme on le rappelle, doit être beaucoup

plus petit que les modules K_0 et K_3 dans le réseau cosmologique parfait.
Il est intéressant de comparer l'énergie de gravitation de la singularité avec son énergie élasttique de distorsion, en calculant la valeur approximative du rapport des deux. Il vient

$$\frac{E^{E}_{grav}}{E^{amas}_{dist}} \cong \frac{K_1\left(\overline{\tau}^{(E)}_{int}\right)^2 \boldsymbol{V}_{amas}}{E^{amas}_{dist}} \cong \frac{K_1}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)^2}\frac{E^{amas}_{dist}}{\boldsymbol{V}_{amas}} \cong \frac{K_1}{K_0^2}\frac{E^{amas}_{dist}}{\boldsymbol{V}_{amas}} \qquad \left(\tau_0 << \tau_{0cr}\right) \qquad (22.20)$$

Le rapport K_1/K_0^2 est extrêmement petit, de sorte que l'énergie gravitationnelle de la singularité est assurément beaucoup plus petite que l'énergie élastique de distorsion de la singularité dans le domaine $\tau_0 << \tau_{0cr}$. On reviendra sur ce point dans la suite.
Comme l'énergie de gravitation dépend du carré de $\overline{\tau}^{(E)}_{int}$ et du volume de la singularité, on déduit que le calcule de l'énergie réelle de gravitation d'un amas de N singularités doit être fait à partir de la somme des énergies de gravitation de chacune des singularités de l'amas, et, s'il existe bien un champ statique moyen d'expansion volumique au sein de chaque singularité, comme une somme du produit des volumes et des carrés de l'expansion réelle de chacune des singularités, et devrait donc s'écrire en fait comme

$$E^{(E)}_{grav\,amas} \cong \sum_{i=1}^{N} E^{(E)}_{grav\,sing\,i} \cong K_1 \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{V}_{sing\,i}\left(\overline{\tau}^{(E)}_{int\,sing\,i}\right)^2 \qquad (22.21)$$

où $\boldsymbol{V}_{sing\,i}$ est le volume occupé par la singularité i et $\overline{\tau}^{(E)}_{int\,sing\,i}$ est l'expansion volumique interne de la singularité i due à son énergie.

Les effets de l'expansion due à un amas de singularités topologiques d'énergie donnée

On constate que le champ externe des perturbations, pris à la surface de la singularité, présente une valeur absolue $\left|\tau^{(E)}_{ext}(R)\right| = 2R^2_{amas}\left|\overline{\tau}^{(E)}_{int}\right|/3R^2_{\infty}$ *nettement inférieure* à celle du champ interne virtuel moyen $\left|\overline{\tau}^{(E)}_{int}\right|$ puisque $\left|\tau^{(E)}_{ext}(R)\right|$ contient R^2_{∞} au dénominateur. Ceci implique que les densités virtuelles moyennes de masse du réseau sont nettement différentes à l'intérieur et à l'extérieur de la singularité

$$mn_{ext}(R_{amas}) \cong mn_0\,\mathrm{e}^{-\tau_0}\,\mathrm{e}^{-\tau^{(E)}_{ext}(R_{amas})} \quad \text{et} \quad m\overline{n}_{int} \cong mn_0\,\mathrm{e}^{-\tau_0}\,\mathrm{e}^{-\overline{\tau}^{(E)}_{int}} \qquad (22.22)$$

Avec les conjectures 0 à 6 du *réseau cosmologique parfait (19.58)*, si on se trouve dans le *domaine d'expansion* $\tau_0 < \tau_{0cr}$ dans lequel il n'existe pas d'ondes longitudinales, le champ interne virtuel moyen $\overline{\tau}^{(E)}_{int}$ de la singularité est positif. Quant au champ externe réel $\tau^{(E)}_{ext}$ de la singularité, il est négatif et satisfait donc parfaitement la conjecture 2 déduite de la courbure des rayons d'onde au voisinage de la singularité (fig. 22.1a).
Par contre, si on se trouve dans le *domaine d'expansion* $\tau_0 > \tau_{0cr}$ où il existe des ondes longitudinales, les champs reportés dans la figure 22.1b s'inversent par rapport aux champs de la figure 22.1a: le champ interne virtuel moyen $\overline{\tau}^{(E)}_{int}$ de la singularité devient négatif, et le champ externe réel $\tau^{(E)}_{ext}$ devient positif, de sorte que celui-ci ne satisfait plus la conjecture 2 déduite de la courbure des rayons d'onde au voisinage de la singularité!

Les domaines de solutions des perturbations d'expansion d'un amas de singularités d'énergie donnée en fonction de l'expansion de fond du réseau

Nous avons vu dans cette section qu'un amas de singularités d'énergie donnée peut posséder

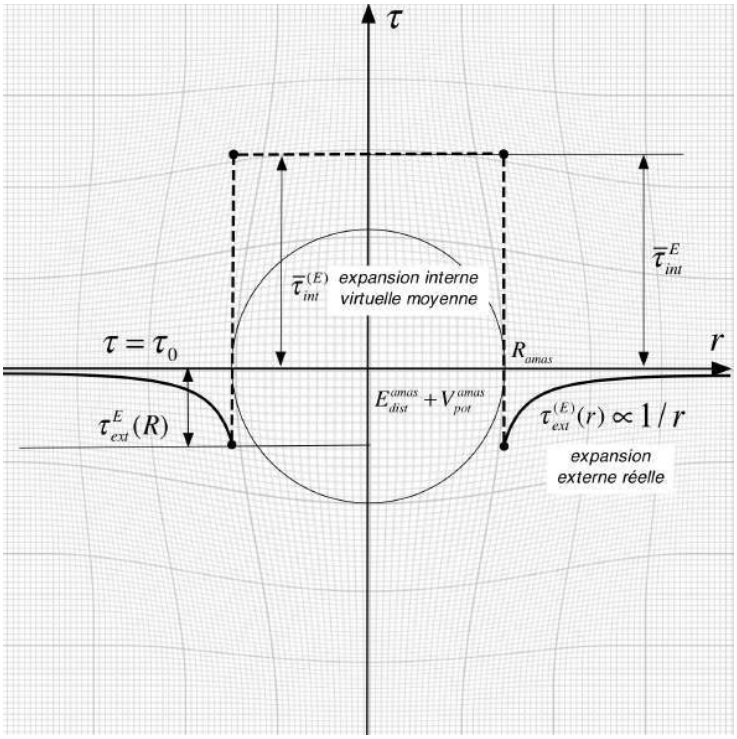


Figure 22.1a *- le champ d'expansion à l'intérieur et à l'extérieur d'une singularité de densité d'énergie donnée dans le domaine* $\tau_0 < \tau_{0cr}$

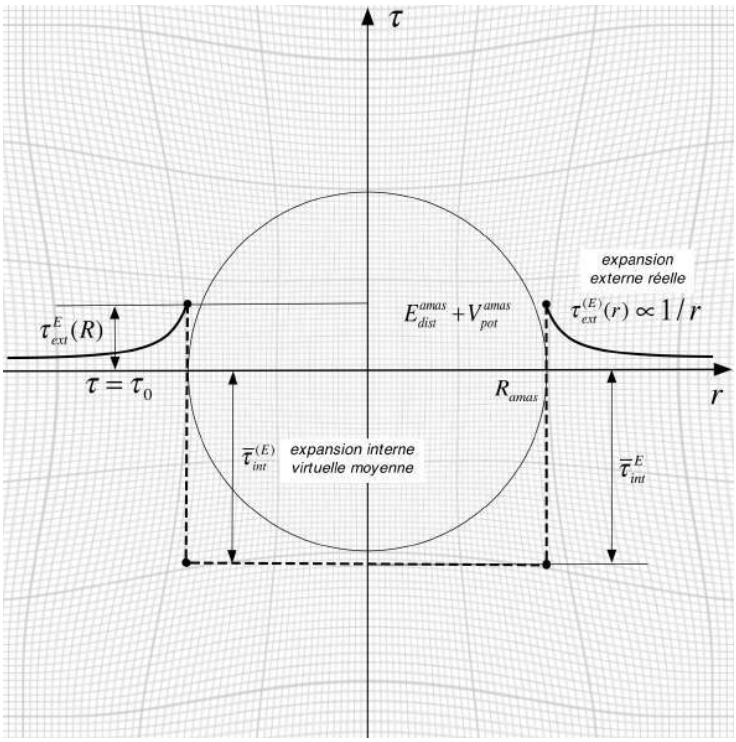


Figure 22.1b *- le champ d'expansion à l'intérieur et à l'extérieur d'une singularité de densité d'énergie donnée dans le domaine* $\tau_0 > \tau_{0cr}$

des solutions statiques ou dynamiques pour les champs de perturbations d'expansion qui lui sont associés, et que les domaines d'expansion de fond τ_0 du réseau dans lesquels interviennent ces solutions sont donnés par les conditions *(22.6)*.

On a aussi recherché des solutions simples *(22.17)* pour les champs de perturbations statiques, qui interviennent dans les domaines d'expansion de fond τ_0 du réseau satisfaisant les conditions *(22.16)*. Les domaines de solutions de perturbations d'expansion associés à un amas de singularités d'énergie donnée sont reportés de façon synoptique dans la figure 22.2.

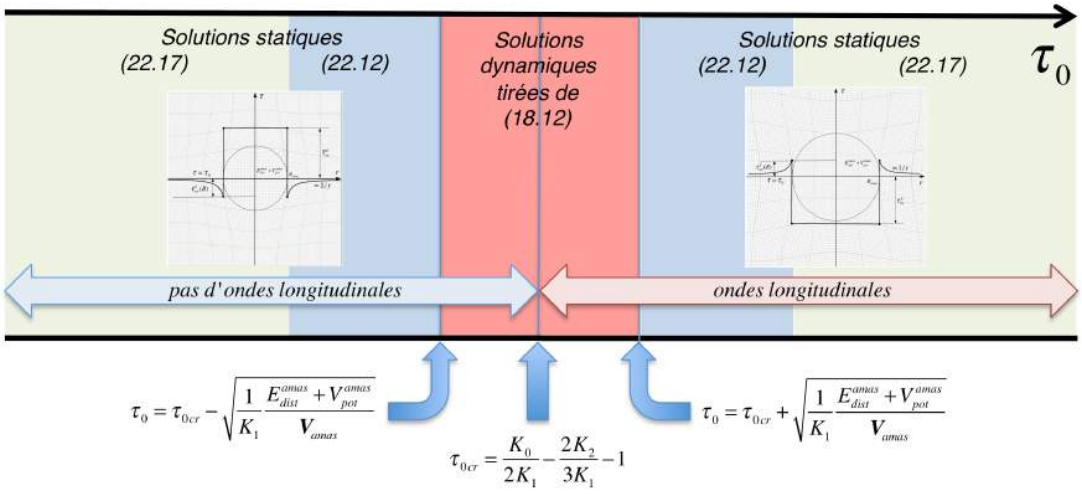


Figure 22.2 *- les domaines de solutions des perturbations d'expansion d'une singularité de densité d'énergie donnée en fonction de l'expansion de fond* τ_0

On peut aussi se demander si une singularité d'énergie donnée pourrait être un trou noir. Pour que cela arrive, il faut nécessairement que la perturbation du champ d'expansion extérieure soit «négative», ce qui ne peut intervenir que dans le domaine d'expansion satisfaisant $\tau_0 < \tau_{0cr}$, et il faut de plus que les conditions *(15.3)* soient satisfaites. En supposant alors un amas avec une forte valeur de $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$, on peut utiliser l'expression *(22.17)* pour le champ extérieur $\tau_{ext}^{(E)}(r)$. La première condition *(15.3)* implique un rayon critique de l'amas tel que

$$\left.\frac{\partial \tau_{ext}^{(E)}(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad \Rightarrow \quad r_{cr} = \frac{E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}}{4\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2} \qquad (\tau_0 < \tau_{0cr}) \qquad (22.23)$$

et la deuxième condition *(15.3)* implique que

$$r_{cr} > R_{amas} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}}{R_{amas}} > 4\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2 \qquad (\tau_0 < \tau_{0cr}) \qquad (22.24)$$

Mais il faut aussi que cette condition soit satisfaite en-dessous du domaine des solutions dynamiques *(22.6)*. On peut alors montrer que ceci n'intervient que si l'énergie de la singularité satisfait l'inégalité encore plus forte suivante

$$\left(E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}\right)R_{amas} > 48\pi K_1 R_\infty^4 \qquad (\tau_0 < \tau_{0cr}) \qquad (22.25)$$

Discussion finale

Nous venons de calculer les champs de perturbation de l'expansion dus aux énergies globales

$E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}$ d'une singularité topologique, ou d'un amas de singularités topologiques, en nous basant sur une approximation forte consistant à supposer une valeur moyenne $\overline{F}_{dist}^{amas} + \overline{F}_{pot}^{amas}$ constante et homogène des densités d'énergie au sein de la singularité. Cette façon de procéder ne fournit en fait qu'une *valeur virtuelle* $\overline{\tau}_{int}^{(E)}$ *d'un champ moyen de perturbation interne*. Par contre, elle fournit *une valeur correcte du champ de perturbation* $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ *externe (22.17), qui ne dépend pas de la taille de la singularité,* même si la distribution des énergies $F_{dist}^{amas}(\vec{r}) + F_{pot}^{amas}(\vec{r})$ n'était pas du tout homogène au sein de la singularité.

22.2 – Singularité localisée de charge de courbure donnée

Une singularité localisée de rayon R_{amas}, hormis de posséder une énergie de repos donnée, peut aussi posséder une charge globale de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$. En effet, une telle singularité peut être constituée d'un amas de singularités topologiques discrètes du réseau, telles que des boucles prismatiques de dislocation (fig. 9.36) qui possèdent chacune une charge de courbure élémentaires $\boldsymbol{q}_{\theta BC(i)}$. Si $\boldsymbol{Q}_\theta > 0$, on parlera de singularité *de nature lacunaire* car il manque des sites de réseau au sein de l'amas, et si $\boldsymbol{Q}_\theta < 0$, on parlera de singularité *de nature interstitielle*, car il y a alors excès de sites de réseau au sein de l'amas.
Une singularité de courbure est responsable d'un champ de flexion non nul et divergent dans son voisinage comme nous l'avons montré à la section 19.2.

Les champs d'expansion dus à une singularité de courbure

L'équation d'équilibre *(18.8) du champ d'expansion* d'une telle singularité nécessite de connaître la densité $\theta^{amas}(\vec{r})$ de charges de courbure au sein de la singularité. L'équation d'équilibre *(18.8)* revient alors à écrire à l'intérieur de la singularité le laplacien de $\tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}$

$$\Delta\left(\tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}\right) = -\frac{2K_2\theta^{amas}(\vec{r})}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0} \qquad (22.26)$$

Ne connaissant pas la densité $\theta^{amas}(\vec{r})$ qui est propre à une singularité donnée, on utilisera pour simplifier l'approximation d'une densité de charge de courbure moyenne homogène au sein de la singularité, telle que

$$\overline{\theta}^{amas} = \boldsymbol{Q}_\theta / \left(4\pi R_{amas}^3 / 3\right) \qquad (22.27)$$

On obtient alors l'équation d'équilibre simplifiée suivante pour le champ interne virtuelle

$$\Delta\left(\tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}\right) \cong -\frac{3K_2}{2\pi\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)} \frac{\boldsymbol{Q}_\theta}{R_{amas}^3} \qquad (22.28)$$

et on vérifie que la solution de cette équation est de symétrie sphérique et s'écrit

$$\tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) \cong -\frac{K_2\boldsymbol{Q}_\theta}{4\pi\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)} \frac{r^2}{R_{amas}^3} \qquad (22.29)$$

D'autre part, à l'extérieur de la singularité, on doit avoir l'équation d'équilibre

$$\Delta\left(\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r)\right) = 0 \qquad (22.30)$$

Avec la symétrie sphérique du problème, ce laplacien possède une seule solution qui tende vers une valeur nulle pour $r \to R_\infty$, à savoir

$$\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) = A / r \qquad (22.31)$$

La condition de champ de perturbation de valeur moyenne nulle

Comme précédemment, la constante d'intégration A doit être telle que la valeur du champ moyen au sein du réseau soit égale à l'expansion de fond τ_0 du réseau, de sorte que

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{3}{4\pi R_\infty^3}\left[\int_0^{R_{amas}} \left(\tau_0 + \tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r)\right) 4\pi r^2\, dr + \int_{R_{amas}}^{R_\infty} \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r)\right) 4\pi r^2\, dr\right] \\ \Rightarrow \quad & \int_0^{R_{amas}} \tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) r^2\, dr + \int_{R_{amas}}^{R_\infty} \tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) r^2\, dr = 0 \end{aligned} \qquad (22.32)$$

La solution de cette équation fournit la valeur de A suivante

$$A \cong \frac{K_2}{10\pi\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right) R_\infty^2} R_{amas}^2 \boldsymbol{Q}_\theta \qquad (22.33)$$

Les champs de perturbations de l'expansion dus à la charge de courbure peuvent par conséquent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \tau_{int}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) \cong \dfrac{K_2}{3\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)} \left(\dfrac{\boldsymbol{Q}_\theta}{4\pi R_{amas}^3/3}\right) r^2 \\ \tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)}(r) \cong -\dfrac{K_2}{10\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right) R_\infty^2} \dfrac{R_{amas}^2 \boldsymbol{Q}_\theta}{r} \end{cases} \qquad (22.34)$$

Le cas particulier de la boucle de dislocation coin

Regardons comment s'écrit le champ extérieur *dans le cas d'une boucle de dislocation coin*, en introduisant la valeur *(19.101)* de $\boldsymbol{q}_{\theta BC} = -2\pi \vec{B}_{BC} \vec{\boldsymbol{n}}$ et le volume virtuel de la boucle coin, c'est-à-dire $\boldsymbol{V}_{BC} = 4\pi R_{BC}^3 / 3$ contenant l'essentiel de l'énergie élastique de la boucle. Il vient alors pour le champ extérieur des perturbations de l'expansion dues à la boucle coin

$$\tau_{ext}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}(r) \cong \frac{K_2}{5\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right) R_\infty^2} \pi R_{BC}^2 \left(\vec{B}_{BC} \vec{\boldsymbol{n}}\right) \frac{1}{r} \qquad (22.35)$$

On constate que le terme $\pi R_{BC}^2 \left(\vec{B}_{BC} \vec{\boldsymbol{n}}\right)$ n'est en fait rien d'autre que *le volume effectif de la boucle coin*, qui est directement lié au nombre N_{sites} de sites de réseau à enlever ou rajouter au réseau pour former la boucle coin, puisque

$$N_{sites} = \pi R_{BC}^2 \left|\vec{B}_{BC} \vec{\boldsymbol{n}}\right| / a^3 \quad \Rightarrow \quad \tau_{ext}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}(r) = \frac{K_2}{15\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right) R_\infty^2} N_{sites} a^3 \frac{1}{r} \qquad (22.36)$$

L'énergie du champ des perturbations d'expansion

L'énergie totale du champ d'expansion peut être calculée par la relation

$$E_{dist}^{(\tau)} = \iiint_V \left(K_1\tau^2 - K_0\tau\right)dV = \begin{bmatrix} K_1 \int_0^{R_{amas}} \left(\tau_0 + \tau_{int}^{(Q_\theta)}(r)\right)^2 4\pi r^2\, dr + K_1 \int_{R_{amas}}^{R_\infty} \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(Q_\theta)}(r)\right)^2 4\pi r^2\, dr \\ -K_0 \int_0^{R_{amas}} \left(\tau_0 + \tau_{int}^{(Q_\theta)}(r)\right) 4\pi r^2\, dr - K_0 \int_{R_{amas}}^{R_\infty} \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(Q_\theta)}(r)\right) 4\pi r^2\, dr \end{bmatrix} \qquad (22.37)$$

Dans celle-ci, à cause de la condition *(22.32)*, les termes en K_0 donnent la valeur $-VK_0\tau_0$ et ne dépendent donc pas de la singularité. Comme $K_0 >> K_1$, la relation *(22.32)* correspond en fait à *une minimisation de l'énergie* $E_{dist}^{(\tau)}$, ce qui justifie *à posteriori* notre choix de la condition de champ de perturbation de valeur moyenne nulle utilisé pour déterminer la valeur de la constante A. Ce sont par conséquent les termes en K_1 qui fournissent une contribution à l'énergie du champ de perturbation d'expansion de la singularité. Si on soustrait tous les termes d'énergie ne dépendant que de τ_0, on obtient l'accroissement d'énergie $E_{grav}^{(Q_\theta)}$ associé au champ «gravitationnel» de la singularité de courbure

$$E_{grav}^{(Q_\theta)} = \frac{K_1K_2^2}{\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}\left(\frac{1}{28} + \frac{R_{amas}^3}{25R_\infty^3}\right)R_{amas}\boldsymbol{Q}_\theta^2 \qquad (22.38)$$

qui peut se simplifier en négligeant les terme en $1/R_\infty^3$ sous la forme

$$E_{grav}^{(Q_\theta)} \cong \frac{K_1}{28\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}K_2^2R_{amas}\boldsymbol{Q}_\theta{}^2 \qquad (22.39)$$

Les effets de l'expansion due à une singularité de charge de courbure donnée

Les champs $\tau_{ext}^{(Q_\theta)}(R_{amas})$ et $\tau_{int}^{(Q_\theta)}(R_{amas})$ à la surface de la singularité ont des valeurs absolues très différentes, ce qui est dû au terme en R_{amas}^2/R_∞^2 dans l'expression du champ extérieur

$$\begin{cases} \tau_{int}^{(Q_\theta)}(R_{amas}) \cong \dfrac{K_2}{4\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)}\left(\dfrac{\boldsymbol{Q}_\theta}{R_{amas}}\right) \\ \tau_{ext}^{(Q_\theta)}(R_{amas}) \cong -\dfrac{K_2}{10\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)}\dfrac{R_{amas}^2}{R_\infty^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{Q}_\theta}{R_{amas}}\right) \end{cases} \qquad (22.40)$$

Comme les champs d'expansion *ne se raccordent pas à l'interface de la singularité* (fig. 22.3, a et b), ceci implique que les densités de masse du réseau sont nettement différentes à l'intérieur et à l'extérieur de l'amas

$$mn_{ext}(R_{amas}) \cong mn_0\, e^{-\tau_0}\, e^{-\tau_{ext}^{(Q_\theta)}(R_{amas})} \quad \text{et} \quad mn_{int}(R_{amas}) \cong mn_0\, e^{-\tau_0}\, e^{-\tau_{int}^{(Q_\theta)}(R_{amas})} \qquad (22.41)$$

Ces expressions impliquent aussi que, si ces champs existent, c'est-à-dire si $K_2 \neq 0$, ceux-ci présentent une singularité infinie lorsque l'expansion de fond τ_0 atteint la valeur critique τ_{0cr} qui annule le dénominateur.

Les signes du terme $K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3$ et du module K_2 jouent un rôle important ici. En utilisant les conjectures 0 à 6 du *réseau cosmologique parfait*, on a que:

- si $K_2/\left[K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right] > 0$, c'est-dire si $\tau_0 < \tau_{0cr}$, *seules les singularités de nature lacunaire*, avec $\boldsymbol{Q}_\theta > 0$, satisfont la conjecture 2 concernant la courbure par attraction des rayons d'onde au voisinage de la singularité, alors que les *singularités de nature interstitielle*, avec $\boldsymbol{Q}_\theta < 0$ repoussent les rayons d'onde,

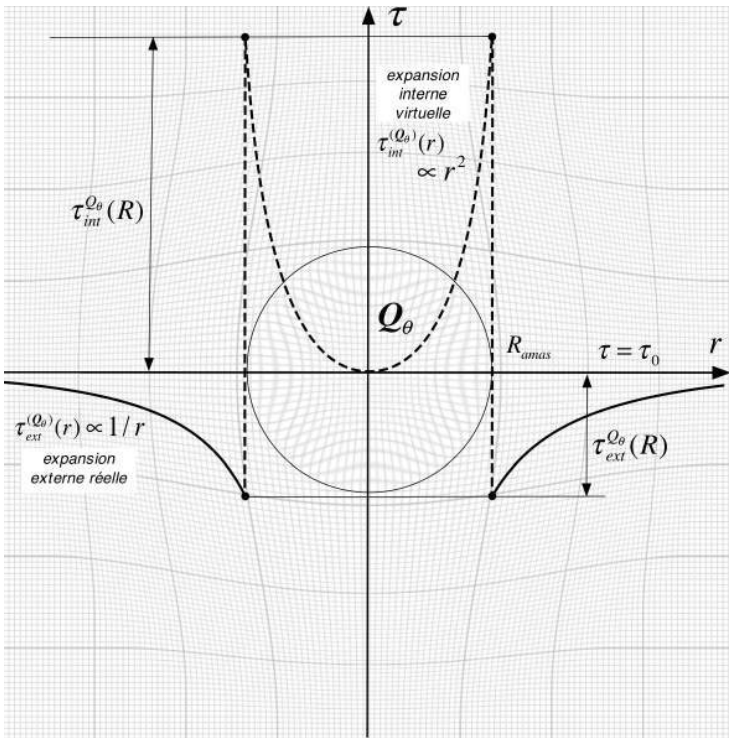


Figure 22.3a *- le champ d'expansion à l'intérieur et à l'extérieur d'une charge de courbure* $Q_\theta < 0$ *(de type interstitiel) si* $\tau_0 > \tau_{0cr}$ *ou d'une charge de courbure* $Q_\theta > 0$ *(de type lacunaire) si* $\tau_0 < \tau_{0cr}$

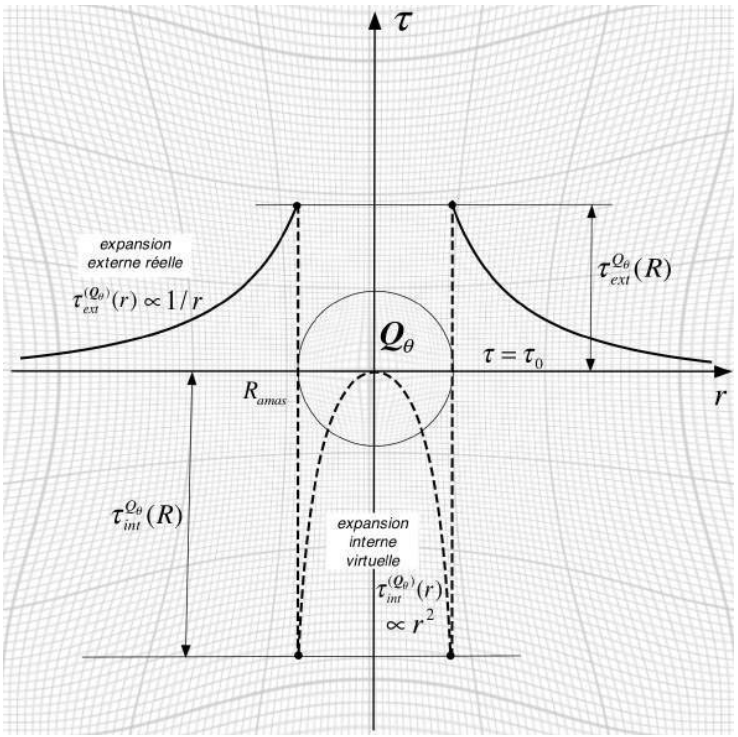


Figure 22.3b *- le champ d'expansion à l'intérieur et à l'extérieur d'une charge de courbure* $Q_\theta > 0$ *(de type lacunaire) si* $\tau_0 > \tau_{0cr}$ *ou d'une charge de courbure* $Q_\theta < 0$ *(de type interstitiel) si* $\tau_0 < \tau_{0cr}$

- si $K_2 / \left[K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right] < 0$, c'est-dire si $\tau_0 > \tau_{0cr}$, seules les singularités de nature interstitielle, avec $\boldsymbol{Q}_\theta < 0$, satisfont la conjecture 2 concernant la courbure par attraction des rayons d'onde au voisinage de la singularité, alors que les singularités de nature lacunaire, avec $\boldsymbol{Q}_\theta > 0$, repoussent les rayons d'onde.

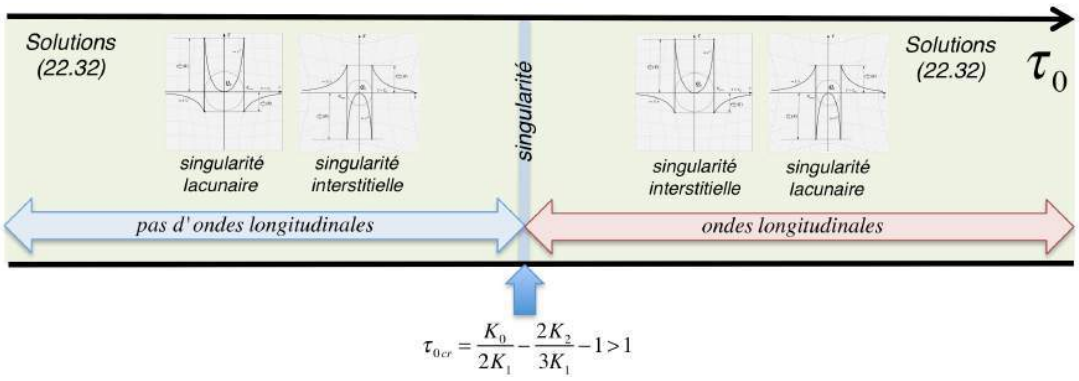


Figure 22.4 *- les domaines de solutions des perturbations d'expansion d'une singularité de courbure en fonction de* τ_0

La dépendance d'une singularité de courbure en l'expansion de fond du réseau

Les domaines de solutions de perturbations d'expansion associés à une singularité de courbure sont reportés de façon synoptique dans la figure 22.4.
On peut encore se demander si une pure singularité de courbure peut se comporter comme un trou noir. Pour ceci, il faut que la première condition *(15.3)* soit satisfaite, et donc, en utilisant la relation *(22.34)*, que

$$\left.\frac{\partial \tau_{ext}^{(Q_\theta)}(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad \Rightarrow \quad r_{cr} = \frac{K_2}{20\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2} R_{amas}^2 \boldsymbol{Q}_\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}_\theta < 0 \ (\tau_0 > \tau_{0cr}) \\ \boldsymbol{Q}_\theta > 0 \ (\tau_0 < \tau_{0cr}) \end{cases} \tag{22.42}$$

Quant à la deuxième condition *(15.3)*, elle implique que

$$r_{cr} > R_{amas} \quad \Rightarrow \quad \left|\boldsymbol{Q}_\theta\right| R_{amas} > \frac{20\pi\left|K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right| R_\infty^2}{K_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}_\theta < 0 \ (\tau_0 > \tau_{0cr}) \\ \boldsymbol{Q}_\theta > 0 \ (\tau_0 < \tau_{0cr}) \end{cases} \tag{22.43}$$

et donc que le module de la charge de courbure soit suffisamment élevé. Or, le numérateur du membre de droite de cette inégalité passe par zéro au voisinage de la singularité $\tau_0 = \tau_{0cr}$, de sorte qu'une singularité de courbure passe forcément par un stade de trou noir, pour $\tau_0 \leq \tau_{0cr}$ dans le cas des singularités de nature lacunaire et pour $\tau_0 \geq \tau_{0cr}$ dans le cas des singularités de nature interstitielle.

Discussion finale

Nous venons de calculer les champs de perturbation de l'expansion dus à une charge de cour-

bure globale $\boldsymbol{Q}_\theta$ d'une singularité topologique, ou d'un amas de singularités topologiques, en nous basant sur une approximation forte consistant à exprimer une *densité de charge de courbure moyenne* $\overline{\theta}^{amas}$ *homogène* au sein de la singularité. Cette approximation ne fournit qu'une *valeur virtuelle approchée* $\tau_{int}^{(Q_\theta)}(r)$ de l'expansion au sein de la singularité, qui ne serait exacte *que* si la densité de charge de courbure $\overline{\theta}^{amas}$ est effectivement homogène au sein de la singularité. Par contre, elle donne *une valeur correcte du champ de perturbation* $\tau_{ext}^{(Q_\theta)}(r)$ *externe (22.34)* d'une singularité de charge globale $\boldsymbol{Q}_\theta$, même si la distribution $\theta^{amas}(\vec{r})$ de la charge n'était pas du tout homogène au sein de cette singularité, preuve en est la valeur du champ externe des perturbations obtenu pour une boucle de dislocation coin, qui dépend très exactement du volume effectif $\pi R_{BV}^2\left(\vec{B}_{BC}\vec{\boldsymbol{n}}\right)$ de la boucle de dislocation coin!

22.3 – Singularité localisée de charge de rotation donnée

Imaginons maintenant l'existence au sein du réseau parfait d'une singularité localisée de volume $\boldsymbol{V}_{amas}$ et de charge globale de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$, composées d'un amas de charges élémentaires de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV(i)}$ ou contenant une densité $\lambda(\vec{r})$ de charges de rotation.
Une telle singularité possèdera donc un champ externe de perturbations d'expansion lié à l'énergie élastique de la singularité de rotation dû au champ de rotation interne à la singularité , et qui s'écrira, d'après *(22.17)*

$$\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,int)})}(r) \cong -\frac{1}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2}\frac{E_{dist(rot\,int)}^{amas}}{r} \qquad (22.44)$$

Ce champ de perturbation ne dépend donc pas du volume $\boldsymbol{V}_{amas}$ ni du rayon R_{amas} de la singularité de rotation.
Mais à ce champ externe de perturbation de l'expansion dû à l'énergie interne de rotation de la singularité doit encore s'ajouter un champ externe de perturbation de l'expansion qui est généré par le champ de rotation externe de la singularité, et qui apparaît suite à l'énergie de distorsion associée au champ de rotation $\vec{\omega}_{ext}^{\,él}$. Le champ de rotation externe de la singularité est donnée par la relation *(19.66)*, et il ne dépend pas non plus du volume $\boldsymbol{V}_{amas}$ ni du rayon R_{amas} de la singularité de rotation

$$\vec{\omega}_{ext}^{\,él} = \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (22.45)$$

Cette perturbation externe $\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\,él})}(r)$ du champ d'expansion volumique se déduit à l'aide de l'équation *(18.14),* dans laquelle la densité d'énergie est due à l'énergie élastique externe du champ de rotation de la singularité, et dans laquelle τ^{ext} et τ^{ch} sont nulles

$$K_1\left(\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\,él})}(r)\right)^2 + \left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\,él})}(r) + 2\left(K_2+K_3\right)\left(\vec{\omega}_{ext}^{\,él}(r)\right)^2 = 0 \qquad (22.46)$$

La condition d'existence d'un champ de perturbation statique de l'expansion

La solution $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r)$ de cette équation du deuxième degré est alors la suivante

$$\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\,él})}(r) = \frac{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)}{2K_1}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{2\pi^2\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)^2}\frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{r^4}}\right) \qquad (22.47)$$

En fait, une telle solution statique n'existe que si l'argument de la racine est positif, ce qui fournit une condition d'existence sur la valeur de la charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$, si on prend $1/r^4$ à sa valeur maximum, c'est-à-dire en $r = R_{amas}$

Hypothèse 1: $$\left(\frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{R_{amas}^2} \right)^2 \leq \frac{2\pi^2 \left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0 \right)^2}{K_1 \left(K_2 + K_3 \right)} \qquad (22.48)$$

Avec les conjectures 0 à 6 du *réseau cosmologique parfait*, cette condition ne peut jamais être satisfaite dans un domaine d'expansion volumique τ_0 centré sur $\tau_0 = \tau_{0cr}$, et couvrant la plage d'expansion suivante

$$\tau_{0cr} - \sqrt{\frac{K_2 + K_3}{8\pi^2 K_1}} \frac{\left|\boldsymbol{Q}_\lambda\right|}{R_{amas}^2} \leq \tau_0 \leq \tau_{0cr} + \sqrt{\frac{K_2 + K_3}{8\pi^2 K_1}} \frac{\left|\boldsymbol{Q}_\lambda\right|}{R_{amas}^2} \qquad (22.49)$$

Dans ce domaine, il ne peut exister qu'une *solution dynamique de l'équation de Newton (18.12) pour la perturbation d'expansion externe associée à la singularité de rotation*, qui permet de passer de la solution statique du *domaine* $\tau_0 < \tau_{0cr}$ à la solution statique dans le *domaine* $\tau_0 > \tau_{0cr}$ et vice-versa.

Un cas plus simple de champs de perturbations statiques de l'expansion

Plutôt que de rechercher la solution exacte du champ des perturbations déduite de l'équation *(22.43)* dans le cas où la condition d'existence *(22.44)* est satisfaite, on peut émettre une condition un peu plus forte que l'hypothèse 1, à savoir

Hypothèse 2: $$\tau_0 << \tau_{0cr} - \sqrt{\frac{K_2 + K_3}{8\pi^2 K_1}} \frac{\left|\boldsymbol{Q}_\lambda\right|}{R_{amas}^2} \quad \text{ou} \quad \tau_0 >> \tau_{0cr} + \sqrt{\frac{K_2 + K_3}{8\pi^2 K_1}} \frac{\left|\boldsymbol{Q}_\lambda\right|}{R_{amas}^2} \qquad (22.50)$$

Cette condition permet alors de développer au premier ordre la racine dans l'expression *(22.47)*, de sorte que le champ statique satisfait approximativement la relation suivante

$$\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l})}(r) \cong -\frac{2\left(K_2 + K_3\right)\left(\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l}(r)\right)^2}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0} \qquad (22.51)$$

En introduisant la valeur *(22.45)* du champ de rotation à l'extérieur de la singularité, on obtient le champ $\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l})}(r)$ des perturbations d'expansion dues au champ de rotation externe de $\boldsymbol{Q}_\lambda$

$$\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l})}(r) \cong -\frac{\left(K_2 + K_3\right)}{8\pi^2 \left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0 \right)} \frac{{\boldsymbol{Q}_\lambda}^2}{r^4} \qquad (22.52)$$

Condition du champ moyen nul des perturbations d'expansion dues au champ de rotation externe de la singularité

Comme la valeur moyenne du champ des perturbations doit être nulle pour que le champ de fond soit égal à τ_0, le champ externe $\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\acute{e}l})}(r)$ doit encore comporter un champ additionnel de correction $\tau_{ext}^{cor}(r)$ assurant cette conservation du nombre de sites de réseau, qui doit satisfaire le laplacien $\Delta\left(\tau_{ext}^{cor}(r)\right) = 0$, donc un champ de symétrie sphérique tendant vers une valeur nulle pour $r \to R_\infty$, et s'écrivant par conséquent $\tau_{ext}^{cor}(r) = A/r$. Le champ de perturbation de l'expansion volumique dus à la présence du champ de rotation externe de la charge de rotation

s'écrit donc

$$\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r) \cong \tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{\,el})}(r) + \frac{A}{r} = -\frac{\left(K_2+K_3\right)}{8\pi^2\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)}\frac{\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{r^4} + \frac{A}{r} \qquad (22.53)$$

La constante d'intégration A est déterminée par la même condition que précédemment, à savoir que la valeur moyenne de l'expansion doit être égale à τ_0

$$\tau_0 = \frac{3}{4\pi R_\infty^3}\left[\int_{R_{amas}}^{R_\infty}\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r)\right)4\pi r^2\,dr\right] \Rightarrow \int_{R_{amas}}^{R_\infty}\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r)r^2\,dr = 0 \qquad (22.54)$$

ce qui conduit à la solution suivante pour la constante A

$$A = \frac{2\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{8\pi^2\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)R_\infty^2}\frac{1}{R_{amas}} \qquad (22.55)$$

Le champ externe des perturbations d'expansion dû au champ externe de rotation de la singularité s'écrit donc

$$\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r) \cong \frac{\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{8\pi^2\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)}\left[\frac{1}{r^4} - \frac{2}{R_\infty^2 R_{amas}}\frac{1}{r}\right] \qquad (22.56)$$

Le champ externe total des perturbations d'expansion d'une singularité de rotation

Le champ externe total de perturbations d'expansion dû à une singularité de charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$ s'écrit donc, sous la condition *(22.50)*

$$\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}(r) = \tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,int)})}(r) + \tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r)$$
$$\cong \frac{1}{2\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)}\left[\frac{\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{4\pi r^4} - \frac{1}{R_\infty^2}\left(E_{dist(rot\,int)}^{amas} + \frac{2\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{4\pi R_{amas}}\right)\frac{1}{r}\right] \qquad (22.57)$$

D'après cette expression, le champ externe total $\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}(r)$ doit changer de signe à une certaine distance critique r_{cr} de la singularité valant

$$r_{cr} = \sqrt[3]{\frac{R_\infty^2 R_{amas}}{2\left(1+\dfrac{2\pi E_{dist(rot\,int)}^{amas} R_{amas}}{\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}\right)}} > R_{amas} \qquad (22.58)$$

qui ne peut être que supérieur au rayon R_{amas} de la singularité.

On constate donc que le champ externe total des perturbations d'expansion d'une singularité de rotation présente une composante de longue portée en $1/r$ associée à l'énergie élastique interne et externe de rotation de la singularité et une composante de courte portée en $1/r^4$ associée directement à l'énergie du champ de rotation externe de la singularité. On a reporté très schématiquement la superposition de ces deux champs dans les figures 22.6a et 22.6b, respectivement dans les cas où $\tau_0 < \tau_{0cr}$ et $\tau_0 > \tau_{0cr}$.

Le cas particulier de la singularité sphérique de charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$

Dans le cas de la singularité de rotation sphérique décrite à la section 19.5, on déduit $E_{dist(rot\,int)}^{amas}$ de la relation *(19.70)*. Il vient

$$\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r) \cong \frac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} \frac{3\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{5\pi R_{amas}} \left[\frac{5R_{amas}}{12r^4} - \frac{1}{R_\infty^2}\frac{1}{r}\right] \qquad (22.59)$$

On constate alors que le champ externe total des perturbations de l'expansion dépend en fait de l'énergie $E_{dist}^{(Q_\lambda)}$ de distorsion totale *(19.71)* de l'amas de rotation, de sorte que

$$\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r) \cong \frac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} E_{dist}^{(Q_\lambda)} \left[\frac{5R_{amas}}{12}\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R_\infty^2}\frac{1}{r}\right] \qquad (22.60)$$

et que le rayon critique où s'annule ce champ est donné par

$$r_{cr} = \sqrt[3]{\frac{5}{12}R_{amas}R_\infty^2} > R_{amas} \qquad (22.61)$$

Le cas particulier de la boucle de désinclinaison vis

Dans le cas de la boucle de désinclinaison vis décrite à la section 19.7, l'énergie $E_{dist\,(rot\,int)}^{amas}$ n'est rien d'autre que l'énergie $E_{dist\,tore}^{BV}$ donnée par la relation *(19.88)* et, d'autre part, la charge de rotation vaut $\boldsymbol{Q}_\lambda = \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = -\pi R_{BV}\vec{\tilde{B}}_{BV}\vec{\boldsymbol{t}}$, donnée par la relation *(19.77).* Il vient

$$\tau_{ext}^{(q_{\lambda BV})}(r) \cong \frac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} \frac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV}R_{BV}\vec{\tilde{B}}_{BV}^2 \left[\frac{R_{BV}}{2\pi\zeta_{BV}r^4} - \frac{2\pi+1/\zeta_{BV}}{2\pi R_\infty^2}\frac{1}{r}\right] \qquad (22.62)$$

On constate alors que le champ externe total des perturbations de l'expansion dépend en fait de l'énergie $E_{dist\,tore}^{BV}$ de distorsion située dans le tore entourant la boucle *(19.71)*, de sorte que

$$\tau_{ext}^{(q_{\lambda BV}\,total)}(r) \cong \frac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} E_{dist\,tore}^{BV} \left[\frac{R_{BV}}{2\pi\zeta_{BV}r^4} - \frac{1}{R_\infty^2}\frac{1}{r}\right] \qquad (22.63)$$

et que le rayon critique où s'annule ce champ est donné par

$$r_{cr} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi\zeta_{BV}}R_{BV}R_\infty^2} > R_{BV} \qquad (22.64)$$

Dans les deux cas (singularité sphérique de rotation ou boucle de désinclinaison vis), on constate que cette distance critique est nettement supérieure au rayon de la singularité, de sorte *qu'il existe toujours un rayon critique où le champ d'expansion s'inverse*.

On constate par conséquent que les perturbations du champ d'expansion à l'interface de la singularité sont positives dans le domaine d'expansion $\tau_0 < \tau_{0cr}$ (fig. 22.6a) et négatives dans le domaine d'expansion $\tau_0 > \tau_{0cr}$ (fig. 22.6b).

D'autre part, comme les énergies de distorsion $E_{dist}^{(Q_\lambda)}$ et $E_{dist\,tore}^{BV}$ sont toujours positives, il n'existe pas de dissymétrie au niveau des champs d'expansion entre charges et anti-charges de rotation. Par contre, il apparaît bien une inversion de ces champs lorsqu'on passe du domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$ au domaine $\tau_0 > \tau_{0cr}$.

Le champ interne des perturbations

Au sein même de la singularité, il existe le champ interne virtuel moyen d'expansion $\overline{\tau}_{int}^{(Q_\lambda)}$ donné par les relations *(22.4)* ou *(22.14)*

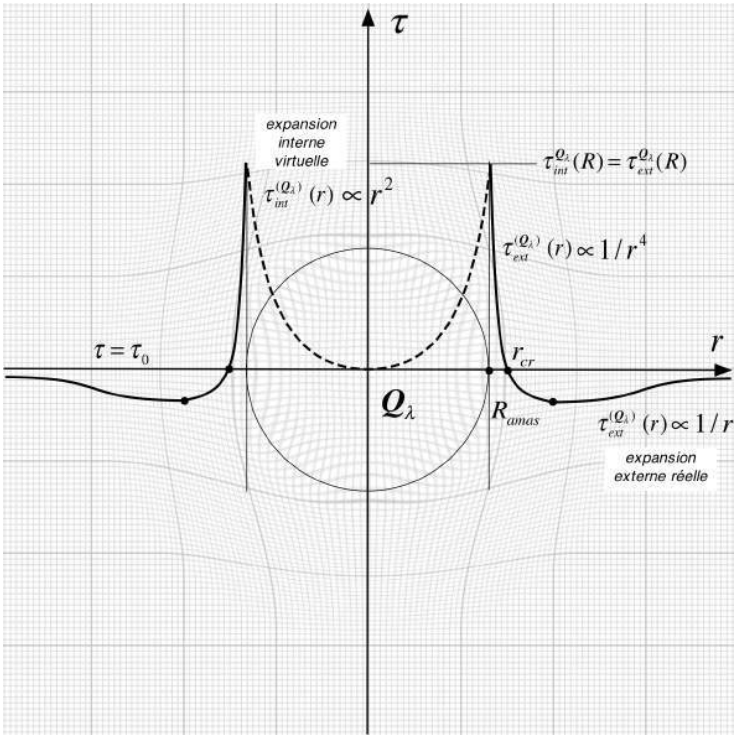


Figure 22.6a *- les champs d'expansion à l'intérieur* $\tau_{int}^{(Q_\lambda)}$ *et à l'extérieur* $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}$ *de la charge de rotation* Q_λ *dans le cas où* $\tau_0 < \tau_{0cr}$

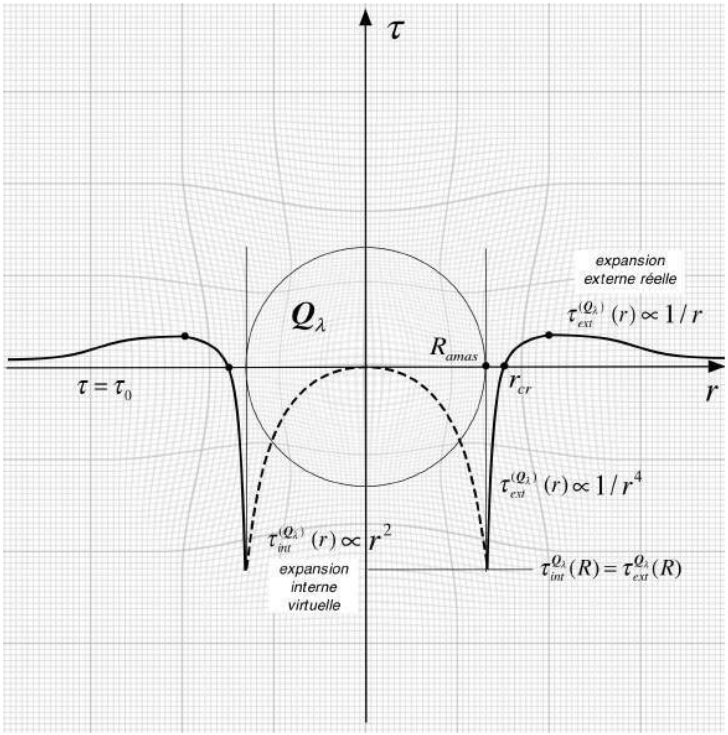


Figure 22.6b *- les champs d'expansion à l'intérieur* $\tau_{int}^{(Q_\lambda)}$ *et à l'extérieur* $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}$ *de la charge de rotation* Q_λ *dans le cas où* $\tau_0 > \tau_{0cr}$

$$\overline{\tau}_{int}^{(Q_\lambda)} \cong \frac{1}{K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)} \frac{E_{dist(rot\,int)}^{amas}}{V_{amas}} \qquad (22.65)$$

qui est dû à l'énergie élastique $E_{dist(rot\,int)}^{amas}$ de rotation interne de la singularité, et qui est compensé par le champ externe $\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,int)})}(r)$ des perturbations d'expansion donné par *(22.44).* Concernant le champ externe $\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{él})}(r)$ en $1/r^4$ *(22.48)*, il est quant à lui compensé par un champ externe en $1/r$, qui est inclu dans le champ $\tau_{ext}^{(E_{dist(rot\,ext)})}(r)$ donné par *(22.56).*

Le cas particulier d'une charge sphérique homogène de rotation

Dans le cas particulier d'une charge sphérique homogène de rotation, la condition *(22.50)* permet de déduire le champ statique interne $\tau_{int}^{(Q_\lambda)}(r)$ exacte par la relation suivante

$$\tau_{int}^{(Q_\lambda)}(r) \cong -\frac{2(K_2+K_3)\left(\vec{\omega}_{int}^{él}(r)\right)^2}{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0} \qquad (22.66)$$

En utilisant l'expression *(19.67)* du champ de rotation interne

$$\vec{\omega}_{int}^{él}(r) = \frac{Q_\lambda}{4\pi R_{amas}^3}\vec{r} \qquad (22.67)$$

on obtient le champ interne de perturbations de l'expansion

$$\tau_{int}^{(Q_\lambda)}(r) \cong -\frac{(K_2+K_3)}{8\pi^2\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0\right)} \frac{Q_\lambda^2}{R_{amas}^6} r^2 \qquad (22.68)$$

Ce champ interne de perturbations de l'expansion au sein d'une charge sphérique de rotation est reporté en pointillé dans les figures 22.6a et 22.6b. A la surface de la charge, on constate que ce champ interne $\tau_{int}^{(E_{dist(rot\,int)}^{amas})}(r)$ et le champ externe total $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r)$ ont quasiment la même valeur, puisque

$$\begin{cases} \tau_{int}^{(Q_\lambda)}(R_{amas}) \cong \dfrac{(K_2+K_3)}{8\pi^2\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} \dfrac{Q_\lambda^2}{R_{amas}^4} \\ \tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(R_{amas}) \cong \dfrac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} \dfrac{3(K_2+K_3)Q_\lambda^{\,2}}{5\pi R_{amas}^4}\left[\dfrac{5}{12} - \dfrac{R_{amas}^2}{R_\infty^2}\right] \\ \qquad\qquad \cong \dfrac{(K_2+K_3)}{8\pi^2\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)} \dfrac{Q_\lambda^{\,2}}{R_{amas}^4} \end{cases} \qquad (22.69)$$

L'énergie du champ des perturbations d'expansion d'une singularité de rotation

L'énergie du champ des perturbations d'expansion associé à l'énergie élastique interne de rotation de la singularité se déduit de *(22.14)* et *(22.19)*. Elle s'écrit

$$E_{grav}^{(E_{dist(rot\,int)})} \cong \frac{K_1}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} \frac{\left(E_{dist(rot\,int)}^{amas}\right)^2}{V_{amas}} \qquad (22.70)$$

L'énergie du champ des perturbations d'expansion associé à l'énergie élastique externe de rotation de la singularité s'obtient de la façon suivante

$$E_{grav}^{(E_{dist(rot\,ext)})} \cong \iiint_{V_{externe}} K_1 \tau^2 \, dV = K_1 \int_{R_{amas}}^{R_\infty} \left(\tau_{ext}^{(\vec{\omega}_{ext}^{el})}(r)\right)^2 4\pi r^2 \, dr \qquad (22.71)$$

Le calcul de cette expression fournit la valeur

$$E_{grav}^{(E_{dist(rot\,ext)})} \cong \frac{K_1}{\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)^2} \frac{\left(K_2+K_3\right)^2}{80\pi^3} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda{}^4}{R_{amas}^5} \qquad (22.72)$$

L'énergie gravitationnelle totale associée à une singularité de rotation vaut donc

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} = E_{grav}^{(E_{dist(rot\,int)})} + E_{grav}^{(E_{dist(rot\,ext)})} \cong \frac{K_1}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} \left[\frac{\left(E_{dist(rot\,int)}^{amas}\right)^2}{\boldsymbol{V}_{amas}} + \frac{\left(K_2+K_3\right)^2}{80\pi^3} \frac{\boldsymbol{Q}_\lambda{}^4}{R_{amas}^5} \right] \qquad (22.73)$$

Le cas particulier de l'énergie gravitationnelle d'une singularité sphérique de rotation

Dans le cas particulier d'une singularité de rotation sphérique, l'énergie $E_{dist(rot\,int)}^{amas}$ est donnée par *(19.70)*, de sorte que son énergie gravitationnelle totale peut s'écrire

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} \cong \frac{K_1}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} \frac{\left(K_2+K_3\right)^2 \boldsymbol{Q}_\lambda{}^4}{50\pi^3 R_{amas}^5} \qquad (22.74)$$

On peut alors comparer cette énergie gravitationnelle avec l'énergie élastique totale de distorsion de la singularité sphérique de rotation, donnée par *(19.71)*, et il vient

$$\frac{E_{grav}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}}{E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}} \cong \frac{K_1}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} \frac{2}{9} \frac{E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}}{\boldsymbol{V}_{amas}} \cong \frac{K_1}{\left(K_0\right)^2} \frac{2}{9} \frac{E_{dist}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}}{\boldsymbol{V}_{amas}} \qquad \left(\tau_0 << \tau_{0cr}\right) \qquad (22.75)$$

Le rapport K_1 / K_0^2 étant extrêmement petit, l'énergie gravitationnelle de la singularité de rotation est assurément beaucoup plus petite que l'énergie élastique de distorsion de celle-ci dans le domaine $\tau_0 << \tau_{0cr}$.

La dépendance d'une singularité de rotation en l'expansion de fond du réseau

Nous avons vu que le champ $\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}(r) \propto 1/r^4$ des perturbations d'expansion dû au champ de rotation externe de la singularité ne peut être que dynamique dans un petit domaine *(22.49)* centré autour de τ_{0cr}, et qu'il est possible de trouver des solutions statiques simples dans les domaines donnés par *(22.50)*. On peut par conséquent reporter schématiquement ces comportements de l'expansion $\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}(r) \propto 1/r^4$ d'une singularité de rotation comme on l'a fait à la figure 22.7.

Quant au champ des perturbations d'expansion $\tau_{ext}^{(E_{rotation})}(r) \propto 1/r$ dû à l'énergie interne de rotation de la singularité, il ne peut être que dynamique dans un petit domaine déjà représenté à la figure 22.2.

Comme le champ d'expansion dans le voisinage immédiat d'une telle singularité ne peut être négatif que si $\tau_0 > \tau_{0cr}$, l'existence d'un effet trou noir ne peut apparaître que dans ce domaine. Pour déterminer les conditions d'apparition d'un tel trou noir, il faut appliquer les conditions *(15.3)* au champ $\tau_{ext}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)}(r) \propto 1/r^4$ donné par *(22.53)*. La première condition donne

$$\left.\frac{\partial \tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad \Rightarrow \quad r_{cr}^4 = \frac{\left(K_2+K_3\right)Q_\lambda^2}{4\pi^2\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)} \tag{22.76}$$

et elle permet d'obtenir l'expression suivante du rayon critique du trou noir

$$\left(\frac{r_{cr}}{R_{amas}}\right)^4 \cong \frac{\left(K_2+K_3\right)}{4\pi^2\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)}\left(\frac{Q_\lambda}{R_{amas}^2}\right)^2 \qquad (\tau_0 > \tau_{0cr}) \tag{22.77}$$

La seconde condition implique que

$$r_{cr} > R_{amas} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_\lambda^2}{R_{amas}^4} > \frac{4\pi^2\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)}{\left(K_2+K_3\right)} \qquad (\tau_0 > \tau_{0cr}) \tag{22.78}$$

Mais il faut aussi que cette condition soit satisfaite au-delà du domaine des solutions dynamiques, ce qui n'interviendra que si la condition suivante est satisfaite

$$\frac{Q_\lambda^2}{R_{amas}^4} > \frac{8\pi^2 K_1}{\left(K_2+K_3\right)} \qquad (\tau_0 > \tau_{0cr}) \tag{22.79}$$

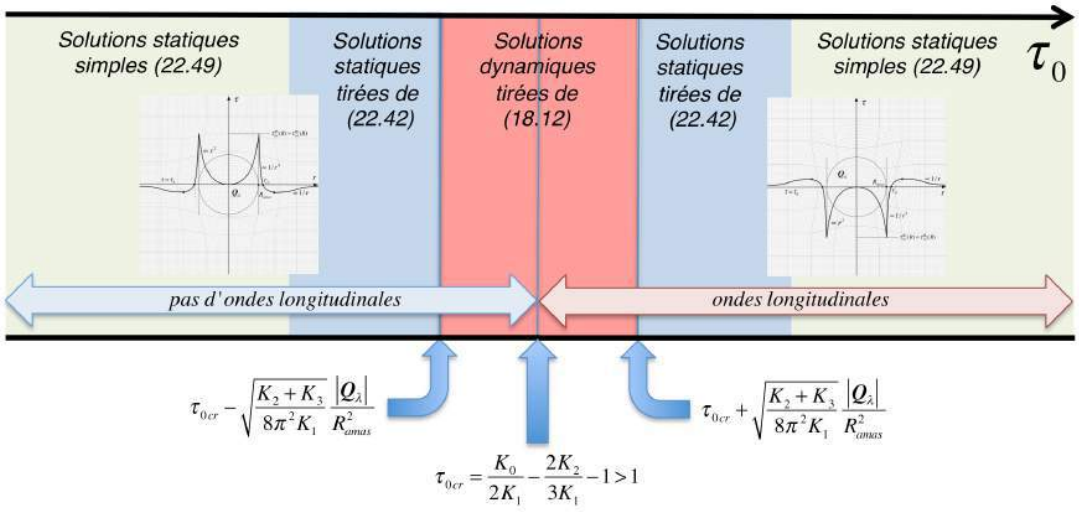


Figure 22.7 *- les domaines de solutions des perturbations d'expansion* $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r) \propto 1/r^4$ *d'une singularité de rotation en fonction de* τ_0

Discussion finale

Nous venons de calculer les champs de perturbation de l'expansion dus à une charge de rotation globale Q_λ d'une singularité topologique, ou d'un amas de singularités topologiques, ou d'une boucle de désinclinaison vis. On constate qu'il existe alors deux champs externes de perturbations de l'expansion *(22.53)* dus à une telle charge de rotation, le champ $\tau_{ext}^{(E_{rotation})}(r)$ dû à l'énergie élastique interne de la charge, et le champ $\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r)$ associé au champ de rotation externe de la charge. Et ces deux champs externes sont complètement indépendants du volume ou du rayon de la singularité topologique de charge Q_λ.

22.4 – Lacunes macroscopiques localisées au sein du réseau

Imaginons qu'un amas de singularités de type lacunaire, c'est-à-dire de singularités portant des charges de courbure positives, comme des boucles de dislocation prismatiques de type lacunaire par exemple, s'effondre sur lui-même (sous l'effet par exemple de «forces attractives gravitationnelles», que nous décrirons plus tard). Si l'amas initial est neutre vis-à-vis des charges de rotation, les singularités individuelles de l'amas se combinent, en perdant leur propre identité (de boucles de dislocation ou de désinclinaison) pour ne former qu'un seul trou macroscopique au sein du réseau, comme une sorte de *lacune macroscopique* formée de N_L lacunes individuelles (fig. 22.8, a, b et c). Ceci signifie qu'il apparaît localement un manque de N_L sites de réseau. Le rayon de cette lacune macroscopique, supposée sphérique, vaut alors, dans le cas imaginaire où le réseau présentait une expansion homogène valant $\tau = 0$

$$R_{L0} = \sqrt[3]{3N_L / (4\pi n_0)} \qquad (22.80)$$

La condition d'équilibre du champ d'expansion d'une lacune macroscopique

Au sein du réseau réel, la présence de cette lacune macroscopique va générer un champ d'expansion volumique sphérique $\tau_{ext}^{(L)}(r)$ à définir. A la surface de la singularité, le champ d'expansion est égal à la somme du champ $\tau_{ext}^{(L)}(R_L)$ généré par la singularité, du champ d'expansion de fond τ_0 du réseau et d'un champ extérieur d'expansion $\tau^{externe}(R_L)$ dû aux autres singularités situées dans le voisinage de la lacune macroscopique. A la surface de la singularité, le champ total doit s'arranger pour que la pression à l'interface du trou soit nulle (fig. 22.8, a, b et c). La *condition de pression nulle à l'interface* s'écrit alors, en utilisant l'équation d'état *(13.8)*

$$\begin{aligned} p(r = R_L) = K_0 - 2K_1\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) + K_0\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) \\ - K_1\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right)^2 = 0 \end{aligned} \qquad (22.81)$$

Cette équation du deuxième degré possède deux solutions pour $\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right)$

$$\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) = \frac{\left(K_0 - 2K_1\right) \pm \sqrt{K_0^2 + 4K_1^2}}{2K_1} \qquad (22.82)$$

Avec la conjecture 5 du *réseau cosmologique parfait*, à savoir que $K_0 >> K_1$, on obtient alors

$$\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) \cong \frac{\left(K_0 - 2K_1\right) \pm K_0}{2K_1} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{K_0 - K_1}{K_1} \cong \dfrac{K_0}{K_1} >> 1 \end{cases} \qquad (22.83)$$

La deuxième solution, à savoir $K_0 / K_1 >> 1$, n'a pas de sens physique puisqu'elle représente un gigantesque trou dans le réseau. Par contre, la première solution est très sensée puisqu'elle peut être obtenue directement de l'expression *(22.81)* en admettant la conjecture 5. En effet

$$p(r = R_L) \cong K_0 + K_0\left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(L)}(R_L) + \tau^{externe}(R_L)\right) = -1 \qquad (22.84)$$

Le champ d'expansion $\tau_{ext}^{(L)}(r)$ de la lacune macroscopique doit satisfaire $\Delta\tau_{ext}^{(L)}(r) \cong 0$, donc

$$\tau_{ext}^{(L)}(r) = A / r \qquad (22.85)$$

Avec la condition d'équilibre de la pression à l'interface, on obtient alors le champ externe

$$\tau_{ext}^{(L)}(r) \cong -\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)\frac{R_L}{r} \qquad (22.86)$$

Quant au *rayon réel* R_L de la lacune macroscopique, il vaut alors

$$R_L = R_{L0}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0+\tau_{ext}^{(L)}(R_L)+\tau^{externe}(R_L)}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3N_L}{4\pi n_0}}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3N_L}{4\pi n_0\,\mathrm{e}}} \qquad (22.87)$$

et on constate donc que le rayon réel R_L de la lacune macroscopique est une grandeur qui ne dépend que du nombre N_L de sites de réseau manquant.
On peut calculer le champ d'expansion moyen en présence de cette singularité macroscopique

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R_\infty^3}\int_{R_L}^{R_\infty}\left(\tau_0+\tau_{ext}^{(L)}(r)\right)4\pi r^2\,dr = \tau_0 - \left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)\frac{3R_L}{R_\infty^3}\left(\frac{R_\infty^2}{2}-\frac{R_L^2}{2}\right) \cong \tau_0 \qquad (22.88)$$

et on retrouve bien un champ moyen égal à l'expansion de fond τ_0 du réseau!

L'énergie d'une lacune macroscopique

L'énergie du champ d'expansion total s'écrit

$$E_{dist}^{(\tau)} = K_1\int_{R_L}^{R_\infty}\left(\tau_0+\tau_{ext}^{(L)}(r)\right)^2 4\pi r^2\,dr - K_0\int_{R_L}^{R_\infty}\left(\tau_0+\tau_{ext}^{(L)}(r)\right)4\pi r^2\,dr \qquad (22.89)$$

Si on en retire l'énergie due exclusivement au champ τ_0, on obtient l'énergie «gravitationnelle» de la perturbation du champ d'expansion associé à la présence de la lacune macroscopique

$$E_{grav}^{(L)} = 4\pi K_1\int_{R_L}^{R_\infty}\left(\tau_{ext}^{(L)}(r)\right)^2 r^2\,dr + 8\pi K_1\tau_0\int_{R_L}^{R_\infty}\tau_{ext}^{(L)}(r)r^2\,dr - 4\pi K_0\int_{R_L}^{R_\infty}\tau_{ext}^{(L)}(r)r^2\,dr \qquad (22.90)$$

En effectuant les intégrations avec la valeur *(22.86)* de $\tau_{ext}(r)$, on obtient

$$E_{grav}^{(L)} = \begin{bmatrix} -2\pi\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R^3 - 4\pi K_1\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)^2 R_L^3 \\ +4\pi K_1\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)^2 R_\infty R_L^2 + 2\pi\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R_\infty^2 R_L \end{bmatrix} \qquad (22.91)$$

qui devient, en ne conservant que le terme dominant

$$E_{grav}^{(L)} \cong 2\pi\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R_\infty^2 R_L \cong \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R_\infty^2 \qquad (22.92)$$

On constate que l'énergie de formation de la lacune macroscopique ne dépend que de l'expansion de fond τ_0 du réseau et s'annule pour deux valeurs de celle-ci, à savoir

$$E_{grav}^{(L)} \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_0 \to -\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right) \quad et \quad \tau_0 \to \frac{K_0}{2K_1} \qquad (22.93)$$

Entre ces deux valeurs, à savoir dans l'intervalle $-\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right) < \tau_0 < K_0 / 2K_1$, l'énergie de formation de la lacune macroscopique est positive, alors qu'elle devient négative en-dehors de cet intervalle.

D'autre part, à l'intérieur de l'intervalle $-\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right)<\tau_0<K_0/2K_1$, l'énergie de formation de deux lacunes macroscopiques de N_L sites est plus élevée que l'énergie de formation d'une seule lacune macroscopique de $2N_L$ sites puisque

$$E^{(L)}_{grav}\Big|_{2N_L}\cong\frac{1}{\sqrt[3]{4}}2E^{(L)}_{grav}\Big|_{N_L}<2E^{(L)}_{grav}\Big|_{N_L}\quad\Leftrightarrow\quad-\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right)<\tau_0<K_0/2K_1 \qquad (22.94)$$

Deux lacunes macroscopiques auront donc un avantage énergétique à fusionner lorsque le champ d'expansion de fond se trouve dans l'intervalle $-\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right)<\tau_0<K_0/2K_1$.

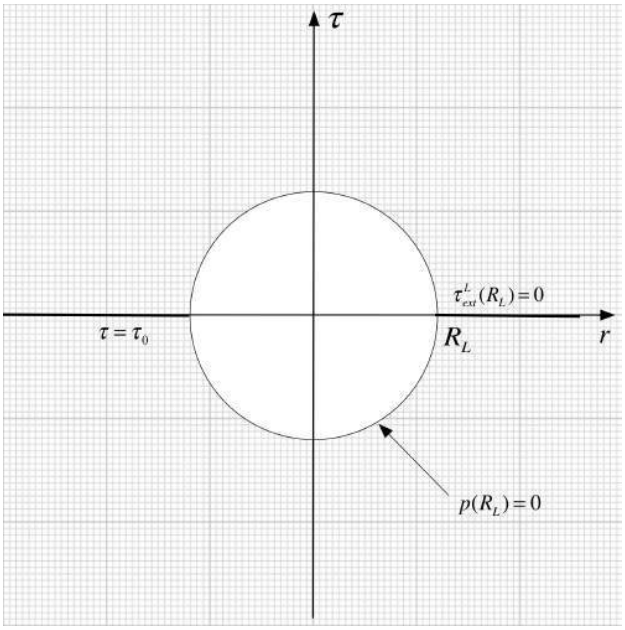


Figure 22.8a *- le champ d'expansion $\tau^{(L)}_{ext}(r)$ nul d'une lacune macroscopique d'environ 10'000 sites de réseau dans le cas où $\tau_0=-\left(1+\tau^{ext}(R_L)\right)$*

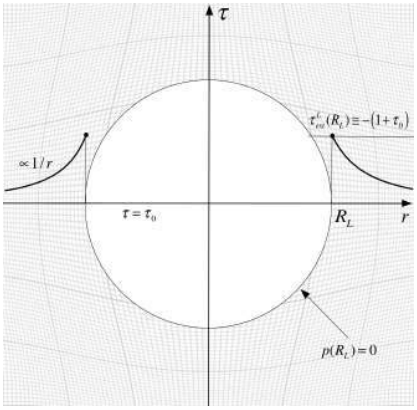


Figure 22.8b *- le champ d'expansion de la même lacune macroscopique d'environ 10'000 sites de réseau dans le cas où $\tau_0<-\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right)$, représentée à la même échelle que la lacune de la figure 22.8a*

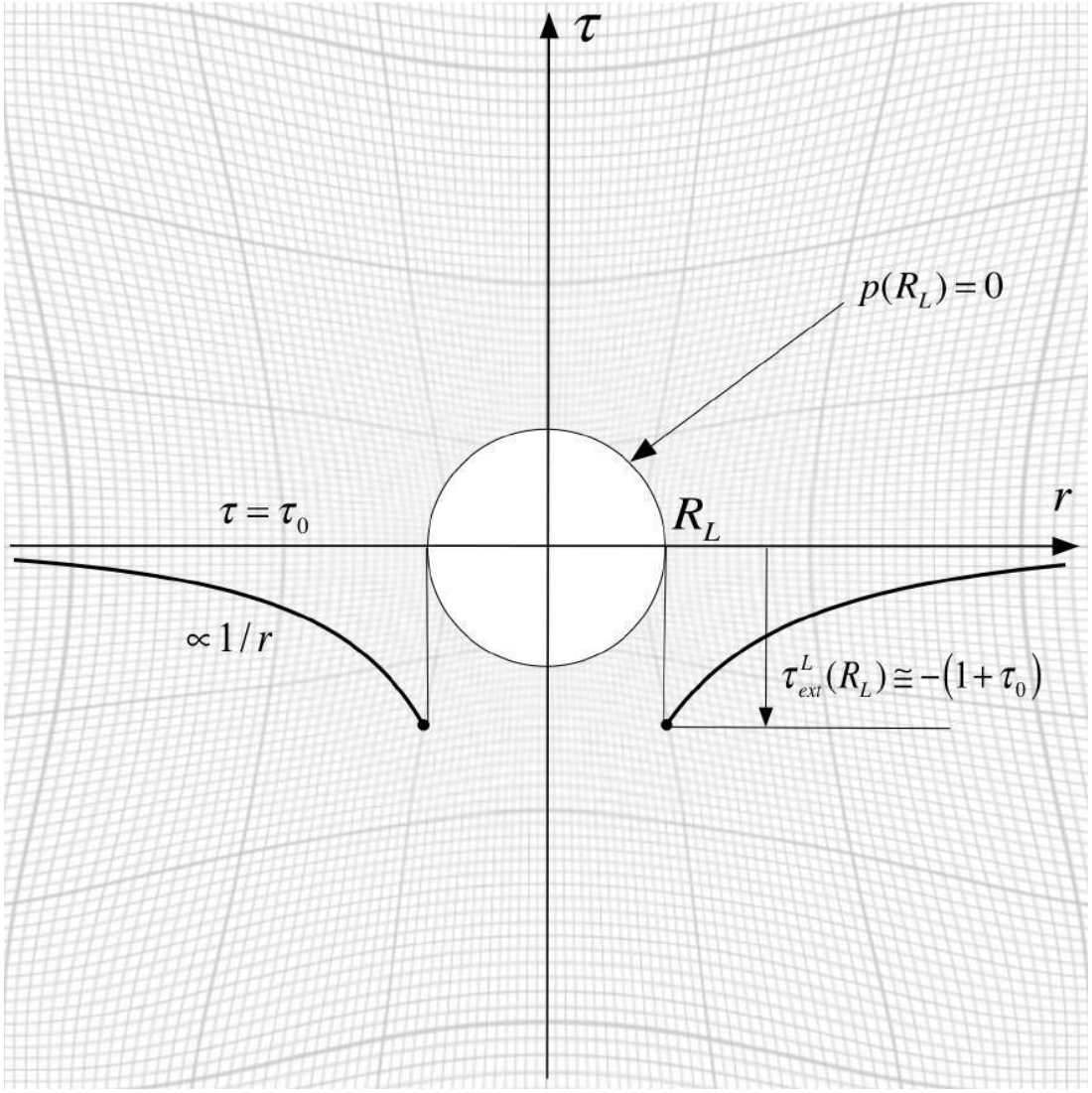


Figure 22.8c *- le champ d'expansion de la même lacune macroscopique d'environ 10'000 sites de réseau dans le cas où* $\tau_0 > -\left(1+\tau^{externe}(R_L)\right)$*, représentée à la même échelle que la lacune de la figure 22.8a*

Quand une lacune macroscopique devient un véritable trou noir!

En présence d'une lacune macroscopique, la première condition *(15.3)* pour l'apparition d'un trou noir implique que

$$\left.\frac{\partial\tau^{(L)}_{ext}(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad\Rightarrow\quad r_{cr} = \frac{1}{2}\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R_L \qquad (22.95)$$

et la deuxième condition *(15.3)* que

$$r_{cr} > R_L \quad\Rightarrow\quad \tau_0 > 1-\tau^{externe}(R_L) \qquad (22.96)$$

On en déduit qu'une lacune macroscopique, quelle que soit sa dimension et son énergie, *devient nécessairement un trou noir dès que l'expansion volumique de fond* τ_0 *dépasse la valeur de* $1-\tau^{externe}(R_L)$. Cette conclusion est extrêmement intéressante dans la mesure où on a là la singularité topologique macroscopique stable qu'on peut considérer comme *le véritable trou*

noir, analogue du trou noir de la gravitation générale, lorsque $\tau_0 > 1 - \tau^{externe}(R_L)$ (fig. 22.8c). Et cette singularité topologique lacunaire se comporte comme un *trou blanc* qui repousse les rayons d'onde lorsque la condition $\tau_0 < -\left(1 + \tau^{externe}(R_L)\right)$ est satisfaite (fig. 22.8b).

22.5 – Interstitiels macroscopiques localisés au sein du réseau

Imaginons maintenant qu'un amas de singularités de type interstitiel, c'est-à-dire de singularités portant des charges de courbure négatives, comme des boucles de dislocation prismatiques de type interstitiel par exemple, s'effondre sur lui-même sous l'effet des forces attractives «gravitationnelles» décrites au chapitre précédent. Si l'amas initial est neutre vis-à-vis des charges de rotation, les singularités individuelles de l'amas se combinent, en perdant leur propre identité (de boucles de dislocation ou de désinclinaison) pour ne former qu'un seul morceau de réseau local macroscopique encastré au sein du réseau, et formé de N_I sites (fig. 22.9).
Ceci signifie qu'il apparaît localement un excès de N_I sites de réseau formant un *interstitiel macroscopique*. Le rayon de cet encastrement macroscopique, supposé sphérique, vaut alors, dans le cas imaginaire où $\tau = 0$

$$R_{I0} = \sqrt[3]{3N_I / (4\pi n_0)} \qquad (22.97)$$

On peut évidemment considérer que cet interstitiel macroscopique de N_I sites de réseau correspond en fait à *l'anti-singularité de la lacune macroscopique* de $N_L = N_I$ sites, en ce sens que la combinaison de ces deux singularités restaure complètement le réseau originel, puisque les N_L sites manquants du réseau sont comblés par les N_I interstitiels!

La condition d'équilibre du champ d'expansion d'un interstitiel macroscopique

En présence d'un tel encastrement d'un morceau de réseau au sein du réseau, il n'y a évidemment pas cohérence des deux réseaux, et la condition d'équilibre revient à ce que les pressions à l'interface soit égales de part et d'autre de l'interface, donc que

$$p_{ext}(R_I) = p_{int} \quad \Rightarrow \quad \tau_{int}^{(I)} = \tau_{ext}^{(I)}(R_I) \qquad (22.98)$$

Le champ extérieur $\tau_{ext}^{(I)}(r)$ satisfait évidemment l'équation $\Delta\tau_{ext}^{(I)}(r) \cong 0$, et s'écrit donc

$$\tau_{ext}^{(I)}(r) = A / r \qquad (22.99)$$

Pour trouver la valeur de la constante A, il faut s'assurer que le nombre de mailles de réseau avant introduction de la singularité interstitielle soit égal au nombre de mailles de réseau après introduction de la singularité, donc que

$$n_0 \int_{R_I}^{R_\infty} \mathrm{e}^{-\tau_0}\, \mathrm{e}^{-\tau_{ext}^{(I)}(r)}\, 4\pi r^2\, dr = n_0\, \mathrm{e}^{-\tau_0} \left(\frac{4}{3}\pi R_\infty^3 \right) \qquad (22.100)$$

Si on considère a priori que $\tau_{ext}^{(I)}(r) < 1$, la résolution de cette condition avec le champ *(22.99)* conduit approximativement à

$$\left(\frac{R_\infty^3}{3} - \frac{R_I^3}{3} \right) - A \left(\frac{R_\infty^2}{2} - \frac{R_I^2}{2} \right) = \frac{1}{3} R_\infty^3 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2R_I^3}{3\left(R_\infty^2 - R_I^2\right)} \cong -\frac{2R_I^3}{3R_\infty^2} \qquad (22.101)$$

ce qui justifie d'ailleurs *a fortiori* l'hypothèse $\tau_{ext}^{(I)}(r) < 1$. Il vient donc pour le champ extérieur

$$\tau_{ext}^{(I)}(r) = -\frac{2R_I^2}{3R_\infty^2}\frac{R_I}{r} = -\frac{2R_I^3}{3R_\infty^2}\frac{1}{r} \qquad (22.102)$$

et pour le champ intérieur homogène au sein de l'interstitiel macroscopique de réseau

$$\tau_{int}^{(I)} = \tau_{ext}^{(I)}(R_I) = -\frac{2R_I^2}{3R_\infty^2} << 1 \qquad (22.103)$$

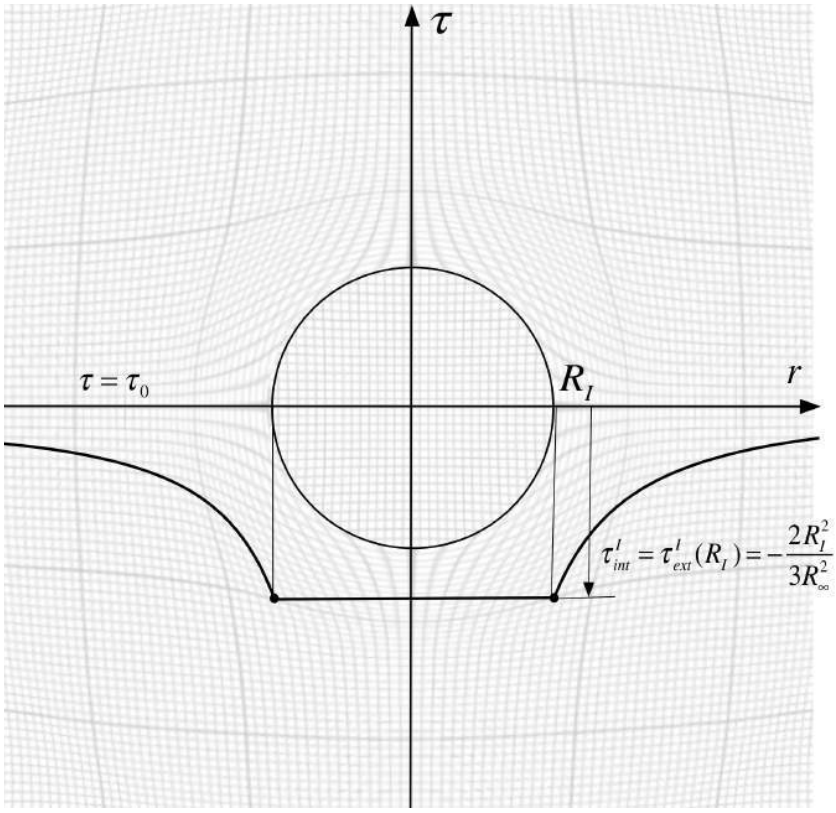


Figure 22.9 *- le champ d'expansion d'un interstitiel macroscopique*

Ces deux champs d'expansion, associés à la singularité macroscopique, sont représentés à la figure 22.9. En supposant qu'il existe au voisinage de l'interstitiel macroscopique un champ d'expansion $\tau^{externe}(R_I)$ dû aux autres singularités situées dans son voisinage, le rayon réel de l'interstitiel macroscopique dépendra de l'expansion de fond τ_0, de son champ d'expansion propre interne $\tau_{int}^{(I)}$ et du champ externe $\tau^{externe}(R_I)$ par la relation

$$R_I = R_{I0}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0+\tau_{int}^{(I)}+\tau^{externe}(R_I)}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3N_I}{4\pi n_0}}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0+\tau^{externe}(R_I)}{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2R_I^2}{9R_\infty^2}} \cong \sqrt[3]{\frac{3N_I}{4\pi n_0}}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0+\tau^{externe}(R_I)}{3}} \qquad (22.104)$$

On peut utiliser cette expression de R_I pour exprimer un peu différemment le champ des perturbations externes *(22.102),* sous la forme

$$\tau_{ext}^{(I)}(r) = -\frac{2R_I^3}{3R_\infty^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{R_\infty^2}\frac{N_I}{2\pi n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{R_\infty^2}\frac{N_I}{2\pi\frac{1}{a^3}}\frac{1}{r} = -\frac{a^3}{2\pi R_\infty^2}N_I\frac{1}{r} \qquad (22.105)$$

qui montre que le champ externe des perturbations d'expansion est simplement proportionnel au nombre de sites additionnels agglutinés dans le réseau.

L'énergie d'un interstitiel macroscopique

L'énergie du champ d'expansion total s'écrit alors, en tenant compte des champs extérieur et intérieur

$$E_{dist}^{(\tau)} = \left[\begin{array}{l} K_1 \int_{R_I}^{R_\infty} \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(I)}(r)\right)^2 4\pi r^2\, dr - K_0 \int_{R_I}^{R_\infty} \left(\tau_0 + \tau_{ext}^{(I)}(r)\right) 4\pi r^2\, dr \\ + K_1 \int_{0}^{R_I} \left(\tau_0 + \tau_{int}^{(I)}\right)^2 4\pi r^2\, dr - K_0 \int_{0}^{R_I} \left(\tau_0 + \tau_{int}^{(I)}\right) 4\pi r^2\, dr \end{array} \right] \qquad (22.106)$$

L'énergie «gravitationnelle» du champ d'expansion associé à cet interstitiel macroscopique devient donc, si on retire l'énergie due exclusivement au champ de fond τ_0, une valeur qui dépend de la densité d'énergie reportée entre crochets dans l'expression suivante

$$E_{grav}^{(I)} = \frac{4}{3}\pi R_I^3 \left[\left(K_0 - 2K_1\tau_0\right) + \left(6K_1\tau_0 - K_0\right)\frac{R_I^2}{3R_\infty^2} + K_1\frac{4R_I^3}{3R_\infty^3} - K_1\frac{8R_I^4}{9R_\infty^4} \right] \qquad (22.107)$$

et qui se simplifie, en utilisant *(22.104)*, sous la forme

$$E_{grav}^{(I)} \cong \frac{4}{3}\pi R_I^3 \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right) \cong \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\frac{N_I}{n_0} \mathrm{e}^{\tau_0 + \tau^{externe}(R_I)} \qquad (22.108)$$

Bien que *l'interstitiel macroscopique soit l'anti-singularité de la lacune macroscopique*, son énergie de formation est toujours positive tant que $\tau_0 < K_0 / 2K_1$, et infiniment plus petite que l'énergie de formation de la lacune macroscopique, ce qui fait apparaître une *dissymétrie colossale* entre les deux singularités macroscopiques complémentaires!

Un interstitiel macroscopique peut-il être un trou noir?

En présence d'un interstitiel macroscopique de réseau, la première condition *(15.3)* pour l'apparition d'un trou noir implique que

$$\left.\frac{\partial \tau_{ext}^{(I)}(r)}{\partial r}\right|_{r_{cr}} = \frac{2}{r_{cr}} \quad \Rightarrow \quad r_{cr} = \frac{R_I^3}{3R_\infty^2} \qquad (22.109)$$

et la deuxième condition *(15.3)* que

$$r_{cr} > R_I \quad \Rightarrow \quad R_I > \sqrt{3}R_\infty \qquad (22.110)$$

On en déduit qu'un interstitiel macroscopique de réseau, quelle que soit sa dimension et son énergie, ne peut <u>*jamais*</u> se comporter comme un *trou noir*. Cette conclusion est extrêmement intéressante dans la mesure où on a là un objet topologique présentant une dissymétrie considérable d'avec son anti-singularité, la lacune macroscopique, qui elle devient forcément un trou noir dès lors que $\tau_0 > 1$.

22.6 – Analogies avec les champs «électriques» et «gravitationnels»

Dans l'analogie entre notre théorie et les grandes théories de la physique, le champ de rotation

est typiquement un champ de nature «électrique», alors que les champs de flexion et d'expansion volumique sont des champs de nature «gravitationnelle».
Dans le tableau 22.1, on a reporté les champs «électriques» et «gravitationnels» externes générés *à longue distance* par une singularité topologique d'énergies globales $E_{dist}^{ch}+V_{pot}^{ch}$, de charge de rotation globale $\boldsymbol{Q}_\lambda$ et/ou de charge de courbure globale $\boldsymbol{Q}_\theta$.

Tableau 22.1 - Les champs à longue distance d'une singularité topologique

Champ «électrique» de rotation dû à la charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$

$$\vec{\omega}_{ext}^{\,él}(\vec{r})=\frac{\boldsymbol{Q}_\lambda}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Champ «gravitationnel» de flexion dû à la charge de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$

$$\vec{\chi}_{ext}(\vec{r})=\frac{\boldsymbol{Q}_\theta}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Champ «gravitationnel» d'expansion dû aux énergies E_{dist}^{ch} ***et*** V_{pot}^{ch}

$$\tau_{ext}^{(E)}(r)\cong-\frac{1}{2\pi\left(K_0-2K_1(1+\tau_0)-4K_2/3\right)R_\infty^2}\left(E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}\right)\frac{1}{r}$$

Champ «gravitationnel» d'expansion dû à la charge de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$

$$\tau_{ext}^{(Q_\theta)}(r)\cong-\frac{1}{2\pi\left(K_0-2K_1(1+\tau_0)-4K_2/3\right)R_\infty^2}\frac{K_2R_{amas}^2\boldsymbol{Q}_\theta}{5}\frac{1}{r}$$

Champ «gravitationnel» d'expansion dû à la charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$

$$\tau_{ext}^{(Q_\lambda)}(r)\cong\frac{1}{2\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(K_2+K_3\right)R_\infty^2\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{4\pi}\dfrac{1}{r^4}\\ -\left(E_{dist\,(rot\,int)}^{amas}+\dfrac{2\left(K_2+K_3\right)\boldsymbol{Q}_\lambda{}^2}{4\pi R_{amas}}\right)\dfrac{1}{r}\end{array}\right]$$

Dans le tableau 22.2, on a reporté les champs «gravitationnelles» à longue distance et les énergies des lacunes et interstitiels macroscopiques de rayons R_L et R_I, correspondant respectivement à des trous de N_L sites de réseau ou à des encastrements d'un morceau de réseau de N_I sites.

De l'existence de plusieurs champs de nature «gravitationnelle»

Concernant les champs de nature «gravitationnelle», il est très encourageant de constater qu'il existe ici un premier champ d'expansion associé directement à *l'énergie* $E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}$ *de*

l'amas de singularités topologiques, de manière similaire au champ de gravitation de la Relativité Générale d'Einstein qui est aussi une émanation du *tenseur énergie-impulsion de la matière.*

Tableau 22.2 - Les champs à longue distance et les énergies des singularités lacunaires et interstitielles macroscopiques

Champ «gravitationnel» d'expansion d'une singularité lacunaire macroscopique

$$\begin{cases} \tau_{ext}^{(L)}(r) \cong -\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)\dfrac{R_L}{r} \\ R_L = \sqrt[3]{\dfrac{3N_L}{4\pi n_0 \,\mathrm{e}}} \end{cases}$$

Energie d'une singularité lacunaire macroscopique

$$E_{grav}^{(L)} \cong 2\pi\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)R_\infty^2 R_L \cong \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}(R_L)\right)$$

Champ «gravitationnel» d'expansion d'une singularité interstitielle macroscopique

$$\begin{cases} \tau_{int}^{(I)} = \tau_{ext}^{(I)}(R_I) = -\dfrac{2R_I^2}{3R_\infty^2} << 1 \\ \tau_{ext}^{(I)}(r) = -\dfrac{2R_I^3}{3R_\infty^2}\dfrac{1}{r} << 1 \\ R_I \cong \sqrt[3]{\dfrac{3N_I}{4\pi n_0}}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0+\tau^{externe}(R_I)}{3}} \end{cases}$$

Energie d'une singularité interstitielle macroscopique

$$E_{grav}^{(I)} \cong \frac{4\pi R_I^3}{3}\left(K_0-2K_1\tau_0\right) \cong \left(K_0-2K_1\tau_0\right)\frac{N_I}{n_0}\mathrm{e}^{\tau_0+\tau^{externe}(R_I)}$$

Mais il apparaît encore dans notre théorie deux autres champs «gravitationnels» d'expansion qui sont associés respectivement à *la charge de courbure globale* $\boldsymbol{Q}_\theta$ et à *la charge de rotation globale* $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de l'amas de singularités topologiques. Ces champs n'ont en fait pas d'équivalent dans la Relativité Générale d'Einstein.

L'existence du deuxième champ «gravitationnel» d'expansion, dû à *la charge de courbure* $\boldsymbol{Q}_\theta$, est soumise à la condition que le module de cisaillement K_2 du réseau parfait ne soit pas nul. Il y a donc encore possibilité de discuter de l'existence ou non de ce champ suivant la valeur qui doit être attribuée au module K_2 dans notre analogie avec le monde réel, sachant que ce module doit de toute façon être très petit vis-à-vis du module K_3, comme on l'a déjà spécifié avec la conjecture 4.

Le troisième champ «gravitationnel» d'expansion est associé à *la charge de rotation* $\boldsymbol{Q}_\lambda$ *de l'amas de singularités topologiques* considéré. Dans le cadre de notre analogie, ce troisième champ d'expansion doit forcément exister si l'amas possède une charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$ non nulle puisque le module K_3 doit exister pour satisfaire l'analogie avec les équations de Maxwell! Mais ce champ n'a pas d'analogue directe dans les théories de la Relativité Générale d'Einstein et de la Physique des Particules.

Notons encore que les trois champs «gravitationnels» précédents possèdent des énergies gravitationnelles non nulles données par les relations (*22.19), (22.39)* et *(22.73)* respectivement

$$\begin{cases} E_{grav}^{E} \cong \dfrac{K_1}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0)-K_0\right)^2}\dfrac{\left(E_{dist}^{amas}\right)^2}{\boldsymbol{V}_{amas}} \\ E_{grav}^{(\boldsymbol{Q}_\theta)} \cong \dfrac{K_1}{\left(K_0-2K_1(1+\tau_0)-4K_2/3\right)^2}\dfrac{K_2^2 R_{amas}\boldsymbol{Q}_\theta^{\,2}}{28\pi} \\ E_{grav}^{(\boldsymbol{Q}_\lambda)} \cong \dfrac{K_1}{\left(K_0-2K_1(1+\tau_0)-4K_2/3\right)^2}\left[\dfrac{\left(E_{dist\,(rot\,int)}^{amas}\right)^2}{\boldsymbol{V}_{amas}}+\dfrac{\left(K_2+K_3\right)^2}{80\pi^3}\dfrac{\boldsymbol{Q}_\lambda^{\,4}}{R_{amas}^5}\right] \end{cases} \qquad (22.111)$$

Comme celles-ci dépendent avant tout du coefficient $K_1/K_0^2 <<< 1$, qui doit être très petit dans le réseau cosmologique parfait, l'énergie gravitationnelle des singularités est assurément négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique de distorsion des singularités!

Le fait qu'il apparaisse deux champs «gravitationnels» d'expansion volumique qui n'ont apparemment pas d'analogues dans les théories de la Relativité Générale d'Einstein et de la Physique des Particules est très intéressant pour tester notre théorie. On reviendra dans les chapitres suivants sur les rôles que pourraient jouer les trois champs d'expansion volumique associés respectivement aux énergies $E_{dist}^{amas}+V_{pot}^{amas}$, à la charge de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$ et à la charge de rotation $\boldsymbol{Q}_\lambda$ d'une singularité localisée ou d'un amas localisé de singularités topologiques.

Du champ dynamique de perturbations d'expansion des singularités de forte densité d'énergie ou de forte charge de rotation au voisinage de l'expansion critique

Si le champ d'expansion de fond τ_0 du réseau augmente ou diminue de telle sorte à passer par la valeur critique τ_{0cr}, il apparaît un domaine où il ne peut plus exister de solution statique à l'équation de Newton *(18.12)*, ce qui signifie qu'il doit forcément apparaître *une solution dynamique qui permet de transformer une singularité statique du domaine* $\tau_0 < \tau_{0cr}$ *en singularité statique du domaine* $\tau_0 > \tau_{0cr}$*, et vice-versa*. La non-existence d'une solution statique à l'équation différentielle *(18.12)* lorsque la densité d'énergie et/ou la charge de rotation de la singularité deviennent trop importantes est mathématiquement un fait assez similaire à ce que nous avons déjà rencontré à la section 12.9 dans le cas des *sources de Frank-Read*, où il n'existait plus de solutions statiques à la déformée d'une corde de dislocation ancrée lorsque la contrainte dépassait une certaine valeur limite critique, et nous verrons dans la suite que l'apparition de solutions dynamiques pures pour le champ de perturbation de l'expansion à en fait un lien très étroit avec la physique quantique!

De la possibilité pour une singularité localisée de se comporter comme un trou noir statique au voisinage de l'expansion critique

Une singularité possédant une forte valeur de l'énergie, de la charge de courbure ou de la charge de rotation peut se comporter comme un trou noir statique dans le voisinage de la valeur critique d'expansion τ_{0cr}, et l'existence d'un tel comportement est assujetti aux conditions suivantes:

- dans le cas d'une singularité ou d'un amas d'énergies données $E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}$

$$\left(E_{dist}^{amas} + V_{pot}^{amas}\right) R_{amas} > 48\pi K_1 R_\infty^4 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_0 < \tau_{0cr} \tag{22.112}$$

- dans le cas d'une singularité ou d'un amas de charge de courbure donnée $\boldsymbol{Q}_\theta$

$$\left|\boldsymbol{Q}_\theta\right| R_{amas} > \frac{20\pi\left|K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right| R_\infty^2}{K_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}_\theta < 0 \ \ \& \ \ \tau_0 > \tau_{0cr} \\ \boldsymbol{Q}_\theta > 0 \ \ \& \ \ \tau_0 < \tau_{0cr} \end{cases} \tag{22.113}$$

- dans le cas d'une singularité ou d'un amas de charge de rotation donnée $\boldsymbol{Q}_\theta$

$$\frac{\boldsymbol{Q}_\lambda^2}{R_{amas}^4} > \frac{8\pi^2 K_1}{\left(K_2 + K_3\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_0 > \tau_{0cr} \tag{22.114}$$

D'une analogie possible entre les singularités lacunaires et les trous noirs et entre les singularités interstitielles et les étoiles à neutrons

L'interstitiel macroscopique est l'anti-singularité parfaite de la lacune macroscopique si $N_I = N_L$ puisque la combinaison des deux singularités restaure complètement du réseau parfait. Mais il existe une *différence colossale* entre ces deux singularités, puisque leurs énergies respectives de formation sont extrêmement différentes, et que la lacune macroscopique devient un trou noir au sein du réseau cosmologique dès que $\tau_0 > 1$ alors que l'interstitiel macroscopique ne peut jamais devenir trou noir!

Si on considère que ces deux objets topologiques peuvent se former par effondrement gravitationnel d'amas de singularités, de nature lacunaire pour la lacune macro (par exemple des boucles de dislocation prismatiques lacunaires) et de type interstitiel pour l'interstitiel macro (par exemple des boucles de dislocation prismatiques interstitielles), on retrouve par analogie la formation des trous noirs et des étoiles à neutrons par effondrement gravitationnel en théorie de la gravitation! Mais si une masse initiale suffisante de l'amas est une condition pour arriver à un effondrement gravitationnel, ce ne serait pas la masse initiale de l'amas qui conditionne l'évolution vers un trou noir ou vers une étoile à neutrons, *mais la nature même de l'amas initial !*
Si on admet la conjecture suivante, à savoir

Conjecture 8: *les singularités de nature lacunaire correspondent par analogie à l'anti-matière et les singularités de nature interstitielle à la matière* *(22.115)*

les trous noirs seraient alors des résidus d'effondrements d'amas d'anti-matière de nature lacunaire et les étoiles à neutrons des résidus d'effondrements d'amas de matière de nature interstitielle.

Dans cette analogie, les trous noirs, de par leur constitution de *«trous lacunaires»*, ne peuvent conserver aucune mémoire de l'amas initial de singularités lacunaires dont ils sont issus, si ce n'est *la quantité de lacunes*, c'est-à-dire le nombre de sites de réseau manquants dans les singularités lacunaires initiales. Par contre, les étoiles à neutrons, de par leur constitution d'*«encastrements interstitiels»* de morceaux de réseau non-cohérents avec le réseau environnant, pourraient conserver, hormis *la quantité d'interstitiels*, c'est-à-dire le nombre de sites de réseau en excès dans les singularités interstitielles initiales, au moins aussi *la mémoire du moment cinétique de rotation de l'amas initial de singularités interstitielles* dont elles sont issues, sous la forme d'une *rotation très rapide de l'encastrement*, ce qui correspondrait bien avec les vitesses de rotation énormes observées dans le cas des étoiles à neutrons, appelées aussi *pulsars* à cause des impulsions électromagnétiques qu'ils émettent à fréquence fixe suite à leur rotation très rapide!

Chapitre 23

Propriétés «gravitationnelles» des boucles topologiques dans le réseau cosmologique

Dans ce chapitre, on utilise les résultats obtenus dans les chapitres précédents pour traiter en détail les propriétés «gravitationnelles» des singularités élémentaires en boucles: les boucles de désinclinaison vis, les boucles de dislocation coin prismatiques et les boucles de dislocation mixtes par glissement. On va rechercher les perturbations externes du champ d'expansion de ces singularités de réseau et on en déduira plusieurs conséquences extrêmement intéressantes, notamment l'existence, dans le cas de la boucle de dislocation coin prismatique, d'une masse équivalente de gravitation plus élevée que la masse d'inertie, qui peut même être négative dans le cas des boucles de nature interstitielle, résultat qui s'avère très étonnant et prometteur!

23.1 – La boucle de désinclinaison vis (BV)

La boucle de désinclinaison vis a déjà été décrite en détail à la section 19.7. Concernant ses propriétés «gravitationnelles», à savoir ses champs externes à longue et courte portée de perturbation de l'expansion, on peut directement les déduire de *(22.63)*

$$\begin{cases} \tau_{ext\,LD}^{BV}(r) = \tau_{ext\,LD}^{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}(r) \cong -\dfrac{1}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2} E_{dist}^{BV} \dfrac{1}{r} \\ \tau_{ext\,CD}^{BV}(r) = \tau_{ext\,CD}^{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}(r) \cong \dfrac{1}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)} \dfrac{R_{BV}E_{dist}^{BV}}{2\pi\zeta_{BV}} \dfrac{1}{r^4} \end{cases} \qquad (23.1)$$

Comme ces champs sont des perturbations de l'expansion volumique, ils correspondent dans notre analogie au monde réel à des *champs gravitationnels, agissant* à longue distance *(LD)* et à courte distance *(CD)*! D'ailleurs, il devient très intéressant ici de remplacer dans ces expressions l'énergie de distorsion E_{dist}^{BV} par la masse d'inertie M_0^{BV} de la boucle, en utilisant l'expression $E_{dist}^{BV} = M_0^{BV} c_t^2$ de la *relation d'Einstein (19.96)*

$$\begin{cases} \tau_{ext\,LD}^{BV}(r) \cong -\dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2} \dfrac{M_0^{BV}}{r} \\ \tau_{ext\,CD}^{BV}(r) \cong \dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)} \dfrac{R_{BV}M_0^{BV}}{2\pi\zeta_{BV}} \dfrac{1}{r^4} \end{cases} \qquad (23.2)$$

Sous cette forme, le champ de perturbations d'expansion à longue distance *(LD)* dépend exclusivement de la masse d'inertie de la boucle, et ne dépend pas de la taille de la boucle, ce qui conforte encore notre analogie entre ce champ de perturbations de l'expansion et un champ de nature gravitationnelle!

De l'énergie "gravitationnelle" due aux perturbations d'expansion de la boucle vis

Les champs de perturbations de l'expansion que nous venons de trouver possèdent évidemment une énergie, qu'il serait souhaitable de comparer avec l'énergie élastique E_{dist}^{BV} de la boucle vis. L'énergie totale du champ des perturbations d'expansion dû à l'énergie élastique de la boucle est déduite grâce à la relation *(22.73)* sous la forme

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})} = \frac{K_1}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}\left[\frac{\left(E_{dist\,tore}^{BV}\right)^2}{\boldsymbol{V}_{BV}} + \frac{\left(K_2+K_3\right)^2}{80\pi^3}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}^4}{R_{BV}^5}\right] \tag{23.3}$$

En y introduisant les valeurs de $E_{dist\,tore}^{BV}$ et de $\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}$ tirées respectivement de *(19.88)* et de *(19.77)*, on obtient

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})} \cong \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)^2}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}\left[\frac{3\zeta_{BV}^2}{16\pi} + \frac{\pi}{80}\right]\frac{\vec{\underset{\sim}{B}}_{BV}^4}{R_{BV}} \tag{23.4}$$

et comme $\zeta_{BV} = \ln\left(A_{BV}R_{BV}/a\right) > 1$, on obtient l'approximation

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})} \cong \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)^2}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}\frac{3\zeta_{BV}^2\vec{\underset{\sim}{B}}_{BV}^4}{16\pi R_{BV}} \tag{23.5}$$

Comparons cette énergie avec l'énergie élastique, en en faisant le rapport, et en introduisant la valeur de E_{dist}^{BV} tirée de *(19.88)*

$$\frac{E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})}}{E_{dist}^{BV}} \cong \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2}\frac{3\zeta_{BV}\vec{\underset{\sim}{B}}_{BV}^2}{8\pi R_{BV}^2} \tag{23.6}$$

En appliquant alors les conditions *(19.58)* du réseau cosmologique parfait, on obtient approximativement

$$\frac{E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})}}{E_{dist}^{BV}} \cong \frac{3}{8\pi}\frac{K_1}{K_0}\zeta_{BV}\left(\frac{\left|\vec{\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}}_{BV}\right|}{R_{BV}}\right)^2 << 1 \tag{23.7}$$

car $K_1 << K_0$.

On en déduit par conséquent que l'énergie "gravitationnelle" $E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV})}$ de la boucle de désinclinaison vis due à son énergie élastique E_{dist}^{BV} est parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique dans le réseau cosmologique parfait.

Les propriétés essentielles de la boucle de désinclinaison vis

Dans le tableau 23.1, on a reporté l'ensemble des propriétés importantes que nous avons déduites jusqu'à maintenant pour une boucle de désinclinaison vis dans un *réseau cosmologique parfait*, à savoir sa charge, sa masse d'inertie, ses champs de rotation et de perturbations de l'expansion à longue distance, ses énergies élastique et cinétique, et finalement son comportement relativiste. On y constate entre autre que la masse d'inertie M_0^{BV} de la boucle ne contrôle pas seulement les propriétés dynamiques de la boucle, comme son énergie cinétique E_{cin}^{BV}, mais que c'est elle aussi qui génère les champs gravitationnels $\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)$ et $\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)$ des perturbations externes d'expansion.

Comme l'énergie "gravitationnelle" $E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\lambda BV})}$ des champs de perturbations de l'expansion dus à la charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ de la boucle de désinclinaison vis estt parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique E_{dist}^{BV} de la boucle, cette énergie "gravitationnelle" ne figure pas dans le tableau des propriétés essentielles.

Quant au champ de perturbations de l'expansion au sein même du tore entourant la boucle, et de l'énergie qui est associée à ce champ interne, on y reviendra en détail plus tard, quant on traitera du problème du spin et du moment magnétique de la boucle de désinclinaison vis.

Tableau 23.1 - Propriétés essentielles d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = -\pi R_{BV}^2 \boldsymbol{\Omega}_{BV} = 2\pi R_{BV} \Lambda_{BV} = -\pi R_{BV} \underset{\sim}{\vec{\boldsymbol{B}}}_{BV} \vec{\boldsymbol{t}} \\ M_0^{BV} = \dfrac{2}{c_t^2}\left(K_2 + K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV} \Lambda_{BV}^2 = \dfrac{1}{2c_t^2}\left(K_2 + K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{ext}^{BV}(\vec{r}) = \dfrac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{4\pi} \dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \tau_{ext\,LD}^{BV}(\vec{r}) \cong -\dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2} \dfrac{M_0^{BV}}{r} \\ \tau_{ext\,CD}^{BV}(r) \cong \dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)} \dfrac{R_{BV} M_0^{BV}}{2\pi\zeta_{BV}} \dfrac{1}{r^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\boldsymbol{v}}^{BV} = \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{BV}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{1}{2}M_0^{BV}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \dfrac{E_{dist}^{BV}}{\gamma_t} = \dfrac{M_0^{BV} c_t^2}{\gamma_t} \\ E_{dist}^{BV} \cong M_0^{BV} c_t^2 \qquad si \quad \boldsymbol{v} = 0 \\ E_{cin}^{BV} \cong \dfrac{1}{2} M_0^{BV} \boldsymbol{v}^2 \quad si \quad \boldsymbol{v} << c_t \end{cases}$$

23.2 – La boucle de dislocation coin prismatique (BC)

La boucle de dislocation coin prismatique que nous avons décrite à la section 19.9 possède une charge de courbure $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ donnée par la relation *(19.101)*, ce qui fait d'elle la brique élémentaire de la *charge de courbure du réseau* dans notre analogie avec le monde réel. Cette charge est responsable d'un champ de flexion externe divergent, analogue à un champ de courbure géométrique, décrit par la relation *(19.103)*

Connaissant l'énergie élastique *(19.102)* de la boucle de dislocation coin prismatique, on peut utiliser la relation *(22.17)* pour calculer le champ extérieur $\tau_{ext}^{(E)}(r)$ de perturbations d'expansion associé à l'énergie élastique E_{dist}^{BC} de la boucle de dislocation coin, en négligeant ici son énergie potentielle V_{pot}^{BC}

$$\tau_{ext}^{(E)}(r) \cong -\frac{K_3}{2\pi\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{\zeta_{BC} R_{BC}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2}{r} \tag{23.8}$$

On peut aussi utiliser la relation *(22.34)* pour calculer le champ extérieur $\tau_{ext}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}(r)$ de perturbations d'expansion associé à la charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\theta\, BC}$ de la boucle, donnée par *(19.101)*

$$\tau_{ext}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}(r) \cong \frac{K_2}{5\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2}\frac{R_{BC}^2\, \vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}}{r} \tag{23.9}$$

Le champ total des perturbations de l'expansion peut donc s'écrire

$$\tau_{ext}^{BC}(r) \cong \frac{K_2}{5\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)R_\infty^2}\left[-\frac{5}{2\pi}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)\zeta_{BC}\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} + R_{BC}\right]\frac{R_{BC}\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}}{r} \tag{23.10}$$

En utilisant la conjecture 4 *(17.41)*, on peut émettre ici l'hypothèse fort plausible suivante

Hypothèse 1: $K_2 << K_3$ et $\zeta_{BC}\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right| \ln\left(\frac{A_{BC}R_{BC}}{a}\right) \le R_{BC}$ *(23.11)*

qui permet de dire que le premier terme au sein du crochet dans *(23.10)* est fort probablement largement inférieur au second terme. Ainsi, dans le cas de cette boucle, c'est le champ de perturbations d'expansion dû à la charge de courbure qui l'emporte largement sur le champ de perturbations d'expansion dû à l'énergie élastique de distorsion de la boucle, au contraire de la boucle de désinclinaison vis!

En introduisant la *masse d'inertie* M_0^{BC} de la boucle coin *(19.106)*

$$M_0^{BC} \cong \frac{E_{dist}^{BC}}{c_t^2} \cong \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{K_3}{c_t^2}\zeta_{BC} R_{BC}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \tag{23.12}$$

ainsi qu'une *masse de courbure équivalente* $M_{courbure}^{BC}$ valant

$$M_{courbure}^{BC} = -\frac{2\pi K_2}{5c_t^2} R_{BC}^2 \vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} \tag{23.13}$$

et qui peut être positive ou négative

$$\begin{cases} M_{courbure}^{BC} > 0 \;\; \textit{si boucle lacunaire} & (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} < 0) \\ M_{courbure}^{BC} < 0 \;\; \textit{si boucle interstitielle} & (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} > 0) \end{cases} \tag{23.14}$$

on peut écrire le champ de gravitation comme

$$\tau_{ext\,LD}^{BC}(r) \cong -\frac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1\left(1+\tau_0\right)\right)R_\infty^2}\frac{M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}}{r} \tag{23.15}$$

D'après les hypothèses *(23.11)*, la masse équivalente de courbure dans cette expression du champ de gravitation satisfait la relation

$$\left|M_{courbure}^{BC}\right| >> M_0^{BC} \tag{23.16}$$

De plus, la masse équivalente de courbure peut être positive ou négative. Ces deux faits vont

impliquer des résultats très étonnants comme on le verra par la suite!

De l'énergie "gravitationnelle" due aux perturbations d'expansion de la boucle coin

Les champs de perturbations de l'expansion que nous venons de trouver possèdent évidemment une énergie, qu'il serait souhaitable de comparer avec l'énergie élastique E_{dist}^{BC} de la boucle coin. L'énergie du champ de perturbations d'expansion dû à l'énergie élastique de la boucle est déduite grâce aux relations *(22.19)* et *(22.14)*

$$E_{grav}^{(E)} \cong K_1 \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0)) - K_0\right)^2} \frac{\left(E_{dist}^{BC}\right)^2}{R_{BC}^3} \qquad (23.17)$$

Comparons cette énergie avec l'énergie élastique, en en faisant le rapport, et en introduisant la valeur de E_{dist}^{BC} tirée de *(19.102)* et les conditions *(19.58)* du réseau cosmologique parfait

$$\frac{E_{grav}^{(E)}}{E_{dist}^{BC}} \cong \frac{3}{4\pi} \frac{K_1 K_3 \left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0)) - K_0\right)^2} \zeta_{BC} \left(\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}}{R_{BC}}\right)^2 \cong \frac{3}{4\pi} \frac{K_1 K_2^2}{K_0^3} \zeta_{BC} \left(\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}}{R_{BC}}\right)^2 <<< 1 \qquad (23.18)$$

car $K_1 K_2^2 <<< K_0^3$.

On en déduit par conséquent que l'énergie "gravitationnelle" $E_{grav}^{(E)}$ de la boucle de dislocation coin due à son énergie élastique E_{dist}^{BC} est parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique dans le réseau cosmologique parfait.

Voyons encore ce qu'il en est de l'énergie associée au champ de perturbation d'expansion dû à la charge de courbure de la boucle coin. En utilisant la relation *(22.39)*, on obtient l'énergie du champ de "gravitation" associé à la charge de courbure

$$E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})} \cong K_1 \frac{1}{28\pi} \frac{{K_2}^2}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} R_{BC} \boldsymbol{q}_{\theta BC}^2 \qquad (23.19)$$

Comparons cette énergie avec l'énergie élastique, en en faisant le rapport, et en introduisant la valeur de E_{dist}^{BC} tirée de *(19.102)* et la valeur de $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ tirée de *(19.101)*

$$\frac{E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}}{E_{dist}^{BC}} \cong \frac{K_1 \frac{1}{28\pi} \frac{{K_2}^2}{\left(K_0 - 2K_1(1+\tau_0) - 4K_2/3\right)^2} R_{BC} \left(2\pi \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right)^2}{\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^2 \frac{K_3}{c_t^2} \zeta_{BC} R_{BC} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2} \cong \frac{\pi}{7} \frac{K_1}{K_0} \frac{1}{\zeta_{BC}} << 1 \qquad (23.20)$$

car $K_1 << K_0$. On en déduit à nouveau que l'énergie "gravitationnelle" $E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}$ de la boucle de dislocation coin due à sa charge de courbure $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ est parfaitement négligeable vis-à-vis de son énergie élastique E_{dist}^{BC} dans le réseau cosmologique parfait.

Les propriétés essentielles de la boucle de dislocation coin

Dans le tableau 23.2, on a reporté l'ensemble des propriétés importantes que nous avons déduites jusqu'à maintenant pour une boucle de dislocation coin dans un *réseau cosmologique parfait*, à savoir sa charge de courbure, sa masse d'inertie, sa masse gravitationnelle équivalente, ses champs de flexion et de perturbations de l'expansion à longue distance, ses énergies

élastique et cinétique, et finalement son comportement relativiste. On y constate entre autre que c'est son énergie élastique E_{dist}^{BC} et sa masse d'inertie M_0^{BC} qui en est déduite qui contrôle ses propriétés dynamiques, comme son énergie cinétique E_{cin}^{BC}, mais que c'est sa masse gravitationnelle équivalente de courbure $M_{courbure}^{BC}$ qui contrôle essentiellement son champ gravitationnel $\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)$ de perturbations externes d'expansion à longue distance.

Tableau 23.2 - Propriétés essentielles d'une boucle de dislocation coin (BC)

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\theta BC} = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\Lambda}_{BC}\right) = 2\pi\vec{\Lambda}_{BC}\vec{\boldsymbol{m}} = -2\pi\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} \begin{cases} > 0 \;\; \textit{si boucle lacunaire} \quad (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} < 0) \\ < 0 \;\; \textit{si boucle interstitielle} \quad (\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} > 0) \end{cases} \\ M_0^{BC} = \dfrac{E_{dist}^{BC}}{c_t^2} \cong \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 \dfrac{K_3}{c_t^2}\zeta_{BC}R_{BC}\vec{\Lambda}_{BC}^2 = \left(\dfrac{K_2}{K_3}\right)^2 \dfrac{K_3}{c_t^2}\zeta_{BC}R_{BC}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2 \\ M_{courbure}^{BC} = -\dfrac{2\pi K_2}{5c_t^2}R_{BC}^2\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{B}}_{BC} = \dfrac{K_2}{5c_t^2}R_{BC}^2\boldsymbol{q}_{\theta BC} \begin{cases} > 0 \;\; \textit{si boucle lacunaire} \quad (\boldsymbol{q}_{\theta BC} > 0) \\ < 0 \;\; \textit{si boucle interstitielle} \quad (\boldsymbol{q}_{\theta BC} < 0) \end{cases} \\ \left|M_{courbure}^{BC}\right| >> M_0^{BC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\chi}_{ext}^{BC}(\vec{r}) = \dfrac{\boldsymbol{q}_{\theta BC}}{4\pi}\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \tau_{ext}^{BC}(r) \cong -\dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\dfrac{M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\boldsymbol{v}}^{BC} = \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E_{dist}^{BC}}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{1}{2}M_0^{BC}\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \dfrac{E_{dist}^{BC}}{\gamma_t} = \dfrac{M_{0e}^{BC}c_t^2}{\gamma_t} \\ E_{dist}^{BC} \cong M_0^{BC}c_t^2 \qquad si \quad \boldsymbol{v} = 0 \\ E_{cin}^{BC} \cong \dfrac{1}{2}M_0^{BC}\boldsymbol{v}^2 \quad si \quad \boldsymbol{v} << c_t \end{cases}$$

Comme les énergies "gravitationnelles" $E_{grav}^{(E)}$ et $E_{grav}^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}$ des champs de perturbations de l'expansion dus à l'énergie élastique E_{dist}^{BC} et à la charge de courbure $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ de la boucle de dislocation coin sont parfaitement négligeables vis-à-vis de l'énergie élastique E_{dist}^{BC} de la boucle, ces énergies "gravitationnelles" ne figurent pas dans le tableau des propriétés essentielles.

D'autre part, la masse gravitationnelle équivalente de courbure $M_{courbure}^{BC}$ est non seulement beaucoup plus grande que la masse d'inertie M_0^{BC}, mais elle peut même être négative dans le cas des boucles coin de nature interstitielle! Ce résultat s'avère très étonnant puisqu'il corres-

pond à l'existence possible d'un champ gravitationnel négatif, et il est en fait extrêmement prometteur par la nouveauté qu'il apporte dans notre théorie par rapport à la Gravitation Générale d'Einstein! Les conséquences possibles de ce résultat étonnant seront explorées en détaildans la suite du livre!

23.3 – La boucle de dislocation mixte de glissement (BM)

La boucle de dislocation mixte de glissement que nous avons décrite à la section 19.10 ne possède ni charge de rotation, ni charge de courbure, mais par contre un moment dipolaire $\vec{\omega}^{BM}_{dipolaire}(r,\theta,\varphi)$ du champ de rotation, analogue à un moment dipolaire électrique. Connaissant l'énergie élastique de distorsion *(19.110)* de la boucle de dislocation mixte de glissement dans un réseau cosmologique parfait, on peut utiliser la relation *(22.17)* pour calculer le champ extérieur $\tau^{E}_{ext}(r)$ de perturbations d'expansion associé à cette énergie élastique E^{BM}_{dist}, en négligeant ici l'énergie potentielle V^{BM}_{pot}. D'autre, il devient aussi intéressant ici de remplacer dans l'expression de $\tau^{E}_{ext}(r)$ l'énergie de distorsion E^{BM}_{dist} par la masse d'inertie M_0^{BM} de la boucle en utilisant la relation $E^{BM}_{dist} = M_0^{BM} c_t^2$ *(19.114)*

$$\begin{aligned}\tau^{E}_{ext}(r) &\cong -\frac{1}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\frac{E^{BM}_{dist}}{r} \\ &\cong -\frac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\frac{M_0^{BM}}{r}\end{aligned} \qquad (23.21)$$

De l'énergie "gravitationnelle" due aux perturbations d'expansion de la boucle mixte

Les champs de perturbations de l'expansion que nous venons de trouver possèdent évidemment une énergie, qu'il serait souhaitable de comparer avec l'énergie élastique E^{BM}_{dist} de la boucle. L'énergie du champ de perturbations d'expansion dû à l'énergie élastique de la boucle est déduite grâce aux relations *(22.19)* et *(22.14)*

$$E^{(E)}_{grav} \cong K_1 \frac{3}{4\pi}\frac{1}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0)) - K_0\right)^2}\frac{\left(E^{BM}_{dist}\right)^2}{R^3_{BM}} \qquad (23.22)$$

Comparons cette énergie avec l'énergie élastique, en en faisant le rapport, et en introduisant la valeur de E^{BM}_{dist} tirée de *(19.110)*

$$\frac{E^{(E)}_{grav}}{E^{BM}_{dist}} \cong \frac{3}{16\pi}\frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0)) - K_0\right)^2}\zeta_{BM}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}}{R_{BM}}\right)^2 \cong \frac{3}{16\pi}\frac{K_1}{K_0}\zeta_{BM}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}}{R_{BM}}\right)^2 << 1 \qquad (23.23)$$

car $K_1 << K_0$.

On en déduit par conséquent que l'énergie "gravitationnelle" $E^{(E)}_{grav}$ de la boucle de dislocation mixte due à son énergie élastique E^{BM}_{dist} est parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique dans le réseau cosmologique parfait.

Les propriétés essentielles de la boucle de dislocation mixte

Dans le tableau 23.3, on a reporté l'ensemble des propriétés d'une boucle de dislocation mixte

de glissement dans le *réseau cosmologique parfait*. Si cette boucle ne possède ni charge de rotation ni charge de courbure générant un champ externe de rotation ou de flexion à longue portée, elle est nantie d'un champ externe de rotation dipolaire $\vec{\omega}^{BM}_{dipolaire}(r,\theta,\varphi)$ à courte portée, analogue à un champ dipolaire électrique. Le champ externe des perturbations d'expansion y est dû à l'énergie élastique de distorsion de la boucle, et dépend de la masse d'inertie M_0^{BV}. D'autre part, comme l'énergie "gravitationnelle" $E^{(E)}_{grav}$ du champs de perturbations de l'expansion dus à l'énergie élastique E^{BM}_{dist} de la boucle de dislocation mixte est parfaitement négligeable vis-à-vis de l'énergie élastique E^{BM}_{dist} de la boucle, cette énergie "gravitationnelle" ne figure pas dans le tableau des propriétés essentielles.

Tableau 23.3 - Propriétés essentielles d'une boucle de dislocation mixte (BM)

$$\begin{cases} M_0^{BM} \cong \dfrac{K_2+K_3}{4c_t^2}\zeta_{BM} R_{BM}\, \vec{\boldsymbol{B}}^2_{BM} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists \text{ un champ externe dipolaire de rotation } \vec{\omega}^{BM}_{dipolaire}(r,\theta,\varphi) \\ \tau^{BM}_{ext}(r) \cong -\dfrac{c_t^2}{2\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1\left(1+\tau_0\right)\right)R_\infty^2}\dfrac{M_0^{BM}}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^{BM}_{\boldsymbol{v}} = \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\left(1-\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)E^{BM}_{dist}}_{E^{dist}_{\boldsymbol{v}}} + \underbrace{\dfrac{1}{\gamma_t}\dfrac{1}{2}M_0^{BM}\boldsymbol{v}^2}_{E^{cin}_{\boldsymbol{v}}} = \dfrac{E^{BM}_{dist}}{\gamma_t} = \dfrac{M_0^{BM}c_t^2}{\gamma_t} \\ E^{BM}_{dist} \cong M_0^{BM}c_t^2 \qquad si \quad \boldsymbol{v}=0 \\ E^{BM}_{cin} \cong \dfrac{1}{2}M_0^{BM}\boldsymbol{v}^2 \quad si \quad \boldsymbol{v} << c_t \end{cases}$$

23.4 – Les diverses propriétés des boucles topologiques élémentaires

De l'énergie négligeable des champs de perturbation de l'expansion liés aux boucles

On a démontré dans ce chapitre l'ensemble des propriétés essentielles des trois boucles élémentaires qu'on peut rencontrer dans le réseau cosmologique parfait, et on a notamment établi les expressions des champs de perturbations d'expansion extérieurs, qui correspondent aux "champs gravitationnelles" d'expansion des boucles, et qui vont jouer un rôle très important par la suite!

On a aussi montré que les énergies $E^{(E)}_{grav}, E^{(\boldsymbol{q}_{\lambda BV})}_{grav}, E^{(\boldsymbol{q}_{\theta BC})}_{grav}$ des champs "gravitationnelles" asso-

ciées aux énergies élastiques, aux charges de rotation et aux charges de courbure des boucles élémentaires sont parfaitement négligeables vis-à-vis des énergies élastiques associées à ces boucles, et qu'on peut donc parfaitement les ignorer dans nos calculs.
On a donc répondu dans ce chapitre aux questions que nous nous posions au chapitre 19 concernant les champs de perturbations d'expansion des boucles élémentaires.

Les boucles topologiques élémentaires peuvent-elles être des trous noirs?

On peut se demander si les boucles topologiques élémentaires peuvent être des trous noirs. Pour cela, on applique les conditions *(15.3)* aux champs d'expansion $\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)$, $\tau_{ext}^{BC}(r)$ et $\tau_{ext}^{BM}(r)$ respectivement.
En appliquant ces conditions à *la boucle de désinclinaison vis* dans le cas où $\tau_0 << \tau_{0cr}$, on obtient la condition suivante pour que cette boucle soit un trou noir

$$\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}\right| \geq 2R_{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{\zeta_{BV}}} \qquad \Leftrightarrow \quad \tau_0 << \tau_{0cr} \tag{23.24}$$

ce qui impliquerait que le pseudo-vecteur de Burgers de la boucle soit de l'ordre de grandeur du rayon du réseau, ce qui n'a évidemment aucun sens.
Il en va de même pour *la boucle de dislocation mixte par glissement*, puisque la condition pour que celle-ci soit un trou noir devient

$$\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}\right| > 4R_{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\zeta_{BM}}} \qquad \Leftrightarrow \quad \tau_0 << \tau_{0cr} \tag{23.25}$$

Dans le cas de *la boucle de dislocation coin prismatique*, la condition s'exprime différemment puisque la masse de gravitation vaut $M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}$. Comme $\left|M_{courbure}^{BC}\right| >> M_0^{BC}$, on obtient

$$R_{BC}\left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right| \geq 10\frac{K_0}{K_2}R_{\infty}^2 \qquad \Leftrightarrow \quad \tau_0 << \tau_{0cr} \tag{23.26}$$

Mais comme le module K_2 doit être beaucoup plus petit que le module K_0 d'après la conjecture 4, cette condition ne peut évidemment jamais être satisfaite.
Par conséquent, il est clair que les trois boucles élémentaires formant la base des singularités topologiques microscopiques *ne peuvent pas être des trous noirs dans le domaine* $\tau_0 << \tau_{0cr}$.

Des propriétés remarquables des boucles topologiques élémentaires

Dans l'analogie entre notre théorie et les grandes théories de la physique, les trois types de boucles élémentaires que nous avons discutées dans ce chapitre présentent un certain nombre de propriétés étonnantes et remarquables que nous allons énumérer ici:

- elles sont respectivement les briques élémentaires de la *charge électrique*, de la *charge de courbure* et du *moment dipolaire électrique*, à partir desquelles il pourrait être possible de former des dispirations, par combinaison plus ou moins compliquée de plusieurs boucles, afin de trouver des singularités topologiques qui soient des analogues des particules élémentaires de notre monde réel,

- leur énergie de repos et leur énergie cinétique sont essentiellement confinées *dans le champ torique entourant les boucles*,

- comme l'énergie associée aux champs "gravitationnelles" de perturbation d'expansion est parfaitement négligeable, elles satisfont parfaitement la *relation d'Einstein* $E_{dist}^{boucle} \cong M_0^{boucle} c_t^2$, qui est étonnement obtenue dans notre théorie comme une propriété purement classique des singularités topologiques au sein du réseau, sans faire appel à un principe de relativité,

- elles satisfont parfaitement la *relativité restreinte*, avec une explication tout à fait originale de l'*énergie relativiste* $E_{\mathbf{v}}^{boucle} = E_{\mathbf{v}}^{dist} + E_{\mathbf{v}}^{cin} = E_{dist}^{boucle} / \gamma_t = M_0^{boucle} c_t^2 / \gamma_t$ comme la somme d'un terme relativiste d'énergie de distorsion élastique et d'un terme relativiste d'énergie cinétique,

- elles satisfont une *équation dynamique relativiste* donnée par les relations *(20.50)* et *(20.51)* ,

- la boucle de désinclinaison vis, porteuse d'une charge de rotation analogue à la charge électrique, satisfait les *équations de Maxwell* (tableau 17.1) et la *force de Lorentz (20.74)*,

- les trois types de boucles présentent un champ à grande distance de perturbations de l'expansion volumique, qui est l'analogue d'un *champ gravitationnel* décroissant en $1/r$ et qui *dépend uniquement d'une masse de gravitation* $M_0^{boucle} + M_{courbure}^{boucle}$ des boucles composée de la masse d'inertie et de la masse de courbure équivalente de la boucle, sans dépendre directement de la taille R_{boucle} des boucles,

- les *masses de gravitation* des boucles de désinclinaison vis et de dislocation mixte de glissement sont strictement égales à leurs masses d'inertie, alors que la masse de gravitation de la boucle de dislocation coin prismatique se compose de la masse d'inertie et de la masse de courbure de la boucle, avec une masse de courbure beaucoup plus élevée que la masse d'inertie, et qui peut même être négative dans le cas des boucles de nature interstitielle,

- la masse de gravitation de la boucle de dislocation coin prismatique contient deux termes: le premier terme dominant de masse de courbure $M_{courbure}^{BC}$ est positif ou négatif suivant que la boucle est de nature lacunaire ou interstitielle, et le deuxième terme de masse d'inertie M_0^{BC} est toujours positif. Ceci signifie que la masse de gravitation $M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}$ n'est pas symétrique entre une boucle de nature lacunaire et une boucle de nature interstitielle. Il apparaît ici *une faible assymétrie sur la valeur absolue de la masse de gravitation entre une boucle interstitielle et son anti-boucle lacunaire*, qui s'exprime par le fait que

$$M_{courbure}^{BC(l)} + M_0^{BC(l)} > 0 \quad ; \quad M_{courbure}^{BC(i)} + M_0^{BC(i)} < 0 \quad ; \quad \left| M_{courbure}^{BC(i)} + M_0^{BC(i)} \right| \tilde{<} M_{courbure}^{BC(l)} + M_0^{BC(l)} \qquad (23.27)$$

- toutes ces propriétés sont parfaitement analogues aux propriétés fondamentales des particules élémentaires du monde réel, hormis la *masse gravitationnelle* $M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}$ des boucles de dislocation coin prismatiques, boucles qui ont en fait une analogie forte avec les neutrinos. Cette propriété très spéciale des boucles de dislocation coin prismatiques sera discutée dans les chapitres suivants, dans lesquels on traitera de l'interaction gravitationnelle entre boucles.

Chapitre 24

Interaction «gravitationnelle» des singularités formées de boucles de désinclinaison vis

Dans ce chapitre, on entreprend en premier lieu une étude détaillée des interactions gravitationnelles intervenant entre des boucles de désinclinaison vis, ce qui nous conduit à une analogie forte avec la gravitation de Newton, mais présentant cependant quelques différences en ce qui concerne l'attraction gravitationnelle à courte portée et surtout la dépendance de la constante de gravitation en l'expansion volumique du réseau.

Ensuite, on s'intéresse à la *formulation maxwellienne* des équations d'évolution spatio-temporelle présentée au chapitre 17, qui correspondait à l'expression des lois locales de la physique, comme l'électromagnétisme, telles que vues par l'observateur extérieur ***GO*** *(**G**rand **O**bservateur imaginaire)*. On montre dans ce chapitre qu'il est possible d'imaginer un observateur ***HS*** *(**H**omo **S**apiens)* qui serait intimement lié au repère local, car lui-même constitué à partir d'un amas de singularités topologiques du réseau. Cet observateur ne peut connaître que des règles et horloges locales dans son repère local, telles qu'elles doivent rendre les équations de Maxwell invariantes vis-à-vis des expansions volumiques. Il apparaît alors une notion relativiste du temps pour les observateurs locaux ***HS***, qui doit présenter une analogie très forte avec la théorie de la *Relativité Générale d'Einstein*. On discute alors en détail des analogies, des différences et des avantages de notre théorie par rapport à la Relativité Générale.

24.1 – Interactions «gravitationnelles» à longue portée d'amas de boucles de désinclinaison vis

La dépendance de la masse d'inertie et de la charge de courbure en l'expansion locale

Dans le chapitre précédent, on a montré que la masse d'inertie des boucles de désinclinaison vis est extrêmement plus élevée que les masses d'inertie des boucles coin et des boucles mixtes, de sorte que les perturbations du champ d'expansion seront essentiellement causées par les boucles de désinclinaison vis. C'est pourquoi nous commencerons par analyser les champs de perturbation d'expansion à longue portée dus à celles-ci.

Pour une boucle vis, la masse d'inertie dépend du carré de la charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = -\pi R_{BV}^2 \boldsymbol{\Omega}_{BV} = 2\pi R_{BV} \Lambda_{BV} = -\pi R_{BV} \underset{\sim}{\vec{\boldsymbol{B}}}_{BV} \vec{\boldsymbol{t}} \\ M_0^{BV} = \dfrac{1}{2\pi^2 c_t^2} \left(K_2 + K_3\right) \zeta_{BV} \dfrac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{4\pi^2 R_{BV}} = \dfrac{1}{2c_t^2} \left(K_2 + K_3\right) \zeta_{BV} R_{BV}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV}^2 \end{cases} \qquad (24.1)$$

Si une telle boucle se trouve dans un champ d'expansion τ, la dépendance de la masse d'inertie M_0^{BV} et de la charge de rotation de cette boucle est liée à la dépendance $c_t = c_{t0}\,\mathrm{e}^{\tau/2}$ et à la dépendance de R_{BV} et de $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ en l'expansion locale. On pourrait penser à priori que le rayon de la boucle est lié au pas du réseau, de sorte que $R_{BV} = R_{BV0}\,\mathrm{e}^{\tau/3}$, et que l'angle de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ doit correspondre à un angle satisfaisant *la symétrie du réseau*, à savoir par exemple un multiple de $\pi/2$ pour un réseau cubique, ou un multiple de $\pi/3$ pour un réseau hexagonal, de sorte que $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ ne devrait pas dépendre de l'expansion de fond du réseau.
Cependant, on ne connaît pas du tout la nature exacte du réseau cosmologique, de sorte que, par esprit de généralité, on va supposer *à priori* une dépendance inconnue de R_{BV} et de $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ en l'expansion de fond du réseau, comme si la boucle pouvait subir une extension de son rayon et/ou une torsion dépendantes de l'expansion volumique locale du réseau

Hypothèse 1:
$$\begin{cases} R_{BV} = R_{BV0}\,\mathrm{e}^{\alpha_{BV}\tau} \\ \boldsymbol{\Omega}_{BV} = \boldsymbol{\Omega}_{BV0}\,\mathrm{e}^{\beta_{BV}\tau} \end{cases} \qquad (24.2)$$

Avec cette hypothèse, les dépendances de la charge et de la masse d'inertie de la boucle de désinclinaison vis en l'expansion volumique doivent s'écrire

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = -\pi R_{BV0}^2\,\mathrm{e}^{2\alpha_{BV}\tau}\,\boldsymbol{\Omega}_{BV0}\,\mathrm{e}^{\beta_{BV}\tau} = -\pi R_{BV0}^2\boldsymbol{\Omega}_{BV0}\,\mathrm{e}^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} = \boldsymbol{q}_{\lambda BV0}\,\mathrm{e}^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} \\ M_0^{BV} = \dfrac{1}{2c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{\tau}}\big(K_2+K_3\big)\zeta_{BV}R_{BV0}^3\,\mathrm{e}^{3\alpha_{BV}\tau}\,\boldsymbol{\Omega}_{BV0}^2\,\mathrm{e}^{2\beta_{BV}\tau} = M_{00}^{BV}\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}-1)\tau} \end{cases} \qquad (24.3)$$

Le champ de perturbation d'expansion à longue portée d'un amas de boucles vis

Quant au champ d'expansion à longue portée de la boucle, on a, d'après *(23.2)*

$$\tau_{ext\,LD}^{BV}(r) \cong -\frac{c_t^2}{2\pi\big(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\big)R_\infty^2}\frac{M_0^{BV}}{r} \qquad (24.4)$$

Comme ce champ à longue portée ne dépend pas du rayon de la boucle, tout comme le champ de rotation d'ailleurs, on peut généraliser la masse et la charge de rotation de l'amas

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_\lambda^{amas} = \sum_i \boldsymbol{q}_{\lambda BV(i)} = \boldsymbol{q}_{\lambda BV0(i)}\,\mathrm{e}^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} = \boldsymbol{Q}_{\lambda 0}^{amas}\,\mathrm{e}^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} \\ M_0^{amas} = \sum_i M_{0(i)}^{BV} = \sum_i M_{00(i)}^{BV}\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}-1)\tau} = M_{00}^{amas}\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}-1)\tau} \end{cases} \qquad (24.5)$$

de sorte que

$$\tau_{ext\,LD}^{amas}(r) \cong -\frac{c_t^2}{2\pi\big(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\big)R_\infty^2}\frac{M_0^{amas}}{r} \qquad (24.6)$$

La force d'interaction de gravitation entre deux amas de boucles de désinclinaison vis

Deux amas de boucles qui se situent à une distance d l'un de l'autre vont interagir entre eux via leurs champs «gravitationnels» de perturbations d'expansion à grande portée. En effet, on peut calculer les énergies des amas (1) et (2) à partir de leur masse d'inertie

$$E_{(i)}^{amas}(\tau)=M_{0(i)}^{amas}c_t^2=M_{00(i)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau} \tag{24.7}$$

Les deux amas distants de la distance d sont respectivement plongés dans le champs de perturbation d'expansion de l'autre amas. Comme nous savons que l'énergie élastique d'une boucle se situe essentiellement dans le voisinage proche de la boucle, on est assuré que l'énergie élastique de l'amas se trouve essentiellement dans le coeur de l'amas, de sorte que leur énergie respective est influencée par la présence de l'autre amas de la façon suivante

$$\begin{cases} E_{(1)}^{amas}=E_{(1)}^{amas}(\tau+\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d))=M_{00(1)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\left(\tau+\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)\right)} \\ E_{(2)}^{amas}=E_{(2)}^{amas}(\tau+\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d))=M_{00(2)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\left(\tau+\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)\right)} \end{cases} \tag{24.8}$$

Il apparaît par conséquent un accroissement ΔE_{grav} de l'énergie des deux amas qui interagissent, et qui s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta E_{grav}(d)&=\left[\begin{array}{l}\left(M_{00(1)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\left(\tau+\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)\right)}-M_{00(1)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau}\right)\\ +\left(M_{00(2)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\left(\tau+\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)\right)}-M_{00(2)}^{amas}c_{t0}^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau}\right)\end{array}\right]\\ &=M_{0(1)}^{amas}c_t^2\left(\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}-1\right)+M_{0(2)}^{amas}c_t^2\left(\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}-1\right)\end{aligned} \tag{24.9}$$

La force totale d'interaction entre les deux amas est donnée par la dérivé par rapport à d de la variation d'énergie ΔE_{grav} des deux amas, à savoir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{grav}(d)&=\frac{\partial\Delta E_{grav}(d)}{\partial d}=M_{0(1)}^{amas}c_t^2\frac{\partial\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}}{\partial d}+M_{0(2)}^{amas}c_t^2\frac{\partial\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}}{\partial d}\\ &=M_{0(1)}c_t^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}\frac{\partial\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}{\partial d}+M_{0(2)}^{amas}c_t^2\,\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}\frac{\partial\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}{\partial d}\end{aligned} \tag{24.10}$$

Les dérivés dans cette expression se déduisent de *(24.6)*, de sorte que

$$\frac{\partial\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)\tau_{ext\,LD(i)}^{amas}(d)}{\partial d}=\frac{\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2}{2\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\frac{M_{0(i)}^{amas}}{d^2} \tag{24.11}$$

et que, par conséquent

$$\boldsymbol{F}_{grav}(d)=\frac{\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^4}{\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2}\frac{M_{0(1)}^{amas}M_{0(2)}^{amas}}{d^2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}+\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}\right) \tag{24.12}$$

24.2 – Analogies et différences d'avec la Gravitation de Newton

L'expression *(24.14)* fait apparaître le produit des masses de gravitation divisé par la distance séparant les deux amas, ce qui rappelle furieusement un terme de la loi de gravitation de Newton. Introduisons donc une *«constante de gravitation»* $\boldsymbol{G}_{grav}$ telle que

$$\boldsymbol{G}_{grav}=\frac{\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^4}{\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2} \tag{24.13}$$

La force totale d'interaction gravitationnelle entre les deux amas prend la forme

$$\boldsymbol{F}_{grav}(d)=\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{amas}M_{0(2)}^{amas}}{d^2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}\right) \qquad (24.14)$$

que l'on reconnait, au moins partiellement, surtout si on développe les termes exponentiels qu'elle contient encore au premier ordre du développement

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(2)}^{amas}(d)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau_{ext\,LD(1)}^{amas}(d)}\cong 1-\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{amas}+M_{0(2)}^{amas}}{4c_t^2 d}+\ldots \qquad (24.15)$$

puisqu'on y voit apparaître l'expression de la *force gravitationnelle de Newton* entre les deux boucles

$$\boldsymbol{F}_{grav}(d)=\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{amas}M_{0(2)}^{amas}}{d^2}\left(1-\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{amas}+M_{0(2)}^{amas}}{4c_t^2 d}+\ldots\right) \qquad (24.16)$$

Pour de grandes distances d entre les boucles, le terme de deuxième ordre dans la parenthèse peut être négligé, de sorte qu'on retrouve alors une analogie parfaite avec *l'interaction gravitationnelle de Newton du monde réel*, avec une «constante de gravitation» $\boldsymbol{G}_{grav}$ très faible puisqu'il intervient R_∞^2 au dénominateur

$$\boldsymbol{F}_{grav}(d)\cong\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{amas}M_{0(2)}^{amas}}{d^2} \qquad (24.17)$$

Avec la «constante gravitationnelle» $\boldsymbol{G}_{grav}$, on peut aussi réécrire le *champ de gravitation (24.8)* d'un amas sous la forme suivante

$$\tau_{ext\,LD}^{amas}(r)\cong-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{2\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2 r} \qquad (24.18)$$

De la non-constance de la «constante» de gravitation

Ce qui apparaît en premier lieu en regardant l'expression de la «constante» de gravitation, c'est que celle-ci n'est en fait aucunement une constante puisqu'elle dépend de l'état d'expansion moyen τ_0 du réseau via les valeurs de c_t^4 et R_∞^2, ainsi que par la valeur de τ_0 intervenant au dénominateur en facteur du module K_1, qui rend la valeur de $\boldsymbol{G}_{grav}$ positive si $\tau_0<\tau_{0cr}$ et négative si $\tau_0>\tau_{0cr}$

$$\boldsymbol{G}_{grav}(\tau_0)=\frac{\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_{t0}^4}{\pi\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)R_{\infty 0}^2}\mathrm{e}^{4\tau_0/3}\quad\begin{cases}>0 & si\quad \tau_0<\tau_{0cr}\\ <0 & si\quad \tau_0>\tau_{0cr}\end{cases} \qquad (24.19)$$

Cette forte dépendance de $\boldsymbol{G}_{grav}$ en l'expansion de fond du réseau devrait assurément jouer un rôle primordiale dans l'évolution de l'Univers au cours de son expansion cosmologique. On reviendra plus tard sur ce sujet.

Des écarts à la loi de Gravitation de Newton à courte distance

A plus courte distance d, il apparaît une *correction à la loi de Newton* exprimée par un terme multiplicatif contenant des exponentielles, comme le montre la relation *(24.14).*
Ce terme de deuxième ordre fait intervenir la masse de gravitation des deux amas, et n'aura

d'effet que lorsque les deux amas sont assez proches l'un de l'autre.
Le terme de deuxième ordre dans l'expression *(24.16)* de la loi de gravitation approximative va modifier les interactions entre deux amas lorsque ceux-ci sont très proches l'un de l'autre. Mais contrairement aux résultats obtenus en Gravitation Générale à l'aide de la métrique de Schwarzschild, qui prédit une faible augmentation de la force d'attraction en $1/d^4$ aux très faibles distances d, le terme correctif de second ordre de notre théorie conduit à une faible diminution en $1/d^3$ de la force d'attraction aux très faibles distances d!
Par exemple, dans le cas de la planète Mercure qui se situe assez proche du Soleil, le calcul du terme correctif dans *(24.16)* fournit la valeur suivante

$$\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{4c_t^2}\frac{M_{Soleil}}{d_{Mercure}} \cong 5,6\cdot 10^{-7}$$

avec

$$M_{Soleil} \cong 2\cdot 10^{30}\left[kg\right], d_{Mercure} \cong 5,8\cdot 10^{10}\left[m\right], \boldsymbol{G}_{grav} \cong 6,6\cdot 10^{-11}\left[m^3/kg\cdot s^2\right], c_t^2 \cong 10^{17}\left[m^2/s^2\right]$$

ce qui donne pour la période de révolution de Mercure de 88 jours ($7,6\cdot 10^6$ secondes), un accroissement de 2,128 secondes par rapport à la valeur calculée avec la loi de Gravitation de Newton.

24.3 – Les règles et l'horloge locale d'un observateur HS

Considérons un repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ défini par l'observateur ***GO*** *(le **G**rand **O**bservateur imaginaire)* à partir de son référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$. Ce repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ avec son observateur ***PO*** *(le **P**etit **O**bservateur imaginaire local)* est un fait une commodité utilisée par ***GO*** pour résoudre les problèmes d'évolution locale du réseau solide, notamment dans des régions du solide présentant une expansion volumique non nulle, mais qui peut être considérée comme *constante et homogène* au voisinage de l'origine du repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, par exemple en utilisant la *formulation maxwellienne* décrite au chapitre 17.
Mais imaginons maintenant qu'il existe bien une autre catégorie d'observateur local qu'on a appelé observateur ***HS*** *(l'**H**omo **S**apiens)* et qui se trouve réellement dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ car il est lui-même constitué à partir des singularités topologiques du réseau, et notamment à partir de boucles élémentaires de désinclinaison vis qui interagissent entre elles via leur champ de rotation généré par leur charge de rotation propre. Dans son repère local, le ***HS*** n'a évidemment pas accès à la vue globale du réseau dans le référentiel absolu, puisqu'il n'a connaissance que du réseau local dans lequel il vit. L'observateur ***HS*** ne pourra donc que définir ses propres règles $\vec{e}_{yi}$ dans son repère $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3$, en les définissant *à partir des dimensions linéaires des objets contenus dans le réseau dans lequel il vit*. Ceci est illustré à la figure 24.1 pour deux observateurs ***HS*** et ***HS'*** vivant dans deux endroits différents du réseau, où les expansions volumiques respectives du réseau τ et τ' sont différentes.

Les règles et l'horloge de l'observateur HS

Si le réseau présente localement une certaine expansion volumique τ, les règles de ***HS*** devraient satisfaire une relation du type

Hypothèse 2: $\vec{e}_{yi} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}\vec{e}_i$ *(24.20)*

.

où la constante a n'est pas définie à priori et devra donc être déterminée.

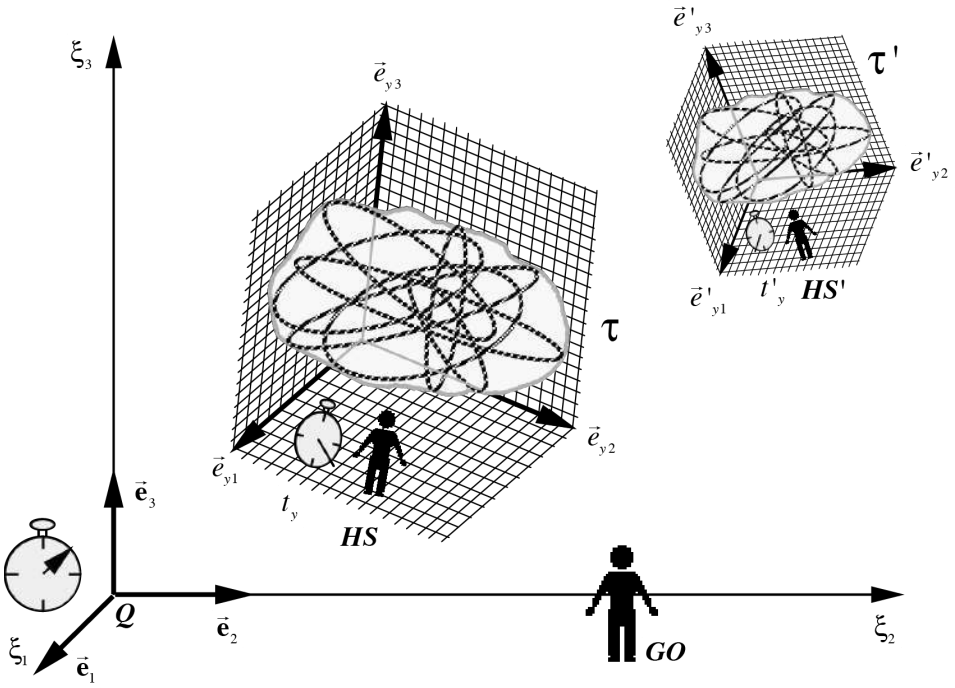


Figure 24.1 *- les règles et horloges locales dans les repères des observateurs* ***HS*** *et* ***HS'***

Ceci implique que les règles d'un ***HS*** seront de longueur différente que celles du ***GO*** si le réseau est localement en contraction ($\tau < 0$) ou en expansion ($\tau > 0$). Si un certain point de l'espace, repéré par le rayon-vecteur $\vec{r}$, est observé simultanément par le ***GO*** et par ***HS***, le rayon-vecteur s'écrira respectivement dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ et dans $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3$ sous la forme

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i = \sum_i x_i \, \mathrm{e}^{-a\tau} \, \vec{e}_{yi} = \sum_i y_i \vec{e}_{yi} \qquad (24.21)$$

de sorte que les coordonnées du point de l'espace se transforme par la relation

$$y_i = \mathrm{e}^{-a\tau} \, x_i \qquad (24.22)$$

D'autre part, le temps mesuré dans $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ à $\tau \neq 0$ doit lui aussi être différent du temps mesuré lorsque $\tau = 0$, de sorte que l'horloge propre de ***HS*** dans son repère $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3$ devra indiquer un temps t_y différent du temps absolu t du ***GO***, mais lié à celui-ci par la relation

Hypothèse 3: $t_y = \mathrm{e}^{b\tau} \, t \qquad (24.23)$

L' horloge d'un observateur HS basée sur la célérité des ondes transversales

Concernant l'horloge de ***HS***, celui-ci devra la construire localement puisqu'il n'a pas accès au temps absolu du ***GO***. Il sera alors logique pour lui de construire une horloge simpliste en utilisant une de ses règles locales et la vitesse des ondes transversales qu'il peut mesurer dans le système de coordonnées de son référentiel propre. Soit une règle de longueur d_0 mesurée par ***GO*** dans un réseau à expansion volumique nulle. La longueur de la même règle placée dans le référentiel du ***HS*** devient, mesurée par le ***GO***

$$d = d_0\, \mathrm{e}^{a\tau} \tag{24.24}$$

Pour parcourir la distance de cette règle, les ondes transversales utilisent un laps de temps Δt mesuré par le ***GO***, et donné par

$$\Delta t \ = \Delta t_0\, \mathrm{e}^{-b\tau} \tag{24.25}$$

Dans le repère $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$, placé dans une région d'expansion volumique τ différente de zéro, la longueur initiale d_0 de la règle devient donc égale à $d_0\, \mathrm{e}^{a\tau}$ le temps de parcours de la règle devient $\Delta t_0\, \mathrm{e}^{-b\tau}$, de sorte que la vitesse des ondes transversales en présence de l'expansion τ vaut

$$c_t = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d_0\, \mathrm{e}^{a\tau}}{\Delta t_0\, \mathrm{e}^{-b\tau}} = \frac{d_0}{\Delta t_0}\mathrm{e}^{(a+b)\tau} = c_{t0}\, \mathrm{e}^{(a+b)\tau} = c_{t0}\, \mathrm{e}^{\tau/2} \tag{24.26}$$

Ceci implique que le temps s'écoule différemment pour ***HS*** dans $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3$ si le réseau est en contraction ou en expansion. On a alors la relation suivante entre les valeurs de a et b due au fonctionnement de l'horloge de ***HS***

$$a + b = 1/2 \tag{24.27}$$

Equations de Maxwell invariantes pour les observateurs HS dans leur repère local

Des relations *(24.20)* et *(24.23)*, on déduit les expressions permettant de relier les dérivés spatiales dans les deux repères

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \mathrm{e}^{-a\tau}\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ A = \mathrm{e}^{-a\tau}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\ A \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \mathrm{e}^{-a\tau}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\, \vec{A} \\ \mathrm{div}\ \vec{A} = \mathrm{e}^{-a\tau}\, \mathrm{div}_y\ \vec{A} \end{cases} \tag{24.35-28}$$

et la dérivé temporelle dans les deux repères

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_y}\frac{\partial t_y}{\partial t} = \mathrm{e}^{b\tau}\frac{d}{dt_y} \tag{24.36-29}$$

En appliquant ces relations aux équations de Maxwell du tableau 17.1, en y remplaçant aussi n par $n_0\, \mathrm{e}^{-\tau}$, on obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} -\dfrac{d(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{dt_y} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\left(\mathrm{e}^{-(a+b)\tau}\, \vec{\phi}^{\,rot}\right) = (2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\, \vec{J}) \\ \mathrm{div}_y\ (2\vec{\omega}^{\acute{e}l}) = (2\,\mathrm{e}^{a\tau}\, \lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(n_0\, \mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\, \vec{p}^{\,rot})}{dt_y} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) + 2K_2(\mathrm{e}^{a\tau}\, \vec{\lambda}^{rot}) \\ \mathrm{div}_y(n_0\, \mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\, \vec{p}^{\,rot}) = 0 \end{cases} \tag{24.37a-30}$$

$$\begin{cases} (2\vec{\omega}^{\acute{e}l}) = \dfrac{1}{(K_2 + K_3)}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) + (2\vec{\omega}^{an}) \\ (n_0\, \mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\, \vec{p}^{\,rot}) = (n_0 m)\left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\, \vec{\phi}^{\,rot} + (C_I - C_L)\,\mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\, \vec{\phi}^{\,rot} \\ + \left(\dfrac{1}{n_0}\left(\mathrm{e}^{(a+b)\tau}\, \vec{J}_I^{\,rot} - \mathrm{e}^{(a+b)\tau}\, \vec{J}_L^{\,rot}\right)\right) \end{array}\right] \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d(2\,\mathrm{e}^{a\tau}\,\lambda)}{dt_y} = -\mathrm{div}_y(2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J}) \\
-\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)(2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J}) = \\
\quad \left(\mathrm{e}^{-(a+b)\tau}\,\vec{\phi}^{\,rot}\right)\dfrac{d(n_0\,\mathrm{e}^{(a+b-1)\tau}\,\vec{p}^{\,rot})}{dt_y} + \left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\dfrac{d(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{dt_y} - \mathrm{div}_y\left(\left(\mathrm{e}^{-(a+b)\tau}\,\vec{\phi}^{\,rot}\right)\wedge\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\right) \\
c_{t0} = \sqrt{\dfrac{K_2+K_3}{mn_0}}
\end{array}
\right. \qquad (24.31)
$$

Pour assurer la cohérence et l'invariance de ces équations, il faut nécessairement que les coefficients de la grandeur $\vec{\phi}^{\,rot}$ soient partout les mêmes, et par conséquent que $a+b=1/2$, et on retrouve donc bien la relation *(24.27)* liée à l'horloge de l'observateur, qui permet d'écrire les équations maxwelliennes sous la forme suivante

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-\dfrac{d(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{dt_y} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\left(\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot}\right) = (2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J}) \\
\mathrm{div}_y\,(2\vec{\omega}^{\acute{e}l}) = (2\,\mathrm{e}^{a\tau}\,\lambda)
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\,(n_0\,\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot})}{dt_y} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) + 2K_2(\mathrm{e}^{a\tau}\,\vec{\lambda}^{\,rot}) \\
\mathrm{div}_y\,(n_0\,\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot}) = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(2\vec{\omega}^{\acute{e}l}) = \dfrac{1}{(K_2+K_3)}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right) + (2\vec{\omega}^{an}) \\
(n_0\,\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot}) = (n_0 m)\left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot} + (C_I - C_L)\,\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot} \\ + \left(\dfrac{1}{n_0}\left(\mathrm{e}^{\tau/2}\,\vec{J}_I^{\,rot} - \mathrm{e}^{\tau/2}\,\vec{J}_L^{\,rot}\right)\right)\end{array}\right]
\end{array}
\right. \qquad (24.32)
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d(2\,\mathrm{e}^{a\tau}\,\lambda)}{dt_y} = -\mathrm{div}_y(2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J}) \\
-\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)(2\,\mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J}) = \\
\quad \left(\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot}\right)\dfrac{d(n_0\,\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot})}{dt_y} + \left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\dfrac{d(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{dt_y} - \mathrm{div}_y\left(\left(\mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot}\right)\wedge\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\right) \\
c_{t0} = \sqrt{\dfrac{K_2+K_3}{mn_0}}
\end{array}
\right.
$$

Introduisons alors les grandeurs locales suivantes dans le repère $\boldsymbol{O y_1 y_2 y_3 t_y}$ de ***HS:***

- les champs de rotation, de moment, de vitesse et de quantité de mouvement

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\vec{\omega}^{\,\acute{e}l}_{(y)} = \vec{\omega}^{\,\acute{e}l} & \left\{
\begin{array}{l}
\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)} = \mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot} \\
\vec{p}^{\,rot}_{(y)} = \mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot}
\end{array}
\right. \\
\vec{m}_{(y)} = \vec{m} &
\end{array}
\right. \qquad (24.33)
$$

- les grandeurs associées aux densités et au flux de charges de rotation

$$\begin{cases} \lambda_{(y)} = \mathrm{e}^{a\tau}\,\lambda \\ \vec{\lambda}^{\,rot}_{(y)} = \mathrm{e}^{a\tau}\,\vec{\lambda}^{\,rot} \\ \vec{J}_{(y)} = \lambda_{(y)}\vec{\boldsymbol{v}}_y = \lambda\,\mathrm{e}^{a\tau}\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{e}^{-\tau/2} = \mathrm{e}^{-b\tau}\,\vec{J} \end{cases} \qquad (24.34)$$

- les grandeurs associées aux concentrations de lacunes et d'interstitiels et aux flux de ces défauts

$$\begin{cases} C_{I(y)} = C_I \\ C_{L(y)} = C_L \\ \vec{J}^{\,rot}_{I(y)} = C_{I(y)} n_0 \vec{\phi}^{\,rot}_{I(y)} = C_I n\,\mathrm{e}^{\tau}\,\vec{\phi}^{\,rot}_I\,\mathrm{e}^{-\tau/2} = \mathrm{e}^{\tau/2}\,\vec{J}^{\,rot}_{I(y)} \\ \vec{J}^{\,rot}_{L(y)} = C_{L(y)} n_0 \vec{\phi}^{\,rot}_{L(y)} = C_L n\,\mathrm{e}^{\tau}\,\vec{\phi}^{\,rot}_L\,\mathrm{e}^{-\tau/2} = \mathrm{e}^{\tau/2}\,\vec{J}^{\,rot}_{L(y)} \end{cases} \qquad (24.35)$$

- et finalement des grandeurs complémentaires suivantes

$$\begin{cases} n_y = n_0 = n\,\mathrm{e}^{\tau} \\ c_{ty} = c_{t0} = c_t\,\mathrm{e}^{-\tau/2} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_y = \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{e}^{-\tau/2} \end{cases} \qquad (24.36)$$

Dans ces expressions, il est parfaitement logique d'avoir posé $\vec{\omega}^{\,él}_{(y)} = \vec{\omega}^{\,él}$ et $\vec{m}_{(y)} = \vec{m}$ puisque ces grandeurs sont associées à des mesures d'angles de rotation, et d'avoir choisi les relations $\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)} = \mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{\phi}^{\,rot}$ et $\vec{p}^{\,rot}_{(y)} = \mathrm{e}^{-\tau/2}\,\vec{p}^{\,rot}$, puisque ces grandeurs sont associées en fait à des vitesses. Par ce changement des variables, on obtient alors *un set d'équations de Maxwell <u>invariantes</u> dans le repère* $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3t_y$ *de l'observateur* ***HS*** (tableau 24.1), c'est-à-dire des équations qui ne dépendent absolument plus de l'expansion locale τ. On constate entre autre que la célérité des ondes transversales devient une constante invariante pour l'observateur ***HS***, quelle que soit l'état d'expansion du réseau dans lequel il vit

On constate aussi que seules les grandeurs associées aux densités et au flux de charges de rotation se transforment de manière dépendante en le paramètre a, alors que toutes les autres grandeurs se transforment de façon logique et prévisible.

Le fait que les équations de Maxwell des observateurs ***HS*** soient invariantes (indépendantes de l'expansion locale τ) implique que les observateurs locaux ***HS*** sont parfaitement incapables de mesurer l'état local d'expansion du réseau dans lequel ils vivent sur la base unique de mesures électromagnétiques basées sur les équations de Maxwell. Notamment, la mesure de la célérité des ondes transversales par les observateurs ***HS*** fournit toujours une valeur invariante, quelle que soit l'état local d'expansion du réseau! Ainsi, les observateurs locaux ***HS*** sont soumis essentiellement aux lois physiques correspondant à l'électromagnétisme, et n'ont connaissance des effets de gravitation associées au champ d'expansion que par des observations indirectes de leurs effets, comme le mouvement des planètes ou le ralentissement de leurs horloges dans un champ de gravitation. C'est pourquoi les ***HS*** devront chercher à expliquer les phénomènes liés à la gravitation par des théories ad-hoc (Gravitation de Newton, Relativité Générale) qui semblent à priori indépendantes des lois de l'électromagnétisme, mais qu'ils vont évidemment chercher à unifier!

.

Tableau 24.1 - Formulation «maxwellienne» <u>invariante</u> des équations d'évolution du réseau cosmologique dans le repère local $Oy_1y_2y_3t_y$ du HS

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l}_{(y)})}{\partial t_y}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\,\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)}\cong(2\vec{J}_{(y)}) \\ \mathrm{div}_y\,(2\vec{\omega}^{\acute{e}l}_{(y)})=(2\lambda_{(y)}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H}=\vec{j} \\ \mathrm{div}\,\vec{D}=\rho \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\left(n_0\vec{p}^{\,rot}_{(y)}\right)}{\partial t_y}\cong-\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\left(\dfrac{\vec{m}_{(y)}}{2}\right)+2K_2\vec{\lambda}^{\,rot}_{(y)} \\ \mathrm{div}_y\left(n_0\vec{p}^{\,rot}_{(y)}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} \\ \mathrm{div}\,\vec{B}=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (2\vec{\omega}^{\acute{e}l}_{(y)})=\dfrac{1}{(K_2+K_3)}\left(\dfrac{\vec{m}_{(y)}}{2}\right)+(2\vec{\omega}^{an}_{(y)}) \\ \left(n_0\vec{p}^{\,rot}_{(y)}\right)=(n_0m)\left[\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)}+\left(C_{I(y)}-C_{L(y)}\right)\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)}+\left(\dfrac{1}{n_0}\left(\vec{J}^{\,rot}_{I(y)}-\vec{J}^{\,rot}_{L(y)}\right)\right)\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \\ \vec{B}=\mu_0\left[\vec{H}+\left(\chi^{para}+\chi^{dia}\right)\vec{H}+\vec{M}\right] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(2\lambda_{(y)})}{\partial t_y}\cong-\mathrm{div}_y(2\vec{J}_{(y)}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathrm{div}\,\vec{j} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\left(\dfrac{\vec{m}_{(y)}}{2}\right)(2\vec{J}_{(y)})\cong \\ \quad\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)}\dfrac{\partial(n_0\vec{p}^{\,rot}_{(y)})}{\partial t_y}+\left(\dfrac{\vec{m}_{(y)}}{2}\right)\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l}_{(y)})}{\partial t_y}-\mathrm{div}_y\left(\vec{\phi}^{\,rot}_{(y)}\wedge\left(\dfrac{\vec{m}_{(y)}}{2}\right)\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\vec{E}\vec{j}= \\ \quad\vec{H}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\mathrm{div}\left(\vec{H}\wedge\vec{E}\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c_{t0}=\sqrt{\dfrac{K_2+K_3}{mn_0}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} \end{array}\right.$$

24.4 – Observateur HS plongé dans le champ gravitationnel d'un amas

La figure 24.1 illustre bien ici l'existence d'une forte analogie entre notre théorie et la théorie de la *Relativité Générale d'Einstein*. En effet, les règles et l'horloge propres d'un ***HS*** vivant en un certain endroit du réseau dépendent de l'expansion volumique locale τ du réseau, de façon analogue à ce que stipule la Relativité Générale pour les règles et l'horloge propres d'un observateur situé dans un champ de gravitation donné. Dans le cas du réseau illustré à la figure 24.1, on comprend bien que le réseau joue le rôle d'un *«éther»* qui impose la taille des règles de l'observateur ***HS***, alors que c'est la vitesse des ondes transversales au sein du réseau (en fait la vitesse de transport de l'information) qui impose l'allure de l'horloge propre de ***HS***.

D'autre part, l'existence de trois degrés de liberté sur les paramètres a, b, α_{BV} et β_{BV} est

assez étonnante, car elle implique qu'il existe encore un choix possible à ce niveau, qui ne peut pas être déterminé sur la base de nos connaissances actuelles du réseau cosmologique. En fait, un choix arbitraire des valeurs "libres" de a, α_{BV} et β_{BV} ne devrait pas entraîner d'incohérences dans le système, et le réseau cosmologique ainsi obtenu pourrait être parfaitement viable. Par conséquent, on peut considérer que les paramètres a, α_{BV} et β_{BV} sont réellement *des propriétés propres au réseau cosmologique*, en fait *des constantes intrinsèques du réseau*, au même titre que le sont les modules élastiques K_i ou la masse d'inertie m par maille du réseau. La détermination de ces constantes passe donc forcément par l'expérimentation, autrement dit par la mesure des propriétés réelles du réseau cosmologique associées à ces deux constantes!

Des lois de transformation dans le champ gravitationnel d'un amas

En combinant les relations *(24.18), (24.20), (24.22)*, on peut écrire les règles de transformation pour passer dans le référentiel local $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3t_y$ d'un ***HS*** placé à une distance r dans le champ de gravité d'un amas de masse M_0^{amas}, en fonction des paramètre inconnus a, α_{BV} et β_{BV}

$$\tau_{ext\,LD}^{amas}(r) \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{\left(6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}\right)c_t^2 r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{e}_{yi} = \mathrm{e}^{a\tau}\,\vec{e}_i = \mathrm{e}^{-\frac{a}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,\vec{e}_i \\ y_i = \mathrm{e}^{-a\tau}\,x_i = \mathrm{e}^{+\frac{a}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,x_i \\ t_y = \mathrm{e}^{b\tau}\,t = \mathrm{e}^{-\frac{b}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,t \end{cases} \qquad (24.37)$$

Les équations de transformation *(24.40)* peuvent, à une certaine distance d'un amas de masse M_0^{amas}, être écrites de manière approximatives par développement des exponentielles

$$\begin{cases} \vec{e}_{yi} \cong \left(1-\dfrac{a}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}+\ldots\right)\vec{e}_i \\ y_i \cong \left(1+\dfrac{a}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}+\ldots\right)x_i \\ t_y \cong \left(1-\dfrac{b}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}+\ldots\right)t \end{cases} \qquad (24.38)$$

En Relativité Générale, les dépendances de la règle radiale et de l'horloge d'un observateur soumis au champ de gravitation d'un objet de masse M_0^{amas} sont déduites de la *métrique de Schwarzschild.* Celle-ci est obtenue dans le cas d'un objet massif à symétrie sphérique en postulant une métrique invariante vis-à-vis des rotations, qui s'écrit

$$ds^2 = c_t^2\left(1-\frac{2\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{amas}}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{amas}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \qquad (24.39)$$

On en déduit que la règle radiale et l'horloge de l'observateur dépendent symétriquement de la distance r le séparant de l'objet de masse M_0, avec des expressions similaires aux expressions *(24.38),* mais avec un coefficient 1 devant $\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}/c_t^2 r$

.

$$\begin{cases} r_y \cong \left(1-\dfrac{\boldsymbol{G}}{c^2}\dfrac{M_0}{r}\right)^{-1} r \cong \left(1+\dfrac{\boldsymbol{G}}{c^2}\dfrac{M_0}{r}+\ldots\right) r \\ t_y \cong \left(1-\dfrac{\boldsymbol{G}}{c^2}\dfrac{M_0}{r}\right) t \end{cases} \qquad (24.40)$$

La dilatation du temps dans un champ de gravité, représentée par la deuxième relation dans *(24.40),* a été vérifiée expérimentalement avec une très grande précision[1], même sur des dénivelés aussi petits que 1 mètre à la surface de la terre, et on tient actuellement compte de cet effet dans les systèmes de navigation très précis, comme le *GPS*. Cet effet vérifié expérimentalement peut donc être utilisé pour la détermination des paramètres a, α_{BV} et β_{BV}, en assurant que la dernière relation *(24.38)* corresponde à la deuxième relation *(24.40),* donc que

$$\frac{b}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}=1 \quad \Rightarrow \quad b=6\alpha_{BV}+4\beta_{BV} \qquad (24.41)$$

De la courbure des rayons d'ondes transversales au voisinage d'un amas massif

On peut encore vérifier l'analogie de notre théorie avec la Relativité Générale d'Einstein, par exemple en calculant la courbure des rayons d'ondes transversales au voisinage d'un amas massif (fig. 24.2), puisque la mesure de cet effet au début du 20ème siècle fut la première vérification expérimentale de la Relativité Générale d'Einstein.

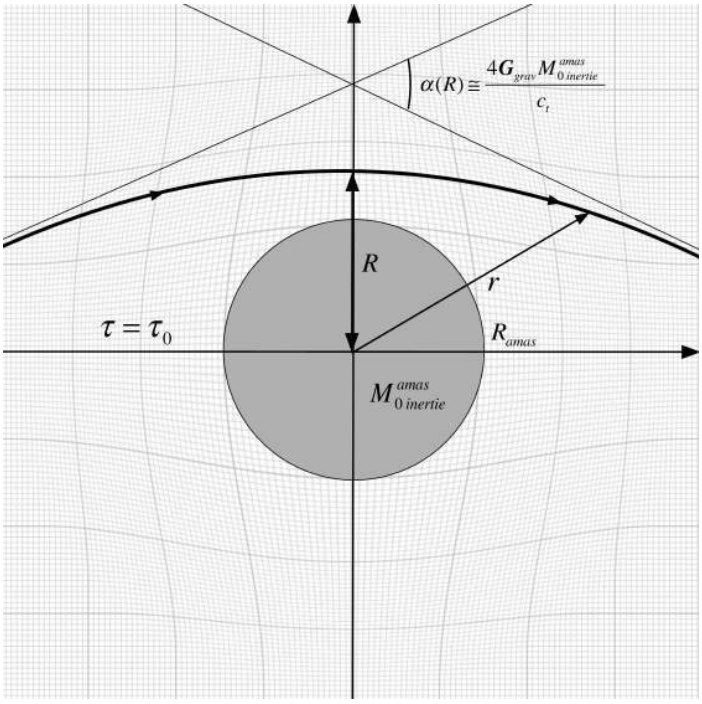


Figure 24.2 *- courbure des rayons d'ondes transversales au voisinage d'un amas massif*

[1] voir par exemple: *C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, D. J. Wineland : "Optical Clocks and Relativity", Science, vol. 329, 5999, pp. 1630-1633*

Au voisinage d'un amas massif, la vitesse des ondes transversales $c_t(r)$ dépend de la distance r au centre de l'amas. Ceci implique que les directions de deux rayons d'ondes perpendiculaires à une droite passant par le centre de l'amas, et passant aux distances r et $r+dr$ de l'amas vont présenter un angle infinitésimale $d\alpha$ tel que

$$\Delta\alpha(r)=\frac{c_t(r+dr)\Delta t-c_t(r)\Delta t}{dr}=\frac{\partial c_t}{\partial r}\Delta t=\frac{\partial c_t}{\partial r}\frac{\Delta t}{\Delta r}\Delta r=\frac{1}{c_t}\frac{\partial c_t}{\partial r}\Delta r \qquad (24.42)$$

On peut utiliser alors la dépendance de la célérité $c_t(r)$ en le champ de gravitation $\tau_{ext\,LD}^{amas}(r)$, en écrivant

$$\Delta\alpha(r)=\frac{1}{c_t}\frac{\partial c_t}{\partial r}\Delta r=\frac{1}{c_t}\frac{\partial c_t\left(\tau_{ext\,LD}^{amas}(r)\right)}{\partial \tau_{ext\,LD}^{amas}(r)}\frac{\partial \tau_{ext\,LD}^{amas}(r)}{\partial r}\Delta r=\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{ext\,LD}^{amas}(r)}{\partial r}\Delta r \qquad (24.43)$$

Comme $c_t(\tau)=c_{t0}\,\mathrm{e}^{\tau/2}$, en utilisant l'expression *(24.40)* de $\tau_{ext\,LD}^{amas}(r)$, on a

$$\Delta\alpha(r)=\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{4\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2r^2}\Delta r \qquad (24.44)$$

Comme l'onde va parcourir le chemin représenté à la figure 24.2, les tangentes à l'infini de l'onde incidente et de l'onde déviée forment un angle total $\alpha(R)$ dépendant de la distance minimum R du centre de l'amas à laquelle passe l'onde. La moitié de l'angle total $\alpha(R)$ peut alors se déduire approximativement en intégrant $\Delta\alpha(r)$ pour des distances r au centre de l'amas allant de R à R_∞, de sorte que

$$\alpha(R)\cong 2\int_R^{R_\infty}\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{4\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2r^2}dr=\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{2\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2}\int_R^{R_\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{2\left(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}\right)c_t^2R} \qquad (24.45)$$

La Relativité Générale prévoit une courbure valant $\alpha(R)\cong 4\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}/c_t^2R$, et le calcul de cette valeur dans le cas d'un rayon lumineux à incidence rasante avec le soleil donne un angle de déviation de 1,75'' d'arc.

Quant aux valeurs expérimentales de la déviation de la lumière par le soleil, mesurées par *Eddington* au début du 20ème siècle (mai 1919) au cours d'une éclipse de soleil, elles ont donné approximativement $1{,}98\pm0{,}12$'' (à Sobral au Brésil) et $1{,}61\pm0{,}31$'' d'arc (à Sao Tomé-et-Principe dans le Golfe de Guinée), ce qui correspond assez bien à la valeur calculée théoriquement par la Relativité Générale, malgré les nombreuses difficultés de la mesure expérimentale!

Si on admet cette vérification expérimentale, il faut que la valeur obtenue par nos calculs *(24.45)* corresponde à celle prévue par la Relativité Générale, à savoir $4\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}/c_t^2R$. Il vient donc la relation suivante pour les paramètres α_{BV} et β_{BV}

$$\frac{1}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}=4 \quad\Rightarrow\quad 6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}=1/4 \qquad (24.46)$$

Finalement, la combinaison des relations *(24.27)*, *(24.41)* et *(24.46)* conduit à définir les relations suivantes pour les paramètres a, b, α_{BV} et β_{BV} afin de satisfaire les observations expérimentales

$$\begin{cases} a+b=1/2 \\ b=6\alpha_{BV}+4\beta_{BV} \\ 6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}=1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/4 \\ b=1/4 \\ 6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}=1/4 \end{cases} \qquad (24.47)$$

.

De la symétrie des lois de transformation espace-temps

Lors de la transformation de Lorentz décrite au chapitre 20, les lois de transformation sont symétriques par rapport au temps et l'espace, tout comme les lois de transformation en Relativité Générale dans le cas de la métrique de Schwarzschild *(24.40)*. Parmi tous les résultats possibles qu'on aurait pu imaginer pour les paramètres a, b, α_{BV} et β_{BV}, les résultats *(24.47)* obtenus à partir de la dilatation du temps et de la courbure des rayons d'onde en faible champ de gravité fournissent opportunément des lois de transformation symétriques, puisqu'on obtient non seulement que $a = b$, mais aussi que

$$\tau_{ext\,LD}^{amas}(r) \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{e}_{yi} = \mathrm{e}^{\tau/4}\,\vec{e}_i = \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,\vec{e}_i \cong \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}\right)\vec{e}_i \\ y_i = \mathrm{e}^{-\tau/4}\,x_i = \mathrm{e}^{+\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,x_i \cong \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}\right)x_i \\ t_y = \mathrm{e}^{\tau/4}\,t = \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\,t \cong \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}\right)t \end{cases} \qquad (24.48)$$

On peut par conséquent émettre ici la *conjecture* suivante, qui regroupe les effets de dilatation du temps et de la courbure des rayons d'onde en champ de gravité faible:

Conjecture 9: *la métrique de notre théorie dans un champ gravitationnel faible doit être la même que la métrique de Schwarzschild en Relativité Générale* *(24.49)*

Du choix des valeurs de α_{BV} et β_{BV}

Il nous reste encore un degré de liberté pour le choix des valeurs des paramètres α_{BV} et β_{BV}, qui doivent être reliés par l'expression $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$. Cependant, le fait de connaître exactement les valeurs de α_{BV} et β_{BV} n'est pas important en ce qui concerne les propriétés gravitationnelles de la boucle, car le fait que $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$ implique que la masse d'inertie M_0^{BV} et l'énergie de distorsion E^{BV} d'une boucle, ainsi que les grandeurs $\boldsymbol{G}_{grav}$, $\tau_{ext\,LD}^{amas}(r)$ et $\boldsymbol{F}_{grav}(d)$ ne dépendent pas explicitement de α_{BV} et β_{BV}, comme le montrent bien les relations du tableau 24.2.

Le choix exact des paramètres α_{BV} et β_{BV} dépend évidemment de la nature profonde du réseau cosmologique, ce qui n'est pas du ressort de ce traité. Mais la solution la plus simple à imaginer voudrait que β_{BV} soit nul, car, en ce cas, la torsion $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ de la boucle de désinclinaison vis deviendrait une constante indépendante de l'expansion du réseau, par exemple un multiple de $\pi/2$ pour un réseau cubique, ou un multiple de $\pi/3$ pour un réseau hexagonal, ce qui paraît évidemment le plus logique.

Mais une valeur nulle de β_{BV} impliquerait aussi que α_{BV} vaudrait 1/24, et donc que le rayon de la boucle $R_{BV} = R_{BV0}\,\mathrm{e}^{\tau/24}$ dépendrait beaucoup moins de l'expansion du réseau que le pas du réseau $a = a_0\,\mathrm{e}^{\tau/3}$ ou que la longueur $\vec{e}_{yi} = \mathrm{e}^{\tau/4}\,\vec{e}_i$ de la règle de l'observateur ***HS***.

Ne pouvant faire un choix explicite sûr des valeurs des paramètres α_{BV} et β_{BV}, on laissera ce problème ouvert, tout en se rappelant qu'il existe ce degré de liberté pour le choix de leurs valeurs, qui doivent simplement être reliées par l'expression $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$.

Tableau 24.2 - Les lois de transformation liées à l'expansion et le comportement gravitationnel des amas de boucles de désinclinaison vis

Dépendance des boucles de désinclinaison vis en l'expansion

$$\begin{cases} R_{BV} = R_{BV0}\, e^{\alpha_{BV}\tau} \\ \Omega_{BV} = \Omega_{BV0}\, e^{\beta_{BV}\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{\lambda BV} = q_{\lambda BV0}\, e^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} \\ Q_{\lambda}^{amas} = \sum_i q_{\lambda BV(i)} = Q_{\lambda 0}^{amas}\, e^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} \end{cases}$$

$$avec \quad 3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$$

Dépendance de la masse et de l'énergie des boucles vis en l'expansion

$$\begin{cases} M_0^{BV} = M_{00}^{BV}\, e^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV}-1)\tau} = M_{00}^{BV}\, e^{-7\tau/8} \\ M_0^{amas} = \sum_i M_{0(i)}^{BV} = M_{00}^{amas}\, e^{-7\tau/8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^{BV} = M_0^{BV} c_t^2 = M_{00}^{BV} c_{t0}^2\, e^{(3\alpha_{BV}+2\beta_{BV})\tau} = M_{00}^{BV} c_{t0}^2\, e^{\tau/8} \\ E^{amas}(\tau) = \sum_i M_{0(i)}^{BV} c_t^2 = M_{00}^{amas} c_{t0}^2\, e^{\tau/8} \end{cases}$$

Comportement gravitationnel des boucles de désinclinaison vis

$$\begin{cases} G_{grav} = \dfrac{c_t^4}{8\pi\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)R_\infty^2} \\ \tau_{ext\,LD}^{amas}(r) \cong -\dfrac{4G_{grav} M_0^{amas}}{c_t^2 r} \\ F_{grav}(d) = G_{grav} \dfrac{M_{0(1)}^{amas} M_{0(2)}^{amas}}{d^2}\left(1 - G_{grav}\dfrac{M_{0(1)}^{amas} + M_{0(2)}^{amas}}{4c_t^2 d} + \ldots\right) \end{cases}$$

Lois de transformation entre les référentiels $Ox_1x_2x_3$ et $Oy_1y_2y_3$

$$\begin{cases} \vec{e}_{yi} = e^{\tau/4}\vec{e}_i = e^{-\frac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}\vec{e}_i \cong \left(1 - \dfrac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r} + \ldots\right)\vec{e}_i \\ y_i = e^{-\tau/4}x_i = e^{\frac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}x_i \cong \left(1 + \dfrac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r} + \ldots\right)x_i \\ t_y = e^{\tau/4}t = e^{-\frac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r}}t \cong \left(1 - \dfrac{G_{grav}M_0^{amas}}{c_t^2 r} + \ldots\right)t \end{cases}$$

24.5 – Analogies et différences d'avec la Relativité Générale d'Einstein

De la sphère de Schwarzschild d'un trou noir

Admettons qu'une boucle de désinclinaison vis de masse d'inertie M_0^{BV} se trouve au confin du réseau, et qu'un amas de singularités de masse inertielle $M_0^{amas} >> M_0^{BV}$ se trouve au centre du réseau. La force gravitationnelle agissant sur la boucle s'écrit approximativement

$$\boldsymbol{F}_{grav}^{BV}(r) \cong \boldsymbol{G}_{grav} \frac{M_0^{amas} M_0^{BV}}{r^2} \qquad (24.50)$$

Sous l'effet de cette force, la boucle de désinclinaison vis subira une accélération dans la direction de l'amas de singularités, et l'énergie potentielle gravitationnelle de la boucle se transformera progressivement en une énergie cinétique de la boucle qui vaudra, en fonction de sa distance d de l'amas

$$\boldsymbol{E}_{cinétique}^{BV}(r) = \left| \int_{R_\infty}^{R} \boldsymbol{F}_{grav}^{BV}(r) dr \right| = \boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas} M_0^{BV} \left| \int_{R_\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} \right| \cong \boldsymbol{G}_{grav} \frac{M_0^{amas} M_0^{BV}}{R} \qquad (R << R_\infty) \qquad (24.51)$$

Mais l'énergie cinétique de la boucle s'écrit aussi, dans le cas non-relativiste

$$\boldsymbol{E}_{cinétique}^{BV} = M_0^{BV} \boldsymbol{v}^2 / 2 \qquad (24.52)$$

de sorte que la vitesse de la boucle en fonction de la distance d la séparant de l'amas dépend *de la constante de gravitation* et *de la masse d'inertie de l'amas*

$$\boldsymbol{v}^2(R) = 2\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas} / R \qquad (24.53)$$

Comme *la masse d'inertie de la boucle n'intervient pas dans cette relation*, cette relation reste valable même pour des vitesses relativistes de la boucle. Cependant, on sait que l'énergie relativiste totale $E_{\boldsymbol{v}}^{BV}(\boldsymbol{v})$ de la boucle va tendre vers l'infini lorsque sa vitesse $\boldsymbol{v}$ tendra vers la vitesse des ondes transversale c_t (voir figure 20.1), de sorte que la condition suivante doit être satisfaite avant d'atteindre la vitesse limite

$$\boldsymbol{v}^2(R) = 2\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas} / R \le c_t^2 \qquad (24.54)$$

Cette condition implique l'existence d'une *distance critique* R_{cr} pour laquelle l'énergie de la boucle devient infinie

$$R_{cr} = 2\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas} / c_t^2 \qquad (24.55)$$

Cette distance critique R_{cr} ne dépend que de la *masse* M_0^{amas} de l'amas, et n'existe évidemment que si le rayon de l'amas est inférieur à d_{cr}.

Elle est appelée *le rayon de Schwarzschild* de l'amas et correspond en fait à la limite au-delà de laquelle la boucle ne peut irrémédiablement plus quitter l'amas puisqu'il lui faudrait alors une énergie infinie pour le faire. Ainsi, l'amas de masse M_0^{amas} dont le rayon R_{amas} satisferait la condition

$$R_{amas} < R_{cr} = R_{Schwarzschild} = 2\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas} / c_t^2 \qquad (24.56)$$

serait en fait un *trou noir* qui absorberait irrémédiablement toute singularité qui aurait le malheur de s'approcher de lui à une distance $R \le R_{Schwarzschild}$.

Ce *rayon de Schwarzschild* [2] $R_{Schwarzschild}$ est obtenu exactement de la même manière en Relativité, de sorte qu'il est identique dans notre théorie et en Relativité Générale.

De la sphère des perturbations d'un trou noir

Dans notre théorie, nous avons déjà abordé la notion de trou noir en définissant les conditions *(15.3)* pour qu'une singularité du champ de gravitation se comporte comme un trou noir *vis-à-vis des ondes transversales*, en définissant le rayon r_{cr} de la *sphère des perturbations* autour de la singularité, à savoir la sphère au-delà de laquelle toute onde transversale est piégée par la singularité. En appliquant alors les conditions *(15.3)* à l'amas de masse M_0^{amas} générant le champ gravitationnel *(24.37)*, à savoir

$$\tau_{ext\,LD}^{amas}(r) \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{\left(6\alpha_{BV} + 4\beta_{BV}\right) c_t^2 r} \tag{24.57}$$

on obtient l'expression suivante du rayon $r_{sphère}$ de la *sphère des perturbations* de l'amas

$$\left.\frac{\partial \tau_{ext\,LD}^{amas}(r)}{\partial t}\right|_{r_{sphère}} = \frac{2}{r_{sphère}} \quad \Rightarrow \quad r_{sphère} = \frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{2\left(6\alpha_{BV} + 4\beta_{BV}\right) c_t^2} = \frac{2\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{c_t^2} \tag{24.58}$$

Avec les valeurs *(24.47)* des paramètres a, b, α_{BV} et β_{BV}, on obtient donc que le rayon de la sphère des perturbations vaut $R_{sphère\ perturbations} = 2\boldsymbol{G}M / c^2$, c'est-à-dire la même valeur que le rayon de la sphère de Schwarzschild. En Relativité Générale, on définit la *sphère des photons*, c'est-à-dire la limite dans le voisinage d'un trou noir à partir de laquelle aucun photon ne peut s'échapper du trou noir, dont le rayon vaut $R_{sphère\ photons} = 3\boldsymbol{G}M / c^2$, à savoir les 3/2 du rayon de Schwarzschild. On va revenir sur cette différence troublante.

Du rayon limite de dilatation infinie du temps d'un observateur tombant dans un trou noir

Dans notre théorie, le temps propre d'un ***HS*** s'écrit en fait de manière exacte comme un terme exponentiel proportionnel à $-1/r$

$$\frac{t_y}{t} = \mathrm{e}^{-\frac{b}{6\alpha_{BV}+4\beta_{BV}}\frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{c_t^2 r}} = \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{c_t^2 r}} \tag{24.59}$$

Avec cette expression exponentielle, on constate que le temps propre de l'observateur ***HS*** qui s'approche à très courte distance d'un amas *se dilate infiniment lorsque la distance r tend vers zéro.*

En Relativité Générale, on dit que le temps propre du ***HS*** semble se dilater de manière infinie lorsque le ***HS*** s'approche d'une distance limite critique r_{cr} clculée sur la base de la métrique de Schwarzschild, à l'aide de la relation *(24.40)*

$$t_y \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{amas}}{r}\right) \to 0 \quad \Rightarrow \quad r_{cr} = \frac{\boldsymbol{G}_{grav} M_0^{amas}}{c_t^2} \tag{24.60}$$

Cette distance limite est donc plus petite que le rayon de la sphère de Schwarzschild, le point

---

[2] *Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a point mass according to Einstein's theory. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Physik-Math. Kl., Vol. 189, pp.189-196. (translated by Helga and Roger Stuewer).*

de non-retour d'un trou noir. Or, il semble assez difficile d'imaginer que le temps d'un ***HS*** semble s'arrêter lorsque le ***HS*** atteint cette distance critique, et il est étonnant que cette distance critique soit la moitié du rayon de Schwarzschild, et non pas simplement le rayon de Schwarzschild lui-même, ou bien alors le rayon nul comme dans notre théorie!

Des différences des rayons caractéristiques des trous noirs

En Relativité Générale, les trous noirs les plus simples sont caractérisés par trois rayons critiques: le *rayon de la sphère des photons* qui vaut $R_{sphère\ photons} = 3GM/c^2$, le *rayon de l'horizon ou du point de non-retour*, appelé *rayon de Schwarzschild*, qui vaut $R_{Schwrzschild} = 2GM/c^2$ et *le rayon pour lequel la dilatation du temps de l'observateur tend vers l'infini*, qui vaut approximativement $R_{dilatation\ temps\to\infty} \cong GM/c^2$. Le fait qu'il existe trois rayons différents pour les trous noirs en Relativité Générale est assez intriguant, tout comme d'ailleurs l'existence d'un rayon non nul pour lequel la dilatation du temps de l'observateur tend vers l'infini! C'est d'ailleurs essentiellement pour cette raison qu'on dit qu'il n'est pas possible de décrire par la Relativité Générale la physique des objets qui tombent dans un trou noir au-delà de la sphère de Schwarzschild.

Dans notre théorie au contraire, les rayons de la sphère des perturbations et du point de non-retour sont tous les deux semblables au rayon de Schwarzschild ($2GM/c^2$), ce qui est très satisfaisant pour l'esprit, car il n'existe ainsi qu'une seule limite représentant *l'horizon d'un trou noir*. D'autre part, il n'existe pas dans notre théorie de rayon limite pour lequel la dilatation du temps de l'observateur tendrait vers l'infini, de sorte que notre théorie n'est pas limitée pour la description d'un trou noir au-delà de la sphère de Schwarzschild. Or notre théorie est équivalente à la Relativité Générale tant que le champ de gravitation est faible et satisfait la condition $\tau^{amas}_{ext\ LD}(r) < 1$. La raison en est que ce sont les deux effets expérimentalement vérifiés, à savoir la dilatation du temps et la courbure des rayonnements en champs faibles, qui ont été choisies pour rendre notre théorie identique à celle de la Relativité Générale en champ gravitationnel faible. Par contre, notre théorie devient différente pour les champs de gravitation forts, comme le montrent les expressions *(24.37)* comparées à *(24.40)*, ce qui explique les différences que nous venons de décrire en ce qui concerne les rayons caractéristiques des trous noirs.

De l'analogie formelle entre l'équation 3D de flexion spatiale du réseau cosmologique et l'équation 4D de champ d'Einstein en Relativité Générale

La courbure spatiale locale du réseau cosmologique, telle que mesurée par l'observateur ***GO***, est caractérisée par *le vecteur de flexion*, donné par la relation *(8.35)*, à savoir

$$\vec{\chi} = -\sum_k \vec{e}_k \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\alpha}_k - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} - \sum_k \vec{e}_k \wedge \vec{\lambda}_k = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\omega} + \vec{\lambda} \qquad (24.61)$$

Il est remarquable de constater que ce vecteur de flexion peut être directement obtenu à partir de l'*équation de Newton (13.14)* du réseau cosmologique. On obtient ainsi la valeur du champ de flexion dans le réseau cosmologique sous la forme

$$\vec{\chi} = \underbrace{-\frac{4K_2/3 + 2K_1}{2(K_2+K_3)}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau}_{champ\ "gravifique"} + \underbrace{\frac{1}{2(K_2+K_3)}\left(n\frac{d\vec{p}}{dt} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F^{déf}\right)}_{énergie-impulsion} + \underbrace{\frac{K_3}{K_2+K_3}\vec{\lambda}}_{charge\ de\ flexion} \qquad (24.62)$$

On en déduit par conséquent que l'existence d'une *courbure topologique locale du réseau* vue par le ***GO*** via le vecteur de flexion dépend à la fois de trois termes:

- le gradient de l'expansion volumique locale, qui n'est rien d'autre que le gradient du *champ «gravitationnel»* τ *au sein du réseau,*
- les variations temporelles de la quantité de mouvement local du réseau et le gradient de la densité d'énergie élastique $F^{él}$ stockée dans le réseau, terme qu'on pourrait qualifier de *«vecteur énergie-impulsion» dû aux singularités présentes dans le réseau,*
- la densité $\vec{\lambda}$ de charges de flexion au sein du réseau, qui reflète la présence de *singularités topologiques au sein du réseau*, comme des dislocations et/ou des désinclinaisons.

Par contre, pour un observateur local ***HS***, à la fois *ses règles <u>et</u> son horloge dépendent de l'expansion volumique locale*, de sorte qu'une équation similaire à l'équation *(24.62)* devrait nécessairement devenir *une équation quadri-dimensionnelle de courbure de l'espace-temps*, que nous n'allons évidemment pas chercher à établir ici!

L'équation *(8.39),* à savoir

$$\mathrm{div}\,\vec{\chi} = \mathrm{div}\,\vec{\lambda} = \theta \qquad (24.63)$$

permet d'écrire l'équation *(24.62)* sous la forme suivante

$$\mathrm{div}\,\vec{\chi} = \mathrm{div}\left[\frac{1}{2\left(K_2+K_3\right)}\left(n\frac{d\vec{p}}{dt} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F^{déf}\right) - \frac{4K_2/3+2K_1}{2\left(K_2+K_3\right)}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tau + \frac{K_3}{K_2+K_3}\theta\right] = \theta \qquad (24.64)$$

Cette relation montre que *la divergence du vecteur de flexion est égale à la densité de charges de courbure* dues aux singularités topologiques contenues dans le réseau, et est par conséquent nulle s'il n'existe pas de charges de courbure. De plus, dans le cas où il n'existe pas de charges de courbure, *la divergence du vecteur de flexion n'est rien d'autre que la divergence de l'équation de Newton du réseau* !

La relation *(24.62)* donnant la courbure spatiale du réseau à partir de l'équation de Newton du réseau est l'analogue tridimensionnel de *l'équation quadridimensionnelle de champ d'Einstein de la Relativité Générale*[3], qui s'écrit

$$\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T} \qquad (24.65)$$

dans laquelle $\boldsymbol{G}$ est le fameux *tenseur de courbure d'Einstein (Einstein tensor)*, qui s'exprime en termes du *tenseur de courbure de Ricci*, correspondant à une certaine partie du *tenseur de Riemann* qui décrit les courbures de l'espace-temps

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \qquad (24.66)$$

Quant au tenseur $\boldsymbol{T}$, c'est un *«objet géométrique»* appelé le *tenseur d'énergie-impulsion (stress-energy tensor)* qui caractérise la matière contenue dans l'espace.

Cette équation de champ d'Einstein montre comment le tenseur d'énergie-impulsion de la matière génère une courbure moyenne de l'espace-temps dans son voisinage. Elle permet entre autre de calculer le champ de courbure statique d'un objet massif, ou bien la génération d'ondes de gravitation par un objet massif mobile. De plus, elle contient aussi les équations de mouvement («équations de Newton») pour la matière dont le tenseur d'énergie-impulsion gé-

---

[3] *Un très bon exposé de la Relativité Générale d'Einstein peut se trouver dans:*
Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W.H. Freeman and Co, San Francisco 1973

nère la courbure de l'espace-temps.
Dans le cas de l'équation de champ d'Einstein, il faut encore noter que le tenseur d'énergie-impulsion est un tenseur à divergence nulle

$$\vec{\nabla} \bullet \boldsymbol{T} = 0 \qquad (24.67)$$

ce qui assure que les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique sont respectées. Cette équation *(24.67)* représente donc en fait *l'équation de mouvement de la matière* en Relativité Générale.
Il existe très clairement une analogie forte entre l'équation de champ d'Einstein *(24.65)* et l'équation du champ de flexion *(24.62)* dans le cas d'un *réseau cosmologique*, car cette dernière relie aussi un «vecteur géométrique» de courbure spatiale à une sorte de «vecteur énergie-impulsion» au sein du réseau solide, qui contient à la fois les variations temporelles de la quantité de mouvement local du réseau, le gradient de l'expansion volumique locale, et le gradient de l'énergie élastique $F^{él}$ stockée dans le réseau, grandeurs qui sont toutes influencées par la présence de charges de torsion ou de charges de courbure au sein du réseau. De plus, cette équation *(24.62)* dérive directement de l'équation de Newton du réseau. Cependant, à la différence de l'équation de champ d'Einstein, cette équation est déduite par le ***GO*** qui a la chance de posséder une horloge absolue, de sorte qu'il n'existe pas de *«courbure du temps»* pour lui, et que, par conséquent, son équation de courbure est purement spatiale!
De plus, dans le cas de l'équation de champ d'Einstein, l'équation *(24.67)* de la divergence du tenseur d'énergie-impulsion représente *l'équation de mouvement de la matière* en Relativité Générale, tout comme l'équation de la divergence de la courbure *(24.64)* représente la divergence de l'équation de mouvement de Newton du réseau en l'absence de charges de courbure.
Par contre, dans les équations de champ d'Einstein, la notion de charges de courbure associées à des singularités topologiques n'existe pas, ce qui apparaît dans le fait que la divergence du tenseur énergie-impulsion est toujours nulle, de sorte qu'il n'existe pas d'équation similaire à l'équation *(24.64)* en Relativité Générale!
Il est très tentant de dire ici que *la notion de charges de courbure*, et que *l'équation géométrique pure* $\mathrm{div}\,\vec{\chi} = \mathrm{div}\,\vec{\lambda} = \theta$ répond à la question que se posait Einstein lorsqu'il disait que, dans l'équation de champ *(24.65)*, le terme de gauche, le tenseur de courbure de Ricci, est constitué *de marbre fin*, alors que le terme de droite, le tenseur d'énergie-impulsion, est constitué *de bois de mauvaise qualité*, voulant exprimer par là que le terme de droite n'est qu'une représentation phénoménologique de la matière injectée dans l'équation de champ, qui n'est pas dérivée directement d'un principe premier comme l'est le terme de gauche! Dans notre théorie par contre, le terme de droite de l'équation *(24.62)* est bien fait *de marbre fin,* puisqu'il est dérivé directement d'un principe premier qui est *l'équation de Newton du réseau*!

Chapitre 25

Interactions «gravitationnelles» à longue portée entre singularités topologiques du réseau

Alors que les amas de singularités composés de boucles de désinclinaison vis satisfont la gravitation de Newton, et la plupart des résultats de la Relativité Générale, on va se poser la question de savoir comment se comportent, vis-à-vis de la gravitation, les autres singularités topologiques, comme les boucles de dislocation coin, les boucles de dislocation mixte, les lacunes macroscopiques et les interstitiels macroscopiques. On en déduira ici l'ensemble des forces d'interaction gravitationnelles à longue portée entre les diverses singularités topologiques et leurs comportements.

25.1 – Discussion de la dépendance des singularités topologiques du réseau cosmologique en l'expansion du réseau

La boucle de désinclinaison vis, source de charge électrique

Dans le cas d'une boucle de désinclinaison vis, on a vu au chapitre précédent (tableau 24.2) que les dépendances en l'expansion volumique du rayon de la boucle, de son angle de torsion, de sa charge de rotation et de sa masse d'inertie s'écrivent

$$\begin{cases} R_{BV} = R_{BV0}\, \mathrm{e}^{\alpha_{BV}\tau} \\ \boldsymbol{\Omega}_{BV} = \boldsymbol{\Omega}_{BV0}\, \mathrm{e}^{\beta_{BV}\tau} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \boldsymbol{q}_{\lambda BV} = \boldsymbol{q}_{\lambda BV0}\, \mathrm{e}^{(2\alpha_{BV}+\beta_{BV})\tau} \\ M_0^{BV} = M_{00}^{BV}\, \mathrm{e}^{-7\tau/8} \end{cases} \qquad (25.1)$$

ce qui permet de déduire la dépendance de l'énergie de distorsion de la boucle en l'expansion

$$E_{dist}^{BV} \cong \left[\frac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV0}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV0}^2\right] \mathrm{e}^{\tau/8} \qquad (25.2)$$

En présence d'un champ extérieur $\tau^{externe}$ généré par d'autres singularités, et d'une expansion de fond τ_0 du réseau cosmologique, on peut donc écrire

$$E_{dist}^{BV} \cong \left[\frac{1}{2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV0}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV0}^2\right] \mathrm{e}^{(\tau_0+\tau^{externe})/8} = E_{dist}^{BV}(\tau_0)\, \mathrm{e}^{\tau^{externe}/8} \cong M_0^{BV} c_t^2\, \mathrm{e}^{\tau^{externe}/8} \qquad (25.3)$$

On en déduit trois relations importantes en présence d'un champ extérieur $\tau^{externe}$

$$\begin{cases} \tau_{ext\,LD}^{BV}(r) \cong -\dfrac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\dfrac{M_0^{BV}}{r} \\ E_{dist}^{BV}(\tau^{externe}) \cong M_0^{BV} c_t^2\, \mathrm{e}^{\tau^{externe}/8} \\ M_0^{BV} \cong \dfrac{1}{2c_t^2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV}^2 \cong \left[\dfrac{1}{2c_{t0}^2}\left(K_2+K_3\right)\zeta_{BV} R_{BV0}^3 \boldsymbol{\Omega}_{BV0}^2\right] \mathrm{e}^{-7\tau_0/8} \end{cases} \qquad (25.4)$$

La boucle de dislocation coin prismatique, source de charge de courbure

Dans le cas d'une boucle de dislocation coin prismatique, on ne connaît pas à priori les dépendances en l'expansion volumique du rayon de la boucle, du vecteur de Burgers et de la charge de courbure. On introduit donc des *constantes d'expansion* α_{BC} et β_{BC} tels que

$$\begin{cases} R_{BC} = R_{BC0}\, \mathrm{e}^{\alpha_{BC}\tau} \\ \vec{\boldsymbol{B}}_{BC} = \vec{\boldsymbol{B}}_{BC0}\, \mathrm{e}^{\beta_{BC}\tau} \\ \boldsymbol{q}_{\theta BC} = \boldsymbol{q}_{\theta BC0}\, \mathrm{e}^{\beta_{BC}\tau} \end{cases} \qquad (25.5)$$

Ces constantes d'expansion α_{BC} et β_{BC} ne sont pas connus. La dépendance du rayon de la boucle devrait assurément être similaire à celle de la boucle de désinclinaison vis, soit $\alpha_{BC} = 1/4$, mais elle pourrait aussi être similaire à la dépendance du pas de réseau, soit $\alpha_{BC} = 1/3$. Quant à la dépendance du vecteur de Burgers, qui doit être un vecteur du réseau, elle devrait prendre en principe la valeur $\beta_{BC} = 1/3$. Mais pour l'instant, on ne fera pas de choix de ces valeurs, et on conservera les paramètres α_{BC} et β_{BC}, car les valeurs exactes de ces paramètres ne sont pas appelés à jouer un rôle crucial pour la suite de la théorie. Les expressions *(25.5)* permettent d'écrire

$$E_{dist}^{BC} \cong \left[\left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 K_3 \zeta_{BC} R_{BC0}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC0}^2 \right] \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau} \qquad (25.6)$$

En présence d'un champ extérieur $\tau^{externe}$ généré par d'autres singularités, et d'une expansion de fond τ_0 du réseau cosmologique, on peut donc écrire

$$E_{dist}^{BC} \cong \left[\left(\frac{K_2}{K_3} \right)^2 K_3 \zeta_{BC} R_{BC0}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC0}^2 \right] \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})(\tau_0+\tau^{externe})} = E_{dist}^{BC}(\tau_0)\, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau^{externe}} \cong M_0^{BC} c_t^2\, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau^{externe}} \qquad (25.7)$$

On en déduit quatre relations importantes pour une boucle de dislocation coin prismatique en présence d'un champ extérieur $\tau^{externe}$

$$\begin{cases} \tau_{ext\,LD}^{BC}(r) \cong -\dfrac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2} \dfrac{M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}}{r} \\ E_{dist}^{BC}(\tau^{externe}) \cong M_0^{BC} c_t^2\, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau^{externe}} \\ M_0^{BC} \cong \left(\dfrac{K_2}{K_3} \right)^2 \dfrac{K_3 \zeta_{BC} R_{BC}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC}^2}{c_t^2} \cong \left[\left(\dfrac{K_2}{K_3} \right)^2 \dfrac{K_3 \zeta_{BC} R_{BC0}\, \vec{\boldsymbol{B}}_{BC0}^2}{c_{t0}^2} \right] \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}-1)\tau_0} \\ M_{courbure}^{BC} = -\dfrac{2\pi K_2}{5c_t^2} R_{BC}^2 \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC} = \left[-\dfrac{2\pi K_2}{5c_{t0}^2} R_{BC0}^2 \vec{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{B}}_{BC0} \right] \mathrm{e}^{(2\alpha_{BC}+\beta_{BC}-1)\tau_0} \end{cases} \qquad (25.8)$$

en se rappelant que la charge de courbure et la masse de gravitation associée à la charge de courbure peuvent être positives ou négatives suivant la nature de la charge

$$M_{courbure}^{BC} \quad et \quad \boldsymbol{q}_{\theta BC} \begin{cases} > 0 & si\ boucle\ lacunaire \\ < 0 & si\ boucle\ interstitielle \end{cases} \qquad (25.9)$$

La boucle de dislocation mixte de glissement, source d'un moment dipolaire électrique

Dans le cas d'une boucle de dislocation mixte de glissement, on ne connaît pas non plus à prio-

ri les dépendances en l'expansion volumique du rayon de la boucle et de son vecteur de Burgers. On introduit donc des *constantes d'expansion* α_{BM} et β_{BM} de sorte à écrire

$$\begin{cases} R_{BM} = R_{BM\,0}\,\mathrm{e}^{\alpha_{BM}\tau} \\ \vec{\boldsymbol{B}}_{BM} = \vec{\boldsymbol{B}}_{BM\,0}\,\mathrm{e}^{\beta_{BM}\tau} \end{cases} \tag{25.10}$$

Celles-ci permettent de déduire la dépendance de l'énergie de distorsion de la boucle en l'expansion

$$E_{dist}^{BM} \cong \left[\frac{K_2+K_3}{4}\zeta_{BM} R_{BM\,0}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM\,0}^2\right]\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau} \tag{25.11}$$

En présence d'un champ extérieur $\tau^{externe}$ généré par d'autres singularités, et d'une expansion de fond τ_0 du réseau cosmologique, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} E_{dist}^{BM} &\cong \left[\frac{K_2+K_3}{4}\zeta_{BM} R_{BM\,0}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM\,0}^2\right]\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\left(\tau_0+\tau^{externe}\right)} \\ &\cong \left[\frac{K_2+K_3}{4}\zeta_{BM} R_{BM\,0}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM\,0}^2\right]\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_0}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau^{externe}} \cong \left(M_0^{BM}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau^{externe}}\right)c_t^2 \end{aligned} \tag{25.12}$$

On en déduit quatre relations importantes pour une boucle de dislocation coin prismatique en présence d'un champ extérieur τ^{ext}

$$\begin{cases} \tau_{ext\,LD}^{BM}(r) \cong -\dfrac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\dfrac{M_0^{BM}}{r} \\ E_{dist}^{BM}(\tau^{externe}) \cong M_0^{BM} c_t^2\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau^{externe}} \\ M_0^{BM} \cong \dfrac{K_2+K_3}{4c_t^2}\zeta_{BM} R_{BM}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM}^2 \cong \left[\dfrac{K_2+K_3}{4c_{t0}^2}\zeta_{BM} R_{BM\,0}\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BM\,0}^2\right]\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}-1)\tau_0} \end{cases} \tag{25.13}$$

La lacune macroscopique, analogue d'un trou noir

Le champ d'expansion *(22.86)* associé à la lacune macroscopique peut s'écrire en faisant intervenir la «constante» de gravitation sous la forme suivante

$$\tau_{ext}^{(L)}(r) \cong -\left(1+\tau_0+\tau^{externe}\right)\frac{R_L}{r} = -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{\left(1+\tau_0+\tau^{externe}\right)c_t^2 R_L}{4\boldsymbol{G}_{grav}}\frac{1}{r} \tag{25.14}$$

où $\tau^{externe}$ représente le champ d'expansion dû aux autres singularités régnant au voisinage de la lacune macroscopique. Si ce champ est assez faible ($\left|\tau^{externe}\right| << 1$), on peut introduire une *masse de gravitation* $M_{grav}^{(L)}$ *de la lacune macroscopique* en écrivant

$$\tau_{ext}^{(L)}(r) \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\left(\frac{\left(1+\tau_0\right)c_t^2 R_L}{4\boldsymbol{G}_{grav}}\right)\frac{1}{r} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{r} \tag{25.15}$$

dans laquelle

$$M_{grav}^{(L)} \cong \frac{c_t^2}{4\boldsymbol{G}_{grav}} R_L\left(1+\tau_0\right) \cong \frac{1}{c_t^2}\sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)\left(1+\tau_0\right)R_\infty^2 \tag{25.16}$$

En se rappelant que $K_2 << K_0$ et $K_1 << K_0$ dans le réseau cosmologique parfait, on en déduit

.

la relation approximative suivante

$$\sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0\right)R_\infty^2 \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2 \qquad (25.17)$$

qui permet d'écrire l'énergie *(22.92)* de la lacune macroscopique sous la forme

$$\begin{aligned} E_{grav}^{(L)} &\cong \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0+\tau^{externe}\right)R_\infty^2 \\ &\cong \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0\right)R_\infty^2 + \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0\right)R_\infty^2\frac{\tau^{externe}}{\left(1+\tau_0\right)} \\ &\cong \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(1+\tau_0\right)R_\infty^2\left(1+\frac{\tau^{externe}}{\left(1+\tau_0\right)}\right) \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1+\frac{\tau^{externe}}{\left(1+\tau_0\right)}\right) \end{aligned} \qquad (25.18)$$

En utilisant le fait que $c_{t0}^2=\left(K_2+K_3\right)/mn_0$, on obtient les relations suivantes pour une lacune macroscopique placée dans un champ extérieur $\tau^{externe}$, exprimées en utilisant la masse gravitationnelle M_{grav}^{L} de la lacune

$$\left\{\begin{array}{l} R_L=\sqrt[3]{\dfrac{3N_L}{4\pi n_0\,\mathrm{e}}} \\ \tau_{ext}^{(L)}(r)\cong-\left(1+\tau_0+\tau^{externe}\right)\dfrac{R_L}{r}\cong-\dfrac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\dfrac{M_{grav}^{(L)}}{r} \\ E_{grav}^{(L)}\cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1+\dfrac{\tau^{externe}}{\left(1+\tau_0\right)}\right) \\ M_{grav}^{(L)}\cong\dfrac{R_\infty^2}{c_t^2}\sqrt[3]{\dfrac{6\pi^2 N_L}{n_0\,\mathrm{e}}}\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)\left(1+\tau_0\right) \\ \qquad\cong\left[mR_{\infty 0}^2\sqrt[3]{6\pi^2\,\mathrm{e}^{-1}n_0^2N_L}\right]\dfrac{\left(K_0-4K_2/3-2K_1(1+\tau_0)\right)\left(1+\tau_0\right)}{K_2+K_3}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau_0}{3}} \end{array}\right. \qquad (25.19)$$

On constate que la masse gravitationnelle de la lacune présente la propriété de changer de signe pour deux valeurs de l'expansion volumique de fond du réseau

$$M_{grav}^{(L)}(\tau_0)\left\{\begin{array}{lll} <0 & \Leftrightarrow & \tau_0<-1 \\ >0 & \Leftrightarrow & -1<\tau_0<\tau_{0cr} \\ <0 & \Leftrightarrow & \tau_0>\tau_{0cr} \end{array}\right. \qquad (25.20)$$

Et on se rappelle aussi que la lacune macroscopique est la seule singularité qui devient forcément un *trou noir* lorsque l'expansion volumique de fond du réseau satisfait la relation *(22.100)*, à savoir

$$\tau_0>1-\tau^{externe} \qquad (25.21)$$

L'interstitiel macroscopique, analogue d'une étoile à neutrons

Le champ d'expansion *(22.105)* associé à l'interstitiel macroscopique peut s'écrire en faisant intervenir la constante de gravitation sous la forme suivante

$$\tau_{ext}^{(I)}(r) = -\frac{2R_I^3}{3R_\infty^2}\frac{1}{r} = -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\left(\frac{c_t^2 R_I^3}{6\boldsymbol{G}_{grav}R_\infty^2}\right)\frac{1}{r} = -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{r} \qquad (25.22)$$

dans laquelle on a introduit une *masse gravitationnelle* $M_{grav}^{(I)}$ *de l'interstitiel*

$$M_{grav}^{(I)} = \frac{c_t^2 R_I^3}{6\boldsymbol{G}_{grav}R_\infty^2} = \frac{c_t^2}{6\boldsymbol{G}_{grav}R_\infty^2}\frac{3N_I}{4\pi n} = \frac{1}{c_t^2}\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right)\frac{N_I}{n} \qquad (25.23)$$

En se rappelant que $K_2 << K_0$ et $K_1 << K_0$ dans le réseau cosmologique parfait, on en déduit la relation approximative suivante

$$\left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\frac{N_I}{n} \cong M_{grav}^{(I)}c_t^2 \qquad (25.24)$$

qui permet d'écrire l'énergie *(22.108)* de l'interstitiel macroscopique sous la forme

$$E_{grav}^{(I)} \cong \frac{4\pi}{3}\left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)R_I^3 = \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\frac{N_I}{n}\mathrm{e}^{\tau^{externe}} \cong \left(M_{grav}^{(I)}\mathrm{e}^{\tau^{externe}}\right)c_t^2 \qquad (25.25)$$

En utilisant le fait que $c_{t0}^2 = \left(K_2 + K_3\right)/mn_0$, on obtient les relations suivantes pour un interstitiel macroscopique placé dans un champ extérieur $\tau^{externe}$, exprimées en utilisant la masse gravitationnelle M_{grav}^{I} de l'interstitiel

$$\begin{cases} R_I \cong \sqrt[3]{\dfrac{3N_I}{4\pi n}} \cong \sqrt[3]{\dfrac{3N_I}{4\pi n_0}}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau_0}{3}} \\ \tau_{ext}^{(I)}(r) \cong -\dfrac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\dfrac{M_{grav}^{(I)}}{r} \\ E_{grav}^{(I)} \cong M_{grav}^{(I)}c_t^2\,\mathrm{e}^{\tau^{externe}} \\ M_{grav}^{(I)} \cong \dfrac{N_I}{nc_t^2}\left(K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right) \cong mN_I\ \dfrac{K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)}{K_2 + K_3} \end{cases} \qquad (25.26)$$

On constate que la masse gravitationnelle de l'interstitiel présente la propriété de changer de signe en fonction de la valeur de l'expansion volumique de fond du réseau

$$M_{grav}^{(I)}(\tau_0)\ \begin{cases} >0 & \Leftrightarrow \quad \tau_0 < \tau_{0cr} \\ <0 & \Leftrightarrow \quad \tau_0 > \tau_{0cr} \end{cases} \qquad (25.27)$$

25.2 – Interactions gravitationnelles entre les diverses singularités topologiques du réseau cosmologique

L'interaction entre deux boucles vis (BV-BV)

Si une boucle de désinclinaison *(1)* interagit avec une boucle de désinclinaison vis *(2)*, l'énergie de distorsion élastique de la boucle *(1)* s'écrit

$$E_{dist(1)}^{BV} \cong \left(M_{0(1)}^{BV}\mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD(2)}^{BV}(d)/8}\right)c_t^2 \cong \left(M_{0(1)}^{BV}\mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}M_{0(2)}^{BV}}{2c_t^2 d}}\right)c_t^2 \cong M_{0(1)}^{BV}c_t^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{0(2)}^{BV}}{d}\right) \qquad (25.28)$$

L'accroissement de l'énergie de la boucle *(1)* dû à la présence de la boucle *(2)* vaut donc

.

$$\Delta E_{dist(1)}^{BV} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_{0(1)}^{BV}M_{0(2)}^{BV}}{d} \tag{25.29}$$

L'accroissement de l'énergie des deux boucles correspond donc à l'énergie d'interaction des deux boucles, autrement dit l'énergie gravifique

$$\Delta E_{grav}^{BV-BV} \cong -\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BV}M_{0(2)}^{BV}}{d} \tag{25.30}$$

et la dérivé de cette énergie par la distance séparant les deux boucles correspond à la force de gravitation entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BV-BV} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BV}M_{0(2)}^{BV}}{d^2} \tag{25.31}$$

L'interaction entre deux boucles coin (BC-BC)

Dans le cas de deux boucles de dislocation coin prismatique, l'énergie de la boucle *(1)* d'écrit

$$\begin{aligned} E_{dist(1)}^{BC} &\cong \left(M_{0(1)}^{BC}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau_{ext\,LD(2)}^{BC}(d)}\right)c_t^2 \cong M_{0(1)}^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}M_{courbure(2)}^{BC}+M_{0(2)}^{BC}}{c_t^2\quad d}} \\ &\cong M_{0(1)}^{BC}c_t^2\left(1-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{courbure(2)}^{BC}+M_{0(2)}^{BC}}{d}\right) \end{aligned} \tag{25.32}$$

et l'accroissement d'énergie de la boucle *(1)* dû à la boucle *(2)* vaut

$$\Delta E_{dist(1)}^{BC} \cong -(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BC}\left(M_{courbure(2)}^{BC}+M_{0(2)}^{BC}\right)}{d} \tag{25.33}$$

L'énergie d'interaction gravitationnelle des deux boucles devient par conséquent

$$\Delta E_{grav}^{BC-BC} \cong -(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BC}M_{courbure(2)}^{BC}+M_{courbure(1)}^{BC}M_{0(2)}^{BC}+2M_{0(1)}^{BC}M_{0(2)}^{BC}}{d} \tag{25.34}$$

ce qui conduit à une force d'interaction gravitationnelle valant

$$F_{grav}^{BC-BC} \cong (\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{courbure(1)}^{BC}M_{0(2)}^{BC}+M_{courbure(2)}^{BC}M_{0(1)}^{BC}}{d^2}+2(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BC}M_{0(2)}^{BC}}{d^2} \tag{25.35}$$

L'interaction entre deux boucles mixtes (BM-BM)

Dans le cas de deux boucles de dislocation mixte de glissement, on a les énergies

$$\begin{aligned} E_{dist(1)}^{BM} &\cong \left(M_{0(1)}^{BM}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_{ext\,LD(2)}^{BM}(d)}\right)c_t^2 \cong M_{0(1)}^{BM}c_t^2\,\mathrm{e}^{-(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{0(2)}^{BM}}{d}} \\ &\cong M_{0(1)}^{BM}c_t^2\left(1-(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{0(2)}^{BM}}{d}\right) \end{aligned} \tag{25.36}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist(1)}^{BM} \cong -4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BM}M_{0(2)}^{BM}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BM-BM} \cong -2\left(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BM}M_{0(2)}^{BM}}{d} \tag{25.37}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BM-BM} \cong 2\left(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{0(1)}^{BM}M_{0(2)}^{BM}}{d^2} \tag{25.38}$$

L'interaction entre une boucle vis et une boucle coin (BV-BC)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de désinclinaison vis et une boucle de dislocation coin, on a l'énergie de la boucle vis (BV)

$$\begin{aligned} E_{dist}^{BV} &\cong \left(M_0^{BV}\,\mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD}^{BC}(d)/8}\right)c_t^2 \cong M_0^{BV}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d}} \\ &\cong M_0^{BV}c_t^2\left(1-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d}\right) \end{aligned} \tag{25.39a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BV} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV}\left(M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}\right)}{d}$$

et l'énergie de la boucle coin (BC)

$$\begin{aligned} E_{dist}^{BC} &\cong \left(M_0^{BC}\,\mathrm{e}^{\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\tau_{ext\,LD}^{BV}(d)}\right)c_t^2 \cong M_0^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d}} \\ &\cong M_0^{BC}c_t^2\left(1-\frac{4\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d}\right) \end{aligned} \tag{25.39b}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BC} \cong -4\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BC}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BV-BC} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV}M_{courbure}^{BC}}{d}-\left(\frac{1}{2}+4\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BC}}{d} \tag{25.40}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BV-BC} \cong \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{courbure}^{BC}M_0^{BV}}{d^2}+\left(\frac{1}{2}+4\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BC}}{d^2} \tag{25.41}$$

L'interaction entre une boucle vis et une boucle mixte (BV-BM)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de désinclinaison vis et une boucle de dislocation mixte, on a l'énergie de la boucle vis

$$\begin{aligned} &E_{dist}^{BV} \cong \left(M_0^{BV}\,\mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD}^{BM}(d)/8}\right)c_t^2 \cong M_0^{BV}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}} \cong M_0^{BV}c_t^2\left(1-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}\right) \\ &\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BV} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV}M_0^{BM}}{d} \end{aligned} \tag{25.42a}$$

et l'énergie de la boucle mixte

$$E_{dist}^{BM} \cong \left(M_0^{BM} \, \mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_{ext\,LD}^{BV}(d)} \right) c_t^2 \cong M_0^{BM} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d}}$$

$$\cong M_0^{BM} c_t^2 \left(1 - \frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d} \right) \qquad (25.42b)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BM} \cong -4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BM}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BV-BM} \cong -\left(\frac{1}{2} + 4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}) \right) G_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BM}}{d} \qquad (25.43)$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BV-BM} \cong \left(\frac{1}{2} + 4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}) \right) G_{grav}\frac{M_0^{BV}M_0^{BM}}{d^2} \qquad (25.44)$$

L'interaction entre une boucle coin et une boucle mixte (BC-BM)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de dislocation coin et une boucle de dislocation mixte, on a l'énergie de la boucle coin

$$E_{dist}^{BC} \cong \left(M_0^{BC} \, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau_{ext\,LD}^{BM}(d)} \right) c_t^2 \cong M_0^{BC} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}}$$

$$\cong M_0^{BC} c_t^2 \left(1 - \frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d} \right) \qquad (25.45a)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BC} \cong -4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})G_{grav}\frac{M_0^{BC}M_0^{BM}}{d}$$

et l'énergie de la boucle mixte

$$E_{dist}^{BM} \cong \left(M_0^{BM} \, \mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_{ext\,LD}^{BC}(d)} \right) c_t^2 \cong M_0^{BM} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d}}$$

$$\cong M_0^{BM} c_t^2 \left(1 - \frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d} \right) \qquad (25.45b)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BM} \cong -4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_0^{BM}\left(M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}\right)}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BC-BM} \cong -4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_{courbure}^{BC}M_0^{BM}}{d} - 4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}+\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_0^{BC}M_0^{BM}}{d} \qquad (25.46)$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BC-BM} \cong 4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_{courbure}^{BC}M_0^{BM}}{d^2} + 4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}+\alpha_{BM}+2\beta_{BM})G_{grav}\frac{M_0^{BC}M_0^{BM}}{d^2} \qquad (25.47)$$

L'interaction entre une boucle vis et une lacune macroscopique (BV-L)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de désinclinaison vis et une lacune macroscopique, on a l'énergie de la boucle vis

$$E_{dist}^{BV} \cong \left(M_0^{BV}\, \mathrm{e}^{\tau_{ext}^{(L)}(d)/8}\right)c_t^2 \cong M_0^{BV} c_t^2\, \mathrm{e}^{\tau_{ext}^{(L)}(d)/8} \cong M_0^{BV} c_t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}}$$
$$\cong M_0^{BV} c_t^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}\right) \qquad (25.48a)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BV} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d}$$

et l'énergie de la lacune macroscopique

$$E_{grav}^{(L)} \cong M_{grav}^{(L)} c_t^2 \left(1 + \frac{\tau_{ext\,LD}^{BV}(d)}{(1+\tau_0)}\right) \cong M_{grav}^{(L)} c_t^2 \left(1 - \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2(1+\tau_0)}\frac{M_0^{BV}}{d}\right) \qquad (25.48b)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(L)} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BV-L} \cong -\boldsymbol{G}_{grav}\left[\frac{1}{2} + \frac{4}{(1+\tau_0)}\right]\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d} \cong -\boldsymbol{G}_{grav}\frac{9+\tau_0}{2(1+\tau_0)}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d} \qquad (25.49)$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et la lacune macroscopique

$$F_{grav}^{BV-L} \cong \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\frac{9+\tau_0}{1+\tau_0}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d^2} \qquad (25.50)$$

Cette expression de la force d'interaction gravitationnelle entre les deux singularités peut être présentée sous une forme plus simple en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(L)}$

$$F_{grav}^{BV-L} \cong \frac{c_t^2}{8}(9+\tau_0)\frac{M_0^{BV} R_L}{d^2} \qquad (25.51)$$

L'interaction entre une boucle coin et une lacune macroscopique (BC-L)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de dislocation coin et une lacune macroscopique, on a l'énergie de la boucle coin et l'énergie de la lacune macroscopique

$$\cong \left(M_0^{BC}\, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau_{ext}^{(L)}(d)}\right)c_t^2 \cong M_0^{BC} c_t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}} \cong M_0^{BC} c_t^2 \left(1 - \frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M}{}\right. \qquad (25.52a)$$

$$\Delta E_{dist}^{BC} \cong -4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BC} M_{grav}^{(L)}}{d}$$

$$E_{grav}^{(L)} \cong M_{grav}^{(L)} c_t^2 \left(1 + \frac{\tau_{ext\,LD}^{BC}(d)}{(1+\tau_0)}\right) \cong M_{grav}^{(L)} c_t^2 \left(1 - \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}}{d}\right) \qquad (25.52b)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(L)} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)}\frac{\left(M_{courbure}^{BC} + M_0^{BC}\right)M_{grav}^{(L)}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BC-L} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)}\frac{M_{courbure}^{BC}M_{grav}^{(L)}}{d} - 4\boldsymbol{G}_{grav}\left[\frac{1+(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})(1+\tau_0)}{1+\tau_0}\right]\frac{M_0^{BC}M_{grav}^{(L)}}{d} \tag{25.53}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et la lacune macroscopique

$$F_{grav}^{BC-L} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{1}{1+\tau_0}\frac{M_{courbure}^{BC}M_{grav}^{(L)}}{d^2} + 4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{1+(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})(1+\tau_0)}{1+\tau_0}\frac{M_0^{BC}M_{grav}^{(L)}}{d^2} \tag{25.54}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(L)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{BC-L} \cong c_t^2\frac{M_{courbure}^{BC}R_L}{d^2} + c_t^2\left[1+(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})(1+\tau_0)\right]\frac{M_0^{BC}R_L}{d^2} \tag{25.55}$$

L'interaction entre une boucle mixte et une lacune macroscopique (BM-L)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de dislocation mixte et une lacune macroscopique, on a l'énergie de la boucle mixte

$$E_{dist}^{BM} \cong \left(M_0^{BM}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_{ext}^{(L)}(d)}\right)c_t^2 \cong M_0^{BM}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}}$$
$$\cong M_0^{BM}c_t^2\left(1-\frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}\right) \tag{25.56a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BM} \cong -4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(L)}}{d}$$

et l'énergie de la lacune macroscopique

$$E_{grav}^{(L)} \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1+\frac{\tau_{ext\,LD}^{BM}(d)}{(1+\tau_0)}\right) \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}\right) \tag{25.56b}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(L)} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{(1+\tau_0)}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(L)}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BM-L} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{1+(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})(1+\tau_0)}{(1+\tau_0)}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(L)}}{d} \tag{25.57}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et la lacune macroscopique

$$F_{grav}^{BM-L} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{1+(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})(1+\tau_0)}{1+\tau_0}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(L)}}{d^2} \tag{25.58}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(L)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{BM-L} \cong c_t^2\left[1+(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})(1+\tau_0)\right]\frac{M_0^{BM}R_L}{d^2} \tag{25.59}$$

L'interaction entre une boucle vis et un interstitiel macroscopique (BV-I)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de désinclinaison vis et un interstitiel macroscopique, on a les énergies

$$E_{dist}^{BV} \cong \left(M_0^{BV} \, \mathrm{e}^{\tau_{ext}^{(I)}(d)/8} \right) c_t^2 \cong M_0^{BV} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d}} \cong M_0^{BV} c_t^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BV} \cong -\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.60a}$$

$$E_{grav}^{(I)} \cong \left(M_{grav}^{(I)} \, \mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD}^{BV}(d)} \right) c_t^2 \cong M_{grav}^{(I)} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d}} \cong M_{grav}^{(I)} c_t^2 \left(1 - \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(I)} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.60b}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BV-I} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d} - \frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d} \cong -\frac{9}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.61}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et l'interstitiel macroscopique

$$F_{grav}^{BV-I} \cong \frac{9}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d^2} \tag{25.62}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(I)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{BV-I} \cong \frac{3c_t^2}{4R_\infty^2}\frac{M_0^{BV} R_I^3}{d^2} \tag{25.63}$$

L'interaction entre une boucle coin et un interstitiel macroscopique (BC-I)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de dislocation coin et un interstitiel macroscopique, on a l'énergie de la boucle coin

$$E_{dist}^{BC} \cong \left(M_0^{BC} \, \mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau_{ext}^{(I)}(d)} \right) c_t^2 \cong M_0^{BC} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d}}$$
$$\cong M_0^{BC} c_t^2 \left(1 - \frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d} \right) \tag{25.64a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BC} \cong -4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BC} M_{grav}^{(I)}}{d}$$

et l'énergie de l'interstitiel macroscopique

$$E_{grav}^{(I)} \cong \left(M_{grav}^{(I)} \, \mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD}^{BC}(d)} \right) c_t^2 \cong M_{grav}^{(I)} c_t^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d}}$$
$$\cong M_{grav}^{(I)} c_t^2 \left(1 - \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC}}{d} \right) \tag{25.64b}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(I)} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav}^{(I)}\left(M_{courbure}^{BC}+M_0^{BC} \right)}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BC-I} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{courbure}^{BC} M_{grav}^{(I)}}{d} - 4\boldsymbol{G}_{grav}\left(1+\alpha_{BC}+2\beta_{BC} \right)\frac{M_0^{BC} M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.65}$$

.

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et l'interstitiel macroscopique

$$F_{grav}^{BC-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{courbure}^{BC}M_{grav}^{(I)}}{d^2}+4\boldsymbol{G}_{grav}\left(1+\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\frac{M_0^{BC}M_{grav}^{(I)}}{d^2} \tag{25.66}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(I)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{BC-I} \cong \frac{2c_t^2}{3R_\infty^2}\frac{M_{courbure}^{BC}R_I^3}{d^2}+\frac{2c_t^2}{3R_\infty^2}\left(1+\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\frac{M_0^{BC}R_I^3}{d^2} \tag{25.67}$$

L'interaction entre une boucle mixte et un interstitiel macroscopique (BM-I)

Dans le cas de l'interaction entre une boucle de dislocation mixte et un interstitiel macroscopique, on a les énergies

$$\begin{aligned} E_{dist}^{BM} &\cong \left(M_0^{BM}\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\tau_{ext}^{(I)}(d)}\right)c_t^2 \cong M_0^{BM}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BM}+2\beta_{BM})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d}} \\ &\cong M_0^{BM}c_t^2\left(1-\frac{4\left(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right)\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d}\right) \end{aligned} \tag{25.68a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{dist}^{BM} \cong -4\left(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(I)}}{d}$$

$$E_{grav}^{(I)} \cong \left(M_{grav}^{(I)}\,\mathrm{e}^{\tau_{ext\,LD}^{BM}(d)}\right)c_t^2 \cong M_{grav}^{(I)}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}} \cong M_{grav}^{(I)}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BM}}{d}\right) \tag{25.68b}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(I)} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(I)}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{BM-I} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\left[1+\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right]\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.69}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la boucle et l'interstitiel macroscopique

$$F_{grav}^{BM-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav}\left[1+\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right]\frac{M_0^{BM}M_{grav}^{(I)}}{d^2} \tag{25.70}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav}^{(I)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{BM-I} \cong \frac{2c_t^2}{3R_\infty^2}\left[1+\alpha_{BM}+2\beta_{BM}\right]\frac{M_0^{BM}R_I^3}{d^2} \tag{25.71}$$

L'interaction entre deux lacunes macroscopiques (L-L)

Dans le cas de l'interaction entre deux lacunes macroscopiques, on a les énergies

$$E_{grav(1)}^{(L)} \cong M_{grav(1)}^{(L)}c_t^2\left(1+\frac{\tau_{ext(2)}^{(L)}(d)}{\left(1+\tau_0\right)}\right) \cong M_{grav(1)}^{(L)}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav(2)}^{(L)}}{d}\right) \tag{25.72a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav(1)}^{(L)} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav(1)}^{(L)}M_{grav(2)}^{(L)}}{d} \tag{25.72b}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{L-L} \cong -\frac{8\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav(1)}^{(L)}M_{grav(2)}^{(L)}}{d} \tag{25.73}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux lacunes macroscopiques

$$F_{grav}^{L-L} \cong \frac{8\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav(1)}^{(L)}M_{grav(2)}^{(L)}}{d^2} \tag{25.74}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav(i)}^{(L)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{L-L} \cong \frac{c_t^4\left(1+\tau_0\right)}{2\boldsymbol{G}_{grav}}\frac{R_{L(1)}R_{L(2)}}{d^2} \tag{25.75}$$

L'interaction entre deux interstitiels macroscopiques (I-I)

Dans le cas de l'interaction entre deux interstitiels macroscopiques, on a les énergies

$$E_{grav(1)}^{(I)} \cong \left(M_{grav(1)}^{(I)}\,\mathrm{e}^{\tau_{ext(2)}^{(I)}(d)}\right)c_t^2 \cong M_{grav(1)}^{(I)}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav(2)}^{(I)}}{d}} \cong M_{grav(1)}^{(I)}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav(2)}^{(I)}}{d}\right) \tag{25.76}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav(1)}^{(I)} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav(1)}^{(I)}M_{grav(2)}^{(I)}}{d}$$

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{I-I} \cong -2\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav(1)}^{(I)}M_{grav(2)}^{(I)}}{d} \tag{25.77}$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre les deux interstitiels macroscopiques

$$F_{grav}^{I-I} \cong 2\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav(1)}^{(I)}M_{grav(2)}^{(I)}}{d^2} \tag{25.78}$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$ et $M_{grav(i)}^{(I)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{I-I} \cong \frac{c_t^4}{18\boldsymbol{G}_{grav}R_\infty^4}\frac{R_{I(1)}^3R_{I(2)}^3}{d^2} \tag{25.79}$$

L'interaction entre une lacune macroscopique et un interstitiel macroscopique (L-I)

Dans le cas de l'interaction entre une lacune macroscopique et un interstitiel macroscopique, on a les énergies

$$E_{grav}^{(L)} \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1+\frac{\tau_{ext}^{(I)}(d)}{\left(1+\tau_0\right)}\right) \cong M_{grav}^{(L)}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)c_t^2}\frac{M_{grav}^{(I)}}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(L)} \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.80a}$$

$$E_{grav}^{(I)} \cong \left(M_{grav}^{(I)}\,\mathrm{e}^{\tau_{ext}^{(L)}(d)}\right)c_t^2 \cong M_{grav}^{(I)}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}} \cong M_{grav}^{I}c_t^2\left(1-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_{grav}^{(L)}}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{grav}^{(I)} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d} \tag{25.80b}$$

.

qui conduisent à l'énergie d'interaction gravitationnelle suivante

$$\Delta E_{grav}^{L-I} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d} - \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d} \cong -4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{2+\tau_0}{1+\tau_0}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d} \qquad (25.81)$$

dont on déduit la force d'interaction gravitationnelle entre la lacune macroscopique et l'interstitiel macroscopique

$$F_{grav}^{L-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav}\frac{2+\tau_0}{1+\tau_0}\frac{M_{grav}^{(L)}M_{grav}^{(I)}}{d^2} \qquad (25.82)$$

qui peut aussi s'écrire, en y introduisant les valeurs de $\boldsymbol{G}_{grav}$, $M_{grav}^{(L)}$ et $M_{grav}^{(I)}$, sous la forme

$$F_{grav}^{L-I} \cong \frac{c_t^4}{6R_\infty^2}\frac{2+\tau_0}{\boldsymbol{G}_{grav}}\frac{R_L R_I^3}{d^2} \qquad (25.83)$$

Des diverses forces d'interaction gravitationnelles
entre les différentes singularités topologiques

On peut maintenant établir un tableau complet des expressions des forces d'interaction gravitationnelles entre les diverses singularités topologiques de base au sein d'un réseau cosmologique parfait (tableau 25.1).
Dans ce tableau, on constate plusieurs choses importantes:
- seule l'interaction entre les boucles de désinclinaison vis, porteuses de la charge «électrique» de rotation, satisfait exactement la *loi de gravitation de Newton*. Il faut noter que ces boucles présentent une énergie beaucoup plus élevée que les autres types de boucles, et que ce sont elles qui dominent par conséquent les interactions entre boucles,
- toutes les autre interactions présentent une version quelque peu modifiée de l'interaction gravitationnelle. Entre les diverses boucles, les interactions dépendent toujours de la «constante» de gravitation $\boldsymbol{G}_{grav}$, mais avec un facteur numérique additionnel qui peut contenir les paramètres inconnus $\alpha_{BC}, \beta_{BC}, \alpha_{BM}, \beta_{BM}$,
- dans le cas où une boucle de dislocation coin intervient, il existe toujours deux termes d'interaction, un dépendant de la masse de courbure $M_{courbure}^{BC}$ de la boucle coin, et l'autre dépendant de la masse d'inertie M_0^{BC} de la boucle coin. Comme la masse de courbure de la boucle est beaucoup plus élevée que sa masse d'inertie, le terme contenant la masse de courbure domine largement dans l'expression de la force d'interaction. De plus, ce terme dominant peut correspondre à une force d'interaction attractive ou négative puisque la masse de courbure de la boucle coin est positive si la boucle est de type lacunaire et négative si la boucle est de type interstitiel,
- dans le cas où une lacune macroscopique ou un interstitiel macroscopique intervient, il y a deux formulations possibles de la force d'interaction gravitationnelle: la formulation qui fait intervenir les masses de gravitation $M_{grav}^{(L)}$ et $M_{grav}^{(I)}$ et qui ressemble à la formulation de la loi de Newton, mais qui présente le désavantage que les masses $M_{grav}^{(L)}$ et $M_{grav}^{(I)}$ dépendent fortement de l'expansion de fond du réseau, au point de changer de signe dans certains domaines d'expansion. C'est pourquoi on préférera utiliser la deuxième formulation qui fait intervenir les rayons R_L et R_I des singularités macroscopiques, et qui présente l'avantage d'être beaucoup plus simple à analyser en ce qui concerne le signe de l'interaction (attractive ou négative),

Tableau 25.1 - Les forces de gravitation entre les diverses singularités topologiques

$$\begin{cases} F_{grav}^{BV-BV} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0(1)}^{BV} M_{0(2)}^{BV}}{d^2} \\ F_{grav}^{BC-BC} \cong \left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure(1)}^{BC} M_{0(2)}^{BC} + M_{courbure(2)}^{BC} M_{0(1)}^{BC}}{d^2} + 2\left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0(1)}^{BC} M_{0(2)}^{BC}}{d^2} \\ F_{grav}^{BM-BM} \cong 2\left(\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0(1)}^{BM} M_{0(2)}^{BM}}{d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{grav}^{BV-BC} \cong \dfrac{1}{2} \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{BC} M_{0}^{BV}}{d^2} + \left(\dfrac{1}{2} + 4\left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right)\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0}^{BV} M_{0}^{BC}}{d^2} \\ F_{grav}^{BV-BM} \cong \left(\dfrac{1}{2} + 4\left(\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right)\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0}^{BV} M_{0}^{BM}}{d^2} \\ F_{grav}^{BC-BM} \cong 4\left(\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{BC} M_{0}^{BM}}{d^2} + 4\left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC} + \alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right) \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0}^{BC} M_{0}^{BM}}{d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{grav}^{BV-L} \cong \dfrac{1}{2} \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{9+\tau_0}{1+\tau_0} \dfrac{M_{0}^{BV} M_{grav}^{(L)}}{d^2} \cong \dfrac{c_t^2}{8}\left(9+\tau_0\right) \dfrac{M_{0}^{BV} R_L}{d^2} \\ F_{grav}^{BC-L} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{1}{1+\tau_0} \dfrac{M_{courbure}^{BC} M_{grav}^{(L)}}{d^2} + 4\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{1+\left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right)\left(1+\tau_0\right)}{1+\tau_0} \dfrac{M_{0}^{BC} M_{grav}^{(L)}}{d^2} \\ \qquad \cong c_t^2 \dfrac{M_{courbure}^{BC} R_L}{d^2} + c_t^2 \left[1+\left(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right)\left(1+\tau_0\right)\right] \dfrac{M_{0}^{BC} R_L}{d^2} \\ F_{grav}^{BM-L} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{1+\left(\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right)\left(1+\tau_0\right)}{1+\tau_0} \dfrac{M_{0}^{BM} M_{grav}^{(L)}}{d^2} \cong c_t^2 \left[1+\left(\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right)\left(1+\tau_0\right)\right] \dfrac{M_{0}^{BM} R_L}{d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{grav}^{BV-I} \cong \dfrac{9}{2} \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{0}^{BV} M_{grav}^{(I)}}{d^2} \cong \dfrac{3c_t^2}{4R_\infty^2} \dfrac{M_{0}^{BV} R_I^3}{d^2} \\ F_{grav}^{BC-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{BC} M_{grav}^{(I)}}{d^2} + 4\boldsymbol{G}_{grav} \left(1+\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right) \dfrac{M_{0}^{BC} M_{grav}^{(I)}}{d^2} \\ \qquad \cong \dfrac{2c_t^2}{3R_\infty^2} \dfrac{M_{courbure}^{BC} R_I^3}{d^2} + \dfrac{2c_t^2}{3R_\infty^2} \left(1+\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}\right) \dfrac{M_{0}^{BC} R_I^3}{d^2} \\ F_{grav}^{BM-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav} \left(1+\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right) \dfrac{M_{0}^{BM} M_{grav}^{(I)}}{d^2} \cong \dfrac{2c_t^2}{3R_\infty^2} \left(1+\alpha_{BM} + 2\beta_{BM}\right) \dfrac{M_{0}^{BM} R_I^3}{d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{grav}^{L-L} \cong \dfrac{8\boldsymbol{G}_{grav}}{\left(1+\tau_0\right)} \dfrac{M_{grav(1)}^{(L)} M_{grav(2)}^{(L)}}{d^2} \cong \dfrac{c_t^4\left(1+\tau_0\right)}{2\boldsymbol{G}_{grav}} \dfrac{R_{L(1)} R_{L(2)}}{d^2} \\ F_{grav}^{I-I} \cong 2\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{grav(1)}^{(I)} M_{grav(2)}^{(I)}}{d^2} \cong \dfrac{c_t^4}{18\boldsymbol{G}_{grav} R_\infty^4} \dfrac{R_{I(1)}^3 R_{I(2)}^3}{d^2} \\ F_{grav}^{L-I} \cong 4\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{2+\tau_0}{1+\tau_0} \dfrac{M_{grav}^{(L)} M_{grav}^{(I)}}{d^2} \cong \dfrac{c_t^4}{6R_\infty^2} \dfrac{2+\tau_0}{\boldsymbol{G}_{grav}} \dfrac{R_L R_I^3}{d^2} \end{cases}$$

- sur la base de ces expressions des forces d'interaction «gravitationnelles» entre singularités, on peut déduire le comportement attractif ou répulsif de toutes les interactions du tableau 25.1 en fonction de l'évolution de l'expansion de fond τ_0 du réseau (fig. 25.1).

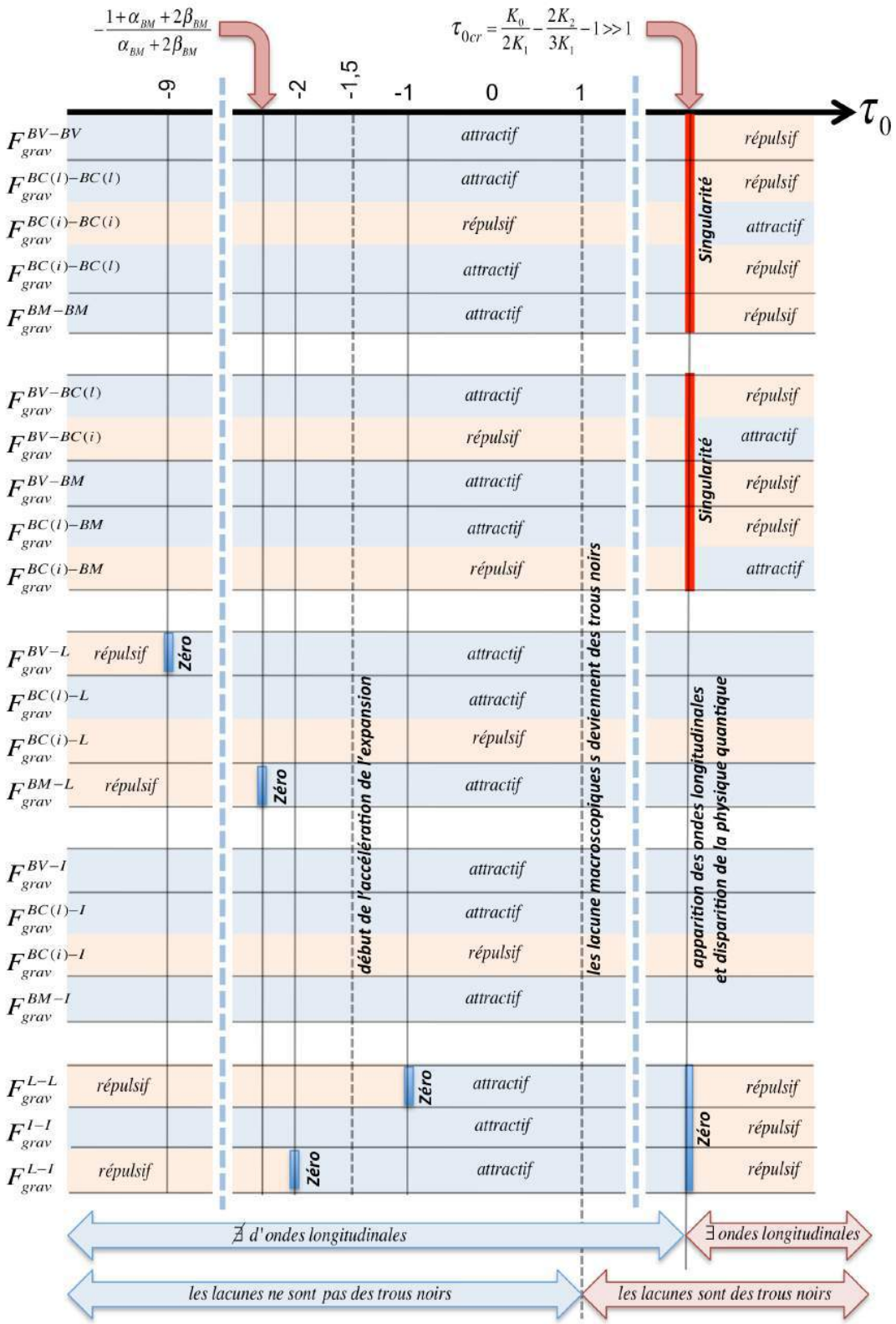


Figure 25.1 *- Comportements attractifs ou répulsifs des forces d'interaction «gravitationnelles» entre singularités en fonction de l'expansion de fond* τ_0 *du réseau cosmologique*

Dans la figure 25.1, on n'a pas respecté l'échelle des valeurs sur l'axe de l'expansion τ_0, surtout en ce qui concerne la valeur de τ_{0cr} qui est en fait extrêmement plus élevée ($\tau_{0cr} >> 1$) puisque $K_0 >> K_1$ dans le cas du réseau cosmologique parfait.

Dans cette figure, on constate que les interactions gravitationnelles évoluent fortement sous l'effet de l'expansion de fond du réseau cosmologique. Il y apparaît notamment des changements de signe des interactions, qui passent du mode attractif au mode répulsif ou vice-versa pour certaines valeurs d'expansion. Ces changements de signe de l'interaction correspondent soit à un *passage par zéro de la force d'interaction*, soit par l'apparition d'une *singularité de la force d'attraction*.

Il est évident que la figure 25.1 implique des conséquences très importante sur le comportement cosmologique des singularités du réseau, c'est-à-dire sur l'évolution des singularités au cours de l'expansion cosmologique du réseau. On reviendra sur ce sujet dans le prochain chapitre. Dans la figure 25.1, on a aussi reporté certains phénomènes associés à l'évolution de l'expansion de fond du réseau cosmologique:

- tout d'abord, pour $\tau_0 = \tau_{0cr}$, le passage du domaine d'expansion sans ondes transversales, dominé par des modes propres longitudinaux localisés (sur lesquels on reviendra plus tard), au domaine d'expansion *où apparaît la réelle propagation d'ondes longitudinales*, et *où disparaît la physique quantique* comme nous le verrons par la suite,
- puis les domaines d'expansion dans lesquels les lacunes macroscopiques sont ou ne sont pas des trous noirs, avec une transition pour la valeur d'expansion $\tau_0 = 1$,
- la valeur d'expansion $\tau_0 = -3/2$ pour laquelle l'évolution du réseau cosmologique parfait (figure 16.8) passe du domaine de la fin de l'inflation (avec décroissance de la vitesse d'expansion) au domaine de l'expansion avec une vitesse d'expansion croissante (accélération de l'expansion),
- on n'a pas représenté dans la figure 25.1 les étapes de l'évolution cosmologique qui suivent la valeur critique $\tau_0 = \tau_{0cr}$, à savoir la fin de l'accélération de l'expansion, le passage par une valeur nulle de la vitesse d'expansion et finalement le retour vers une contraction du réseau cosmologique (voir figure 16.8).

Des conséquences des valeurs de $\alpha_{BC}, \beta_{BC}, \alpha_{BM}, \beta_{BM}$

Au chapitre 24, nous avons vu, à partir de la dilatation du temps et de la courbure des rayons d'onde en champ gravitationnel faible, que les valeurs que doivent prendre les paramètres α_{BV} et β_{BV} associés aux boucles de désinclinaison vis ne peuvent pas être déterminées de manière simple, mais qu'elles doivent satisfaire la relation $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$. Pour les boucles de dislocation coin et mixte, il n'y a à nouveau pas d'effets expérimentaux simples et connus qui pourraient permettre de déduire la valeur des paramètres $\alpha_{BC}, \beta_{BC}, \alpha_{BM}, \beta_{BM}$. Cependant, rien n'empêche d'essayer de deviner quelles pourraient être ces valeurs et quelles conséquences leur attribuer. Comme les boucles de dislocation coin et mixte sont associées à un défaut topologique par translation au sein du réseau, il se pourrait que les paramètres soient assujettis à suivre directement l'expansion du réseau, et que l'on ait alors les valeurs

Exemple I:
$$\begin{cases} \alpha_{BC} = \alpha_{BM} = 1/3 \\ \beta_{BC} = \beta_{BM} = 1/3 \end{cases} \qquad (25.84)$$

.

Ce cas est évidemment fort simple, et les conséquences principales en seraient essentiellement que les diverses propriétés physiques de ces boucles suivraient les lois suivantes en l'expansion du réseau cosmologique

$$\begin{cases} M_0^{BC} = M_{00}^{BC}\, e^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}-1)\tau_0} = M_{00}^{BC} \neq M_0^{BC}(\tau) \\ M_{courbure}^{BC} = M_{courbure0}^{BC}\, e^{(2\alpha_{BC}+\beta_{BC}-1)\tau_0} = M_{courbure0}^{BC} \neq M_{courbure}^{BC}(\tau) \\ \boldsymbol{q}_{\theta BC} \propto \boldsymbol{q}_{\theta BC0}\, e^{\beta_{BC}\tau} \propto \boldsymbol{q}_{\theta BC0}\, e^{\tau/3} \end{cases} \qquad (25.85a)$$

$$\begin{cases} M_0^{BM} = M_{00}^{BM}\, e^{(\alpha_{BM}+2\beta_{BM}-1)\tau_0} = M_{00}^{BM} \neq M_0^{BCM}(\tau) \\ \vec{\omega}_{dipolaire}^{BM} \propto \vec{\omega}_{dipolaire0}^{BM}\, e^{(\alpha_{BM}+\beta_{BM})\tau_0} \propto \vec{\omega}_{dipolaire0}^{BM}\, e^{2\tau/3} \end{cases} \qquad (25.85b)$$

et donc que les masses d'inertie et de courbure de ces boucles seraient invariantes en l'expansion, et que la charge de courbure de la boucle coin et le moment dipolaire de la boucle mixte dépendraient toutes deux de l'expansion du réseau.

Mais il existe une seconde possibilité basée sur le fait que les dispirations analogues aux électrons seraient en fait composées de l'association d'une boucle de désinclinaison vis avec une boucle de dislocation coin. Maintenir l'analogie entre dispirations *BV-BC* et électrons demanderait nécessairement que le rayon de la boucle coin présente la même dépendance que le rayon de la boucle de désinclinaison vis, donc que $\alpha_{BC} = \alpha_{BV}$, et par extension que la boucle mixte présente le même comportement, donc que $\alpha_{BM} = \alpha_{BV}$. D'autre part, comme les vecteurs de Burgers des boucles coin et mixte sont fort probablement des vecteurs de translation du réseau, il y a fort à parier que ceux-ci présentent une dépendance en $e^{\tau/3}$, et donc que $\beta_{BC} = \beta_{BM} = 1/3$, de sorte qu'on peut imaginer un second cas possible

Exemple II:
$$\begin{cases} \alpha_{BC} = \alpha_{BM} = \alpha_{BV} \\ \beta_{BC} = \beta_{BM} = 1/3 \end{cases} \qquad (25.86)$$

avec les conséquences physiques suivantes

$$\begin{cases} M_0^{BC} = M_{00}^{BC}\, e^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}-1)\tau_0} = M_{00}^{BC}\, e^{(\alpha_{BV}-1/3)\tau_0} \\ M_{courbure}^{BC} = M_{courbure0}^{BC}\, e^{(2\alpha_{BC}+\beta_{BC}-1)\tau_0} = M_{courbure0}^{BC}\, e^{2(\alpha_{BV}-1/3)\tau_0} \\ \boldsymbol{q}_{\theta BC} \propto \boldsymbol{q}_{\theta BC0}\, e^{\beta_{BC}\tau} \propto \boldsymbol{q}_{\theta BC0}\, e^{\tau/3} \end{cases} \qquad (25.87a)$$

$$\begin{cases} M_0^{ML} = M_{00}^{ML}\, e^{(\alpha_{ML}+2\beta_{ML}-1)\tau_0} = M_{00}^{ML}\, e^{(\alpha_{TL}-1/3)\tau_0} \\ \vec{\omega}_{dipolaire}^{ML} \propto \vec{\omega}_{dipolaire0}^{ML}\, e^{(\alpha_{ML}+\beta_{ML})\tau_0} \propto \vec{\omega}_{dipolaire0}^{ML}\, e^{(\alpha_{TL}+1/3)\tau_0} \end{cases} \qquad (25.87b)$$

Dans le cas où la torsion de la boucle de désinclinaison vis était nulle, donc que $\beta_{BV} = 0$, la valeur des paramètres deviendraient alors $\alpha_{BC} = \alpha_{BM} = \alpha_{BV} = 1/24$.

Les valeurs des différents paramètres $\alpha_{BV}, \beta_{BV}, \alpha_{BC}, \beta_{BC}, \alpha_{BM}, \beta_{BM}$ ne nous sont donc pas connus, hormis le fait qu'elles doivent satisfaire au moins la relation $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$. Mais les valeurs réelles de ces paramètres devraient fort probablement avoir des conséquences phy-

siques qui devraient être accessibles par l'expérience!

De la possibilité d'existence d'une forme de monopôles magnétiques en cas de variation de l'expansion de fond du réseau cosmologique

Il existe encore une autre conséquence physique beaucoup plus déroutante! En effet, si le rayon des boucles coin devait dépendre d'une valeur différente de 1/3, donc que $\alpha_{BC} \neq 1/3$, pour assurer l'existence de dispirations analogues aux électrons, cela signifierait que le nombre de sites lacunaires ou interstitiels de la boucle coin devrait varier si l'expansion locale change. Or, la seule possibilité pour varier ce nombre de sites est que *la boucle coin se comporte comme une source ou un puit de lacunes ou d'interstitiels en présence d'une variation de* τ. Et cet effet aurait des conséquences très étonnantes sur les équations de Maxwell, car en ce cas de flux divergent de lacunes ou d'interstitiels, l'équation de Maxwell $\mathrm{div}(n\vec{p}^{\,rot}) = 0$ devrait être remplacée par $\mathrm{div}(n\vec{p}) \neq 0$, avec pour analogue $\mathrm{div}\,\vec{B} \neq 0$. Autrement dit, dans le cas où $\alpha_{BC} \neq 1/3$, *les boucles de dislocation coin se comporteraient comme des monopôles magnétiques en présence de variations de l'expansion du réseau cosmologique!*

Or ***cet effet devrait quant à lui être observable et mesurable par les observateurs HS***, qui devraient mesurer une très faible composante magnétique monopôle liée aux particules contenant des boucles coin, et causée par la variation locale de l'expansion *(que les **HS** ne peuvent en principe pas mesurer!).* Et cette composante monopôle des particules contenant des boucles coin devrait forcément exister *sous l'effet de l'expansion cosmologique de l'univers,* ce qui pourrait ouvrir un chapitre passionnant de notre théorie!

Chapitre 26

Interaction «gravitationnelle» à courte portée et force faible de cohésion d'une dispiration

Alors que le chapitre précédent présentait l'ensemble des interactions "gravitationnelles" à longue portée entre les diverses singularités topologiques du réseau cosmologique, ce chapitre s'intéresse à l'*interaction "gravitationnelle" à très courte portée* qui intervient entre une boucle de désinclinaison vis (BV) et une boucle de dislocation coin (BC) à cause de la perturbation d'expansion associée à la charge de courbure de la boucle coin et de la perturbation d'expansion à courte portée associée à la charge de rotation de la boucle vis.

On montre que cette *interaction entre charges de rotation et de courbure* correspond à *une force de répulsion à très courte portée en* $1/d^5$ *lorsque les deux boucles sont séparées*, mais qu'elle correspond à *une force de cohésion lorsque les deux boucles sont réunies sous forme d'une dispiration*.

Cette interaction "gravitationnelle" qui fait intervenir l'interaction d'une charge de rotation et d'une charge de courbure présente en fait des comportements très analogues à ceux de la fameuse *force faible de la physique des particules*.

26.1 – Interactions à longue et courte portée entre une boucle de désinclinaison vis (BV) et une boucle de dislocation coin (BC)

Si une boucle de désinclinaison vis de rayon R_{BV} se rapproche suffisamment d'une boucle de dislocation coin de rayon R_{BC}, l'énergie d'interaction totale va faire intervenir les énergies associées aux champs gravitationnelles à longue portée, mais aussi une énergie d'interaction liée au champ de perturbation d'expansion *(23.2)* à courte portée de la *boucle de désinclinaison vis.* En exprimant le champ à courte portée de la boucle vis de la façon suivante

$$\tau^{BV}_{ext\,CD}(r) \cong \frac{4\boldsymbol{G}_{grav}R_{\infty}^2}{c_t^2}\frac{R_{BV}M_0^{BV}}{2\pi\zeta_{BV}}\frac{1}{r^4} \qquad (26.1)$$

l'énergie de distorsion *(25.7)* de la boucle de dislocation coin devient

$$E^{BC}_{dist} \cong M_0^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\tau^{BV}_{ext\,CD}(d)} \cong M_0^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\frac{2\boldsymbol{G}_{grav}R_{\infty}^2}{c_t^2}\frac{R_{BV}M_0^{BV}}{\pi\zeta_{BV}}\frac{1}{d^4}} \qquad (26.2)$$

L'énergie totale d'interaction gravitationnelle entre les deux boucles s'écrit par conséquent, en utilisant les relations *(25.39a)* et *(25.39b)*

$$E^{BV-BC}_{dist} \cong M_0^{BV}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{G}_{grav}}{2c_t^2}\frac{M^{BC}_{courbure}+M_0^{BC}}{d}} + M_0^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{d}} + M_0^{BC}c_t^2\,\mathrm{e}^{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\boldsymbol{G}_{grav}\frac{2R_{\infty}^2}{\pi c_t^2\zeta_{BV}}\frac{R_{BV}M_0^{BV}}{d^4}} \qquad (26.3)$$

En tenant compte du fait que $\left|M^{BC}_{courbure}\right| >> M_0^{BC}$ *(23.16)*, l'énergie totale des deux boucles peut s'écrire approximativement

$$E_{dist}^{BV-BC} \cong M_0^{BV} c_t^2 \, e^{-\frac{G_{grav} M_{courbure}^{BC}}{2c_t^2 \, d}} + M_0^{BC} c_t^2 \, e^{-\frac{4(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) G_{grav} M_0^{BV}}{c_t^2 \, d} + (\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) G_{grav} \frac{2R_\infty^2}{\pi c_t^2 \zeta_{BV}} \frac{R_{BV} M_0^{BV}}{d^4}}} \quad (26.4)$$

On peut alors trouver l'accroissement d'énergie, correspondant à l'énergie d'interaction des deux boucles, en développant les exponentielles, toujours en tenant compte que $\left| M_{courbure}^{BC} \right| >> M_0^{BC}$, sous la forme

$$\Delta E_{inter}^{BV-BC} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \left(\frac{2(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) R_\infty^2 R_{BV}}{\pi \zeta_{BV}} \frac{M_0^{BV} M_0^{BC}}{d^4} - \frac{M_{courbure}^{BC} M_0^{BV}}{2d} \right) \quad (26.5)$$

A longue distance, c'est le terme en $1/d$ qui l'emporte, de sorte que l'énergie d'interaction est négative si $M_{courbure}^{BC} > 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de nature lacunaire, et elle est positive si $M_{courbure}^{BC} < 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de nature interstitielle (fig. 26.1).

A courte distance, c'est le terme en $1/d^4$ qui l'emporte, de sorte que l'énergie d'interaction devient forcément positive (fig. 26.1). Dans le cas de la boucle coin lacunaire, on a $M_{courbure}^{BC} > 0$, de sorte que l'énergie d'interaction passe par zéro pour $d = d_0$ qui vaut

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi \zeta_{BV}} (\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) R_\infty^2 R_{BV} \frac{M_0^{BC}}{M_{courbure}^{BC}}} \quad (26.6)$$

A partir de l'accroissement d'énergie ΔE_{inter}^{BV-BC} , on peut déduire la force "gravitationnelle" d'interaction entre les deux boucles

$$F_{grav}^{BV-BC}(d) = \frac{\partial E_{inter}^{BV-BC}}{\partial d} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \left(\frac{M_{courbure}^{BC} M_0^{BV}}{2d^2} - \frac{8(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) R_\infty^2 R_{BV}}{\pi \zeta_{BV}} \frac{M_0^{BV} M_0^{BC}}{d^5} \right) \quad (26.7)$$

A longue distance, c'est le terme en $1/d^2$ qui l'emporte, de sorte que la force d'interaction est négative, donc répulsive, si $M_{courbure}^{BC} < 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de nature interstitielle, et elle est positive, donc attractive, si $M_{courbure}^{BC} > 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de nature lacunaire.

A courte distance, c'est le terme en $1/d^5$ qui l'emporte, de sorte que la force d'interaction devient forcément négative, donc répulsive. Dans le cas de la boucle coin lacunaire pour laquelle $M_{courbure}^{BC} > 0$, la force d'interaction passe par zéro pour $d = d_1$ qui vaut

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \zeta_{BV}} (\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) R_\infty^2 R_{BV} \frac{M_0^{BC}}{M_{courbure}^{BC}}} = d_0 \sqrt[3]{4} \quad (26.8)$$

et elle présente un maximum pour $d = d_2$ qui vaut

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{40}{\pi \zeta_{BV}} (\alpha_{BC}+2\beta_{BC}) R_\infty^2 R_{BV} \frac{M_0^{BC}}{M_{courbure}^{BC}}} = d_1 \sqrt[3]{10} \quad (26.9)$$

26.2 – L'énergie de couplage d'une Boucle de dispiration Vis-Coin (BVC) formée d'une boucle vis (BV) et d'une boucle coin (BC)

Si une boucle de désinclinaison vis (BV) de rayon R_{BV} se combine à une boucle de dislocation coin (BC) de rayon $R_{BC} = R_{BV}$, on obtient une *Boucle de dispiration Vis-Coin (BVC)*. L'énergie élastique et l'énergie cinétique de cette boucle de dispiration est due au champ de rotation de la boucle vis, au champ d'expansion et de cisaillement de la boucle coin et au champ de vitesse dû aux deux boucles. Comme les divers champs des deux boucles sont tous orthogonaux et

contenus dans le tore entourant la boucle de dispiration coin-vis, l'énergie relativiste de celle-ci est la somme des énergies relativistes *(20.47)* et *(20.48)* des deux boucles, et vaut simplement

$$E_{\boldsymbol{v}}^{BVC} = \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{2c_t^2}\right)\left(E_{dist}^{BV}+E_{dist}^{BC}\right)}_{E_{\boldsymbol{v}}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_t}\frac{1}{2}\left(M_0^{BV}+M_0^{BC}\right)\boldsymbol{v}^2}_{E_{\boldsymbol{v}}^{cin}} = \frac{\left(E_{dist}^{BV}+E_{dist}^{BC}\right)}{\gamma_t} = \frac{\left(M_0^{BV}+M_0^{BC}\right)c_t^2}{\gamma_t} \qquad (26.10)$$

Par contre, si on considère le champ externe des perturbations d'expansion associé à cette boucle de dispiration, on aura les champs *(23.2)* à courte et longue distance de la boucle vis et les champs *(23.15)* de la boucle coin qui vont se superposer, de sorte que

$$\tau_{ext}^{BVC}(r) \cong \underbrace{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BV}}{r}}_{\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)} \underbrace{+\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{R_\infty^2 R_{BV} M_0^{BV}}{2\pi\zeta_{BV} r^4}}_{\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)} \underbrace{-\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{BC}+M_{courbure}^{BC}}{r}}_{\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)} \qquad (26.11)$$

L'énergie «gravitationnelle» de ce champ de perturbations se calcule de la façon suivante

$$\begin{aligned} E_{grav}^{BVC} &\cong \iiint_V dV\left[K_1\left(\tau_{ext}^{BVC}(r)\right)^2 - \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\tau_{ext}^{BVC}(r)\right] \\ &\cong \iiint_V \left[\begin{array}{l} K_1\left(\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)\right)^2 \\ -\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\left(\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)\right)\end{array}\right] dV \end{aligned} \qquad (26.12)$$

On retrouve alors les énergies individuelles des champs de perturbation de chacune des boucles, mais il s'y ajoute un nouveau terme de couplage entre les deux boucles, dû aux termes croisés d'interaction entre la boucle vis et la boucle coin qui interviennent dans le terme carré $\left(\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)\right)^2$, et qui contribuent à l'accroissement suivant d'énergie

$$\begin{aligned} \Delta E_{couplage}^{BVC} &\cong 2K_1\iiint_V\left(\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)\tau_{ext\,LD}^{BV}(r)+\tau_{ext\,LD}^{BC}(r)\tau_{ext\,CD}^{BV}(r)\right)dV \\ &\cong \frac{128\pi K_1\boldsymbol{G}_{grav}^2}{c_t^4}\left(M_0^{BC}+M_{courbure}^{BC}\right)M_0^{BV}\int_R^{R_\infty}\left(1-\frac{R_\infty^2 R_{BV}}{2\pi\zeta_{BV}}\frac{1}{r^3}\right)dr \end{aligned} \qquad (26.13)$$

En effectuant l'intégration, en se rappelant que $M_0^{BC} << \left|M_{courbure}^{BC}\right|$ et en ne conservant que le terme le plus important de cette intégration, on obtient l'énergie de couplage entre les champs de gravitation externes des deux boucles composant la dispiration

$$\Delta E_{couplage}^{BVC} \cong -\frac{32K_1\boldsymbol{G}_{grav}^2}{\zeta_{BV}c_t^4}\frac{R_\infty^2}{R_{BV}}M_{courbure}^{BC}M_0^{BV} \qquad (26.14)$$

En fait, cette énergie est due au couplage du champ externe de perturbation d'expansion à courte portée dû à la charge de rotation de la boucle vis avec le champ externe de perturbation d'expansion dû à la charge de courbure de la boucle coin. C'est donc une interaction entre les charges de rotation et de courbure des deux boucles de la dispiration via leurs effets gravitationnels externes respectifs! On constate aussi que cette énergie de couplage est négative si $M_{courbure}^{BC} > 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de type lacunaire, et positive si $M_{courbure}^{BC} < 0$, c'est-à-dire si la boucle coin est de type interstitiel.

.

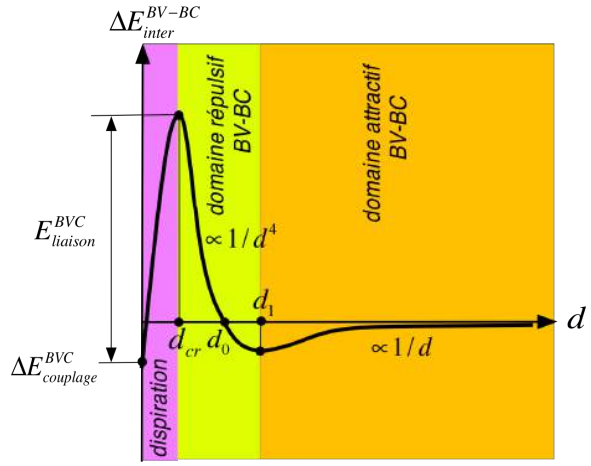
De l'énergie de liaison d'une dispiration BVC

Comparons maintenant l'énergie d'interaction gravitationnelle à courte distance $\Delta E_{inter\,CD}^{BV-BC}(d)$ entre deux boucles distantes de d avec l'énergie de couplage $\Delta E_{couplage}^{DCV}$ au sein de la boucle de dispiration. Il vient

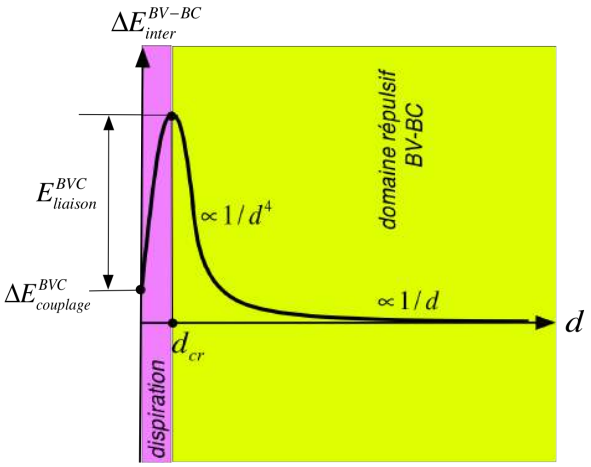
$$\left|\frac{\Delta E_{couplage}^{BVC}}{\Delta E_{inter\,CD}^{BV-BC}(d)}\right| = \frac{2K_1}{K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)} \frac{1}{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})} \frac{\left|M_{courbure}^{BC}\right|}{M_0^{BC}} \frac{d^4}{R_\infty^2 R_{BV}^2} \qquad (26.15)$$

Pour une distance de l'ordre de $d \approx 2R_{BV}$, on a donc, si $\tau_0 << \tau_{0cr}$ et en se rappelant que $K_3 = K_0$ dans le réseau cosmologique parfait

$$\left|\frac{\Delta E_{couplage}^{BVC}}{\Delta E_{inter\,CD}^{BV-BC}(d)}\right|_{d\cong 2R} \cong \frac{32}{(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})} \frac{K_1}{K_0} \frac{R_{BV}^2}{R_\infty^2} \frac{\left|M_{courbure}^{BC}\right|}{M_0^{BC}} \cong \frac{64\pi}{5(\alpha_{BC}+2\beta_{BC})\zeta_{BC}} \frac{K_1}{K_2} \frac{R_{BV}^2 R_{BC}}{R_\infty^2 \left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right|} < 1 \qquad (26.16)$$



boucle de dislocation lacunaire
- boucle de désinclinaison vis



boucle de dislocation interstitielle
- boucle de désinclinaison vis

Figure 26.1 *- Potentiels d'interaction (de capture) entre une boucle de dislocation coin (lacunaire ou interstitielle) et une boucle de désinclinaison vis pour former une dispiration coin-vis*

Dans cette expression, il apparaît le rapport $R_{BV}^2 R_{BC} / R_\infty^2 \left|\vec{\boldsymbol{B}}_{BC}\right|$ qui a toute les chances d'être beaucoup plus petit que l'unité, de sorte que la valeur absolue $\left|\Delta E_{couplage}^{BVC}\right|$ de l'énergie de couplage de la dispiration est assurément nettement plus petite que l'énergie d'interaction ΔE_{inter}^{BV-BC} entre les deux boucles lorsqu'elles sont séparées d'une distance $d \approx 2R_{BV}$.

On en déduit que *l'énergie potentielle d'interaction* ΔE_{inter}^{BV-BC} entre les deux boucles , en fonction de la distance d entre ces deux boucles se comporte en fait comme un *potentiel de capture* tel que celui représenté à la figure 26.1 dans le domaine "dispiration". Ce potentiel maintient liées les deux boucles au sein de la dispiration, avec une énergie de liaison $E_{liaison}^{BVC}$ correspondant à la différence d'énergie entre le maximum de l'énergie potentielle d'interaction ΔE_{inter}^{BV-BC} des boucles vis et coin séparées et l'énergie de couplage $\Delta E_{couplage}^{BVC}$ de la dispiration (fig. 26.1).

L'énergie potentielle d'interaction ΔE_{inter}^{BV-BC} représente une force répulsive en $1/d^5$ entre les deux boucles dès que celles-ci se sépare d'une distance supérieure à une certaine distance critique de l'ordre de $d_{cr} \approx 2R_{BV}$. Pour séparer les deux boucles de la dispiration, il suffit alors:

- soit d'une *fluctuation d'énergie* égale ou supérieure à l'énergie de liaison $E_{liaison}^{BVC}$ de la boucle de dispiration, de sorte à ce que les deux boucles individuelles se retrouvent à une distance $d > d_{cr}$ et se repoussent définitivement,
- soit que la boucle coin franchisse la barrière de potentiel par *effet tunnel* quantique et que les deux boucles individuelles se retrouvent à une distance $d > d_{cr}$ et se repoussent définitivement.

26.3 – De l'analogie avec l'interaction faible du Modèle Standard des particules élémentaires

L'interaction à courte portée que nous venons de décrire entre les charges de rotation et de courbure, respectivement d'une boucle de désinclinaison vis et d'une boucle de dislocation coin, présente une analogie remarquable avec *l'interaction faible du Modèle Standard des particules élémentaires.*

L'interaction faible du Modèle Standard est l'une des quatre forces fondamentales de la nature. Elle est responsable de la désintégration radio-active des particules élémentaires et elle affecte tous les fermions, à savoir les électrons, les neutrinos et les quarks. Dans le Modèle Standard, l'interaction faible est liée à l'échange de bosons massifs $\overline{W}^+$, W^- et Z^0, et elle permet d'expliquer les interactions faibles leptoniques, semi-leptoniques et hadroniques. C'est parce que cette interaction est de très courte portée et qu'elle est plus faible que l'interaction forte et que l'interaction électromagnétique qu'elle a été qualifiée d'interaction faible. D'autre part, elle a aussi la propriété de briser la symétrie de parité ***P*** et la symétrie ***CP***. Elle est aussi directement liée à la charge électrique puisque les interactions électromagnétiques et les interactions faibles ont pu être unifiées comme deux aspects d'une interaction électrofaible.

L'analogie entre l'interaction de courte portée entre une boucle coin et une boucle vis et l'interaction faible du Modèle Standard saute littéralement aux yeux. En effet:

- toutes deux sont à l'origine d'une liaison faible au sein des particules ou des boucles,
- les deux interactions ont une portée très faible,
- elles permettent toutes deux la décomposition d'une particule ou d'une boucle en d'autre par-

.

ticules ou d'autre boucles,

- la décomposition d'une particule ou d'une boucle de dispiration peut être obtenue par une fluctuation locale de l'énergie, ou un effet tunnel quantique, qui intervient évidemment de manière aléatoire, tout comme la désintégration radio-active associée à l'interaction faible est un phénomène statistique,
- l'interaction faible participe à la brisure de symétrie ***P*** et ***CP***, ce qui concorde avec le fait qu'il ait dissymétrie des interactions entre une boucle vis et une boucle coin lacunaire ou interstitielle (fig. 26.1).

A titre d'exemple, considérons la désintégration faible faisant transformer le muon μ^- en électron e^- représentée à la figure 26.2. Cette interaction faible de type leptonique présente une décomposition initiale du muon μ^- en un neutrino muonique ν_μ et un boson massif W^-, puis la décomposition du boson massif W^- en un électron e^- et un anti-neutrino électronique $\overline{\nu}_e$.

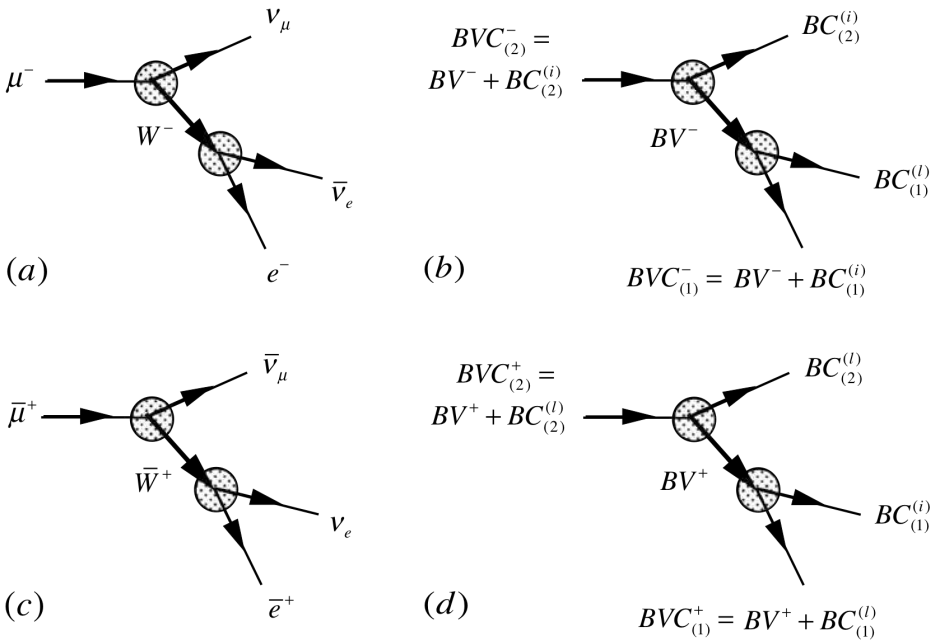


Figure 26.2 *- Analogie entre l'interaction faible leptonique et les décompositions et recompositions de boucles de dispiration*

Considérons alors la conjecture 8 qui stipule que «*les singularités de nature lacunaire correspondent par analogie à l'anti-matière et les singularités de nature interstitielle à la matière*». Sur cette base, supposons par exemple que la combinaison d'une boucle de désinclinaison vis BV^- avec une boucle de dislocation coin interstitielle $BC^{(i)}_{(1)}$ sous la forme d'une boucle de dispiration soit l'analogue de l'électron e^-, et imaginons que la combinaison d'une désinclinaison vis BV^- avec une boucle de dislocation coin interstitielle $BC^{(i)}_{(2)}$ *de topologie un peu différente* (voir chapitre 30) forme une boucle de dispiration analogue au muon μ^-. La désintégration faible faisant transformer le muon μ^- en électron e^- représentée à la figure 26.2(a) possèderait alors une désintégration analogue des boucles représentée à la figure 26.2(b). La dispiration initiale correspondant au muon μ^-, et composée du couple $BV^- + BC^{(i)}_{(2)}$ lié par la

force faible, se décompose en une boucle de désinclinaison vis BV^- portant la charge de rotation, et analogue au boson massif W^- portant la charge électrique, et en une boucle de dislocation coin interstitielle $BC_{(2)}^{(i)}$ analogue du neutrino muonique ν_μ. Ensuite, la boucle de désinclinaison vis BV^- se combine à une boucle de dislocation coin interstitielle $BC_{(1)}^{(i)}$ pour former une dispiration $BV^- + BC_{(1)}^{(i)}$, analogue de l'électron e^-, en émettant une boucle de dislocation coin lacunaire $BC_{(1)}^{(l)}$, anti-boucle de la boucle de dislocation coin interstitielle $BC_{(1)}^{(i)}$, et analogue de l'anti-neutrino électronique $\overline{\nu}_e$.

L'interaction faible correspondant à la transformation de l'anti-muon $\overline{\mu}^+$ en un positron $\overline{e}^+$ représentée à la figure 26.2(c)) possède aussi son analogue parfait avec des boucles représenté à la figure 26.2(d). Mais cette fois, la boucle de désinclinaison vis est remplacée par l'anti-boucle BV^+ de charge de rotation opposée et les boucles coin lacunaires sont remplacées par des boucles coin interstitielles et vice-versa. Si on considère maintenant les interactions entre boucles des figures 26.2(b) et 26.2(d), on imagine immédiatement qu'il existe une dissymétrie entre ces deux réactions dues aux potentiels d'interaction légèrement différents dans le cas des boucles coin lacunaires et interstitielles (fig. 26.1). Cette dissymétrie devient alors l'analogue de la violation de symétrie de parité ***P*** et de la symétrie ***CP*** dans le cas des interactions faibles.

On reviendra en détail au chapitre 31 sur les structures topologiques des boucles de désinclinaison vis et des boucles de dislocation coin qui pourraient être impliquées dans les interactions faibles.

Chapitre 27

Un scénario plausible d'évolution cosmologique vers notre Univers actuel

Dans le cadre de notre analogie avec les grandes théories de la physique, on commence dans ce chapitre, *essentiellement qualitatif et prospectif*, par émettre quelques hypothèses en ce qui concerne la constitution de la matière et de l'anti-matière en supposant que particules et anti-particules sont constituées d'amas de singularités topologiques en boucles (de désinclinaison vis, de dislocation coin et de dislocation mixte) d'un réseau cosmologique parfait. La faible dissymétrie existant entre matière et anti-matière est introduite en assumant que la matière est basée sur des boucles coin de nature interstitielle et que l'anti-matière est basée sur des boucles coin de nature lacunaire. En utilisant les résultats du chapitre précédent (tableau 25.1), on verra que les interactions de nature gravitationnelle entre particules et anti-particules de l'Univers sont quasiment toutes attractives, tout en présentant une faible gradation des intensités d'interaction suivant le type de particules interagissant. Seules les forces qui font intervenir au moins une particule basée exclusivement sur un amas de boucles coin de nature interstitielle (qu'on interprétera comme des neutrinos) présentent quand à elles une nature répulsive!
Sur la base de ces considérations, il est possible d'imaginer un scénario d'évolution cosmologique des singularités topologiques qui se forment après le big-bang,. Ce scénario explique de manière très plausible la formation des galaxies, les phénomènes associés à la fameuse *masse noire* des astrophysiciens, la disparition de l'anti-matière dans l'Univers, la formation de trous noirs massifs au centre des galaxies de matière, la formation des étoiles et la formation des étoiles à neutrons lors de l'effondrement gravitationnel d'étoiles de matière.
Puis on cherchera à interpréter la constante de Hubble, le «redshift» des galaxies et le fond diffus cosmologique de rayonnement à la lumière de notre théorie.

27.1 – Constitution de la matière et de l'anti-matière et comportements de leurs interactions gravitationnelles

L'existence de 15 forces d'interaction «gravitationnelles» différentes suivant la nature des singularités mises en jeu (tableau 25.1), ainsi que le comportement de ces forces en fonction de l'expansion de fond du réseau (figure 25.1), permettent d'élaborer un scénario assez simple et tout à fait plausible de l'évolution cosmologique de notre Univers.

De la matière et de l'anti-matière

Partons de la conjecture 8, qui stipulait que les singularités de nature lacunaire correspondent

par analogie à l'anti-matière et les singularités de nature interstitielle à la matière, pour introduire les hypothèses suivantes:
- les particules de matière (électron e^-, neutrino ν^0, neutron n^0, proton p^+, etc.) de l'Univers seraient constituées d'assemblages de boucles de désinclinaison vis, qui leur donnent leur charge électrique, de boucles de dislocation mixte, qui leur donnent leur champ électrique dipolaire, et de boucles de dislocation coin de nature interstitielle, qui leur donnent une *charge de courbure négative*,
- les particules d'anti-matière (positron $\overline{e}^+$, anti-neutrino $\overline{\nu}^0$, anti-neutron $\overline{n}^0$, anti-proton $\overline{p}^-$, etc.) de l'Univers seraient constituées d'assemblages de boucles de désinclinaison vis, qui leur donnent leur charge électrique, de boucles de dislocation mixte, qui leur donnent leur champ électrique dipolaire, et de boucles de dislocation coin de nature lacunaire, qui leur donnent une *charge de courbure positive*.

De la dissymétrie entre particules et anti-particules

Si on accepte cette distinction entre particules et anti-particules, la charge de courbure positive ou négative due à la composante de boucles coin de nature interstitielle ou lacunaire, qui n'apparaît ni en Relativité Générale, ni dans le Modèle Standard des particules élémentaires, introduit une faible dissymétrie entre particules et anti-particules *qui n'existe que dans notre théorie*.
Cette dissymétrie n'est pas sans rappeler la dissymétrie observée expérimentalement entre particules et anti-particules en Physique des Particules, sans qu'on sache très bien quelle cause lui attribuée. Cette dissymétrie affecte certaines propriétés des particules élémentaires (comme la violation de la symétrie ***CP***, action combinée d'une conjugaison de charge ***C*** et d'une symétrie par réflexion ***P***), mais pas la masse au repos de ces particules (liée à la non violation de la symétrie ***CPT***, action combinée d'une conjugaison de charge ***C***, d'une symétrie par réflexion ***P*** et d'une inversion du temps ***T***) ! Or, dans la physique actuelle, que ce soit la Physique des Particules ou la Gravitation Générale, il n'est jamais fait mention de la propriété de charge de courbure, puisque celle-ci ne peut apparaître que par l'approche des singularités topologiques de réseau que nous avons développée dans cet ouvrage! Cette propriété de charge de courbure propre aux singularités topologiques de réseau pourrait par conséquent être une excellente candidate pour expliquer la dissymétrie observée expérimentalement entre particules et anti-particules de matière.
Pour simplifier la suite de cet exposé, appelons donc dorénavant:
- *particule* X une particule de matière comme un électron e^-, un muon μ^-, un tauon τ^-, un neutron n^0, un proton p^+ (ou toute autre particule élémentaire composée de quarks) qui fait intervenir des boucles de désinclinaison vis, donc des charges électriques, éventuellement des boucles de dislocation mixte en cas de champ électrique dipolaire et majoritairement des boucles de dislocation coin de nature interstitielle, donc *une charge de courbure négative*,
- *anti-particule* $\overline{X}$ une particule d'anti-matière comme un positron $\overline{e}^+$, un anti-muon $\overline{\mu}^+$, un anti-tauon $\overline{\tau}^+$, un anti-neutron $\overline{n}^0$, un anti-proton $\overline{p}^-$ (ou toute autre particule composée de quarks) qui fait intervenir des boucles de désinclinaison vis, donc des charges électriques, éventuellement des boucles de dislocation mixte en cas de champ électrique dipolaire, et majoritairement des boucles de dislocation coin de nature lacunaire, donc *une charge de courbure*

positive,

- *neutrino* ν^0 une particule de matière correspondant au neutrino électronique ν_e, au neutrino muonique ν_μ ou au neutrino tauique ν_τ, qui ne fait pas intervenir de boucles de désinclinaison vis et de boucles de dislocation mixte, mais uniquement des boucles de dislocation coin de nature interstitielle, donc *une charge de courbure négative*,

- *anti-neutrino* $\overline{\nu}^0$ une particule d'anti-matière correspondant à l'anti-neutrino électronique $\overline{\nu}_e$, à l'anti-neutrino muonique $\overline{\nu}_\mu$ ou à l'anti-neutrino tauique $\overline{\nu}_\tau$, qui ne fait pas intervenir de boucles de désinclinaison vis et de boucles de dislocation mixte, mais uniquement des boucles de dislocation coin de nature lacunaire, donc *une charge de courbure positive*.

A ces 4 types de particules ou anti-particules, on peut, grâce aux chapitres précédents, attribuer des masses d'inertie et des masses de courbure équivalentes, qui satisfont les relations suivantes dans le cas des particules et anti-particules, et dans le cas des neutrinos et anti-neutrinos

$$\begin{cases} M_0^X = M_0^{\overline{X}} > 0 \\ M_{courbure}^{\overline{X}} > 0 \quad ; \quad M_{courbure}^X < 0 \\ \left| M_{courbure}^X \right| = M_{courbure}^{\overline{X}} << M_0^X = M_0^{\overline{X}} \end{cases} \qquad (27.1)$$

$$\begin{cases} M_0^{\nu^0} = M_0^{\overline{\nu}^0} > 0 \\ M_{courbure}^{\overline{\nu}^0} > 0 \quad ; \quad M_{courbure}^{\nu^0} < 0 \\ \left| M_{courbure}^{\nu^0} \right| = M_{courbure}^{\overline{\nu}^0} >> M_0^{\nu^0} = M_0^{\overline{\nu}^0} \end{cases} \qquad (27.2)$$

De l'effet de la dissymétrie entre particules et anti-particules sur les interactions gravitationnelles

Ainsi, sans connaître au préalable la constitution exacte en terme de boucles de singularités des diverses particules et anti-particules, on peut déduire grâce à ces relations entre masses d'inertie et masses de courbure, des informations très pertinentes à propos du comportement des forces d'interaction gravitationnelles entre ces diverses particules. En effet, dans le cas de l'interaction entre particules X et $\overline{X}$, on a, grâce au tableau 25.1, que

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{grav}^{X-X} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} + \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^X M_0^X}{d^2} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} - \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^X}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\overline{X}} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_0^X M_0^{\overline{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^X M_0^{\overline{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^X}{d^2} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\overline{X}-\overline{X}} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^{\overline{X}}\right)^2}{d^2} + \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^{\overline{X}}}{d^2} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} + \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^{\overline{X}}}{d^2} \end{cases} \qquad (27.3)$$

On en déduit les relations d'inégalité suivantes entre les forces d'interaction gravitationnelle

$$\boldsymbol{F}_{grav}^{X-X} < \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\overline{X}} < \boldsymbol{F}_{grav}^{\overline{X}-\overline{X}} \qquad (27.4)$$

Comme $M_{courbure}^{\overline{X}} << M_0^{\overline{X}}$, la différence entre ces forces d'interaction reste faible, mais elle assure tout de même une dissymétrie entre particules et anti-particules (gravitationnellement, les

.

particules s'attirent un peu moins fort que les anti-particules) qui pourrait jouer un rôle important dans l'évolution cosmologique de l'Univers, comme nous le verrons dans la section suivante!
Dans le cas de l'interaction entre particules X et Y, on a

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{grav}^{X-Y} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^Y}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{X}} M_0^Y}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{Y}} M_0^X}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-Y} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^Y}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{X}} M_0^Y}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{Y}} M_0^X}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\bar{Y}} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^Y}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{X}} M_0^Y}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{Y}} M_0^X}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\bar{Y}} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^Y}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{X}} M_0^Y}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{Y}} M_0^X}{d^2} \end{cases} \tag{27.5}$$

On en déduit les relations d'inégalité suivantes entre les forces d'interaction gravitationnelle

$$\boldsymbol{F}_{grav}^{X-Y} < \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-Y} \cong \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\bar{Y}} < \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\bar{Y}} \tag{27.6}$$

qui montrent à nouveau que les particules s'attirent un peu moins fort que les anti-particules!
Quant aux cas qui font intervenir les neutrinos, on a

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{grav}^{\nu^0-\nu^0} \cong 2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\nu^0} M_0^{\nu^0}}{d^2} \cong -2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{\nu}^0} M_0^{\nu^0}}{d^2} < 0 \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\nu^0-\bar{\nu}^0} \cong \left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\nu^0} M_0^{\bar{\nu}^0}}{d^2} + \left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{\nu}^0} M_0^{\nu^0}}{d^2} + 2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\bar{\nu}^0} M_0^{\nu^0}}{d^2} \\ \qquad \cong 2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{\left(M_0^{\nu^0}\right)^2}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{\nu}^0-\bar{\nu}^0} \cong 2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{\nu}^0} M_0^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \cong 2\left(\alpha_{BC}+2\beta_{BC}\right)\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_{courbure}^{\bar{\nu}^0} M_0^{\nu^0}}{d^2} > 0 \end{cases} \tag{27.7}$$

On déduit donc les relations suivantes

$$\boldsymbol{F}_{grav}^{\nu^0-\nu^0} < 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{\nu}^0-\bar{\nu}^0} > 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{\nu^0-\bar{\nu}^0} \cong 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{\nu^0-\nu^0} = -\boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{\nu}^0-\bar{\nu}^0} \tag{27.8}$$

Autrement dit, les neutrinos se repoussent, avec une force de même ampleur que les anti-neutrinos s'attirent. Quant à l'interaction entre un neutrino et un anti-neutrino, elle est extrêmement faible puisqu'elle fait intervenir le produit $(M_0^{\nu^0})^2$!
Finalement, en ce qui concerne les interactions entre particules et neutrinos, on a

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\nu^0} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^{\nu^0}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \cong -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\bar{\nu}^0} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^{\nu^0}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \cong -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\nu^0} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^{\nu^0}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \cong +\dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\bar{\nu}^0} \cong \boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_0^{\nu^0}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \cong +\dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^{\nu^0} M_{courbure}^{\bar{X}}}{d^2} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{G}_{grav}\dfrac{M_0^X M_{courbure}^{\bar{\nu}^0}}{d^2} \end{cases} \tag{27.9}$$

ce qui implique que

$$\boldsymbol{F}_{grav}^{X-\nu^0} < 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\bar{\nu}^0} \cong 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\nu^0} \cong 0 \quad ; \quad \boldsymbol{F}_{grav}^{\bar{X}-\bar{\nu}^0} > 0 \tag{27.10}$$

Ainsi, l'interaction entre un neutrino et une particule est répulsive. Entre un anti-neutrino et une anti-particule, elle est attractive. Et entre un neutrino et une anti-particule, ou entre un anti-neu-

trino et une particule, l'interaction peut être légèrement positive ou négative, mais de moindre ampleur que dans les deux premiers cas.

27.2 – Un scénario plausible d'évolution cosmologique des singularités topologiques dans un réseau cosmologique parfait

Les effets de l'expansion cosmologique du réseau sur les interactions gravitationnelles

Avec les relations d'inégalité entre forces d'interaction gravitationnelle que nous venons d'obtenir pour les interactions entre particules, anti-particules, neutrinos et anti-neutrinos, on peut revenir à l'évolution cosmologique du réseau cosmologique parfait (fig. 16.8 et 16.11g), et y intégrer les comportements des forces gravitationnelles d'interaction entre particules. On obtient la figure 27.1.

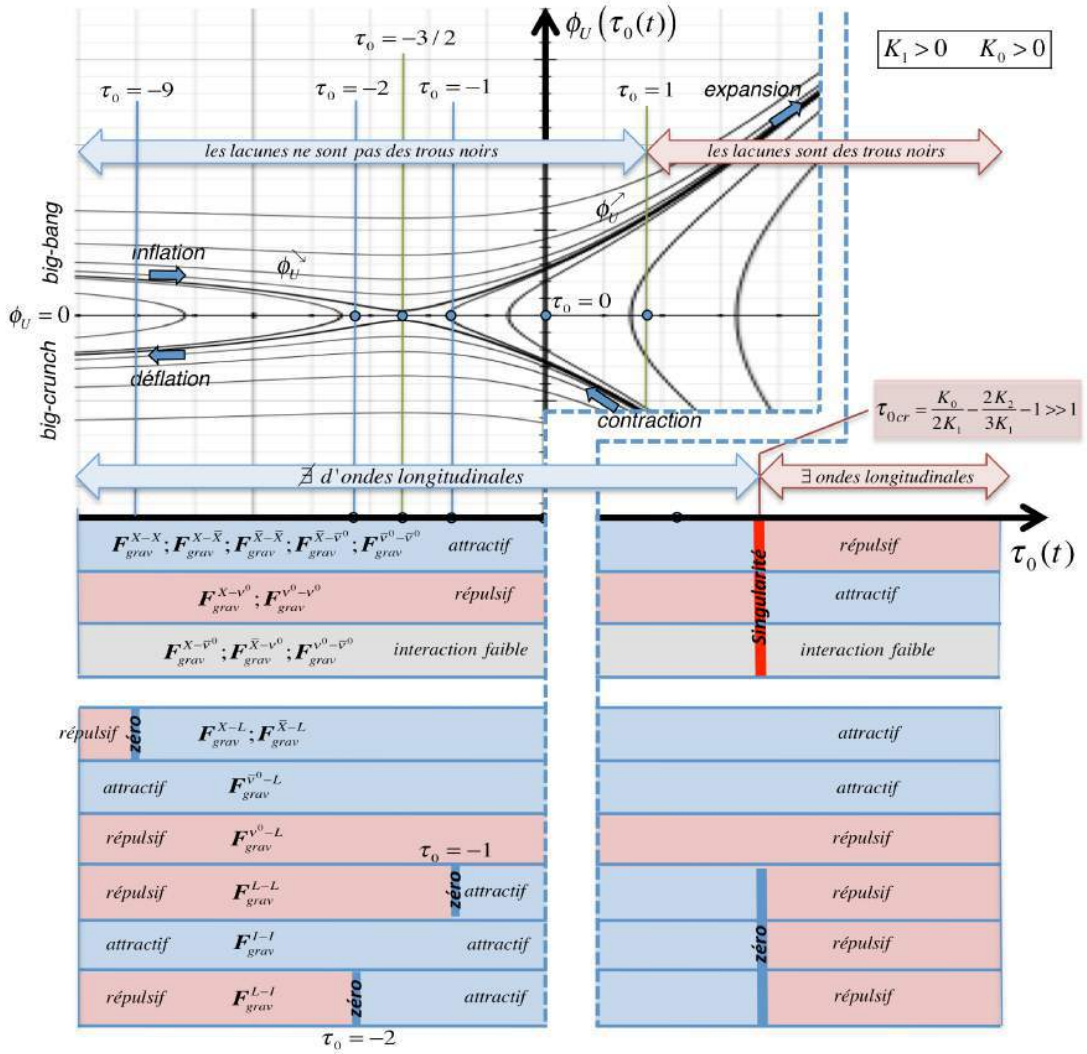


Figure 27.1 *- Comportement des forces d'interaction «gravitationnelles» en fonction de l'évolution cosmologique de l'expansion de fond du réseau*

Comme le montre cette figure, il apparaît une suite de valeurs caractéristiques de l'expansion $\tau_0(t)$ pour lesquelles il existe de soudaines modifications, soit du comportement de l'expansion cosmologique, soit du comportement des diverses forces d'interaction gravitationnelle. Dans cette figure, on a aussi reporté les forces d'interaction gravitationnelle faisant intervenir les lacunes macroscopiques (trous noirs dès que $\tau_0(t) \geq 1$) et les interstitiels macroscopiques (étoiles à neutrons). Parmi les valeurs caractéristiques importantes de l'expansion cosmologique du réseau, il y a:

• $\tau_0(t \to t_{init}) \to -\infty$, qui représente le *«big-bang»* initial du réseau au temps t_{init},

• $\tau_0(t) = -9$, qui représente la valeur d'expansion pour laquelle la force d'interaction entre une lacune macro et une particule ou une anti-particule passe de répulsive à attractive,

• $\tau_0(t) = -2$, qui représente la valeur d'expansion pour laquelle la force d'interaction entre une lacune macro et un interstitiel macro passe de répulsive à attractive,

• $\tau_0(t) = -3/2$ *(16.15)*, qui correspond au passage du stade de *l'inflation*, pendant laquelle la vitesse d'expansion $\phi_U\left(\tau_0(t)\right)$ décroît, vers le stade de *l'expansion* pendant laquelle la vitesse d'expansion $\phi_U\left(\tau_0(t)\right)$ se remet à croître,

• $\tau_0(t) = -1$, qui correspond au passage du stade de répulsion entre lacunes macroscopiques au stade d'attraction entre lacunes macroscopiques,

• $\tau_0(t) = 1$, qui représente la valeur d'expansion à partir de laquelle les lacunes macroscopiques deviennent des trous noirs,

• $\tau_0(t) = \tau_{0cr}$, qui représente *l'expansion critique* à partir de laquelle il apparaît des ondes longitudinales au sein du réseau au détriment des modes propres localisés de vibration de l'expansion, et qui représente aussi l'expansion critique pour laquelle plusieurs des forces d'interaction gravitationnelle changent de signe, soit en passant par une singularité infinie, soit en passant par une valeur nulle.

Au-delà de τ_{0cr}, l'évolution cosmologique du réseau passe du stade de *l'expansion*, pendant laquelle la vitesse d'expansion $\phi_U\left(\tau_0(t)\right)$ est positive, vers un stade de *contraction* pendant lequel la vitesse d'expansion $\phi_U\left(\tau_0(t)\right)$ devient négative, et qui se termine, après des stades de *contraction* et de *déflation*, par un *«big-crunch»* suivi d'un nouveau *«big-bang»* du réseau, donc par un *«big-bounce»* du réseau dû à l'énergie cinétique emmagasinée, comme le montrent bien les figures 16.8 et 16.11g.

Sur la base de la figure 27.1, un scénario très plausible d'évolution des singularités topologiques du réseau cosmologique peut alors être imaginé, qui implique plusieurs étapes:

D'une hypothétique liquéfaction et solidification du réseau au cours du «big-bounce» et de la formation d'une «soupe chaude initiale» de boucles de singularités

Dans le scénario d'un *Univers «big-bounce»* représenté aux figures 16.8 et 16.11g, la contraction intense du réseau en fin de *«big-crunch»* doit assurément échauffer de manière extrême le réseau puisque son énergie cinétique devient gigantesque, ce qui pourrait amener à sa *«liquéfaction»*. Il est évident qu'un tel phénomène, calqué sur notre connaissance de la matière usuel, n'est pas facile à imaginer, et présuppose qu'aux mailles du réseau soient associées des *«particules étranges»*, qui seraient responsables de la masse associée au réseau (et qui correspondraient peut-être aux fameuses particules de Higgs du Modèle Standard)! Pour que le réseau présente effectivement un phénomène de transition de phase par *«liquéfaction»*, il faudrait que

sa fonction d'état complète ne contienne pas seulement les termes d'énergie libre de déformation *(13.6)*, mais aussi des termes thermiques conduisant à la transition de phase!
En supposant donc que le *«big-bang»* suivant le *«big-crunch»* se produise à partir d'un liquide très chaud de «particules étranges» massives, la phase d'inflation de l'évolution cosmologique devrait conduire à un refroidissement du liquide (à une diminution de son agitation thermique) et à une soudaine *«solidification»* du liquide sous la forme du *réseau cosmologique parfait* que nous avons introduit au chapitre 13! Au cours de cette transition de phase, il pourrait alors apparaître des *défauts de structure du réseau*, sous la forme de dislocations, de désinclinaisons, de boucles, de lacunes et d'interstitiels, et même de joints de grains, de façon très similaire à ce qu'il arrive par exemple lors de la solidification rapide d'un métal.
On pourrait parler d'une *«soupe chaude initiale»* de boucles de singularités, le terme de *soupe* incluant le fait d'une répartition initiale homogène des divers types de boucles de singularité et une mobilité très grande de ces boucles comme dans un liquide, alors que le terme *chaud* inclue la notion d'un réseau encore extrêmement chaud, autrement dit contenant une très grande quantité de *modes d'ondes transversales (photons)* et de *modes de vibrations longitudinales localisées (gravitons)*, impliquant une *très forte agitation thermique des boucles initiales*.

De l'inflation et de la condensation des boucles de singularités en particules et en anti-particules

Au cours de l'inflation, et donc du refroidissement du réseau cosmologique, et dès que la température aura suffisamment baissé, les diverses boucles de dislocation et de désinclinaison vont se regrouper au sein de la *«soupe chaude»* pour former des dispirations topologiques localisées et complexes, formées de boucles de dislocation et de désinclinaison liées par la *force d'interaction faible* (section 25.3), et correspondant aux diverses particules élémentaires de matière (électron e^-, neutrino ν^0, neutron n^0, proton p^+, etc.) et d'anti-matière (positron $\overline{e}^+$, anti-neutrino $\overline{\nu}^0$, anti-neutron $\overline{n}^0$, anti-proton $\overline{p}^-$, etc.) de notre Univers. Quant à l'existence de telles combinaisons de boucles sous forme localisée, pouvant correspondre aux diverses particules élémentaires de notre Univers, elle sera discutée ultérieurement dans cet ouvrage.

De la précipitation de la matière et de l'anti-matière au sein d'une mer de neutrinos et de la formation des galaxies

Au sein de la soupe chaude, mélange initialement homogène de particules et d'anti-particules, il y a des particules et des anti-particules dont l'interaction gravitationnelle est attractive (électron e^-, neutron n^0, proton p^+, positron $\overline{e}^+$, anti-neutrino $\overline{\nu}^0$, anti-neutron $\overline{n}^0$, anti-proton $\overline{p}^-$, etc.), mais il y a aussi les divers neutrinos ν^0 dont l'interaction gravitationnelle avec les autres particules (tels que électron e^-, neutron n^0, proton p^+, positron $\overline{e}^+$, anti-neutron $\overline{n}^0$, anti-proton $\overline{p}^-$, etc.) est répulsive, ou alors quasi inexistante (avec les anti-neutrinos $\overline{\nu}^0$), et il y a évidemment aussi une mer de photons énergétiques interagissant fortement avec les particules et anti-particules chargées via le mécanisme de diffusion Compton. Cette situation liée à la composante de boucles de dislocation coin avec leur charge de courbure est tout à fait originale de notre théorie, et va obligatoirement conduire à un phénomène connu, mais très difficile à expliquer à l'heure actuelle par les autres théories, à savoir *la formation initiale des galaxies*.

.

En effet, il est possible de faire un modèle extrêmement simplifié de la soupe chaude initiale et homogène de particules et anti-particules pour décrire la formation des galaxies. Considérons que la soupe chaude initiale forme une sorte de liquide composé des particules attractives X d'une part (électron e^-, neutron n^0, proton p^+, positron $\overline{e}^+$, anti-neutrino $\overline{\nu}^0$, anti-neutron $\overline{n}^0$, anti-proton $\overline{p}^-$, etc.) et des neutrinos ν^0 répulsifs d'autre part (neutrino électronique ν_e, neutrino muonique ν_μ et neutrino tauique ν_τ,), et essayons d'exprimer l'énergie libre d'interaction $f^{interaction}$ par particule au sein de ce mélange liquide[1]. En introduisant les concentrations C_{ν^0} et $C_X = 1 - C_{\nu^0}$ de neutrinos ν^0 répulsifs et de particules attractives X au sein du mélange, l'énergie libre d'interaction peut s'écrire comme la somme d'un terme d'énergie interne d'interaction et d'un terme entropique de mélange

$$f^{interaction} = \frac{z}{2} \sum_{x,y \in (\nu^0, X)} e_{x-y}^{interaction} C_x C_y - kT_{réseau} \sum_{x,y \in (\nu^0, X)} C_x \ln C_y \qquad (27.11)$$

où z est le nombre de coordination moyen, qui représente le nombre moyen de particules voisines avec lesquelles une particule peut former une interaction de paire et où le facteur 1/2 est introduit pour ne pas compter deux fois chaque interaction.

En introduisant alors une valeur moyenne de la masse d'inertie des particules attractives $\overline{M}_0^X > 0$ et des neutrinos $\overline{M}_0^{\nu^0} > 0$, ainsi que la masse de courbure moyenne $\overline{M}_{courbure}^{\nu^0} < 0$ des neutrinos de matière, et en supposant une distance moyenne $\overline{d}(\tau_0)$ entre les particules dans la soupe chaude homogène initiale, on peut exprimer très approximativement l'énergie libre d'interaction par particule sous la forme suivante

$$f^{interaction} \cong \frac{z}{2}\left[-\boldsymbol{G}_{grav} \frac{(\overline{M}_0^X)^2}{\overline{d}(\tau_0)} C_X + \frac{1}{2} \boldsymbol{G}_{grav} \frac{\overline{M}_{courbure}^{\nu^0} \overline{M}_0^X}{\overline{d}(\tau_0)} C_X C_{\nu^0} + 2(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC}) \boldsymbol{G}_{grav} \frac{\overline{M}_{courbure}^{\nu^0} \overline{M}_0^{\nu^0}}{\overline{d}(\tau_0)} C_{\nu^0} \right] \qquad (27.12)$$
$$- kT_{réseau}\left[C_{\nu^0} \ln C_{\nu^0} + C_X \ln C_X \right]$$

Dans cette expression, le terme contenant le facteur $(\alpha_{BC} + 2\beta_{BC})$ est négligeable face aux deux autres termes, de sorte qu'on peut écrire, en introduisant $C_X = 1 - C_{\nu^0}$

$$f^{interaction} \cong \frac{z}{2}\left[-\boldsymbol{G}_{grav} \frac{(\overline{M}_0^X)^2}{\overline{d}(\tau_0)} \left(1 - C_{\nu^0}\right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{G}_{grav} \frac{\overline{M}_{courbure}^{\nu^0} \overline{M}_0^X}{\overline{d}(\tau_0)} C_{\nu^0} \left(1 - C_{\nu^0}\right) \right] \qquad (27.13)$$
$$- kT_{réseau}\left[C_{\nu^0} \ln C_{\nu^0} + \left(1 - C_{\nu^0}\right) \ln\left(1 - C_{\nu^0}\right) \right]$$

Si on représente cette énergie libre d'interaction en fonction de la concentration C_{ν^0} de neutrinos pour différentes températures du réseau (figure 27.2), on constate qu'à haute température l'énergie libre minimum est obtenue par un mélange homogène des particules attractives X et des neutrinos répulsifs ν^0. Mais si la température du réseau baisse suffisamment, il apparaît deux minima d'énergie libre en fonction de la concentration C_{ν^0} : un minimum correspondant à une très faible concentration de neutrinos et un minimum correspondant à une très forte concentration de neutrinos. En fait, il apparaît une *transition de phase par précipitation*, qui tend à séparer les particules attractives X et les neutrinos répulsifs ν^0. Il va donc apparaître des *précipités*, sorte d'ilots constitués de particules attractives X, au sein d'une mer de neutrinos répulsifs ν^0. A faible température, les minima d'énergie libre correspondent aux concentrations

---

[1] *voir section 7.6 dans «Théorie eulérienne des milieux déformables: charges de dislocation et de désinclinaison dans les solides», G. Gremaud, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne 2013, ISBN 978-2-88074-964-4 (751 pages).*

$C_{\nu^0} = 0$ et $C_{\nu^0} = 1$, ce qui correspond à une séparation complète des particules attractives et des neutrinos répulsifs!

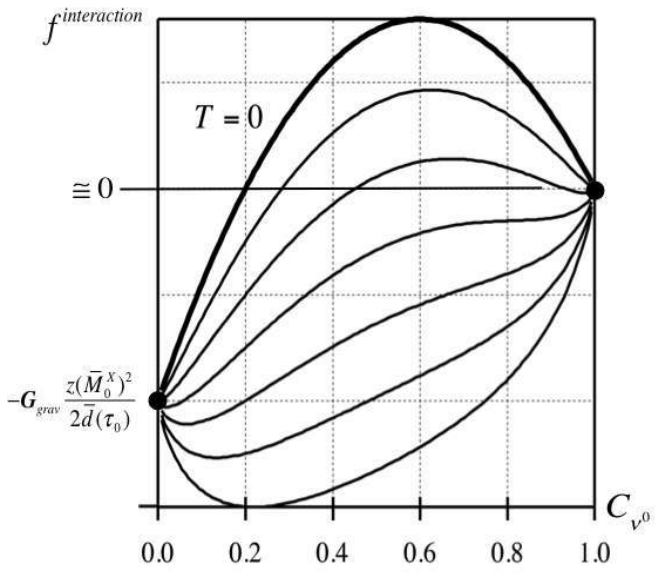


Figure 27.2 *- L'énergie libre d'interaction par particule au sein de la soupe chaude initiale de particules en fonction de la concentration de neutrinos répulsifs et pour différentes températures du réseau*

La *transition de phase par précipitation* des particules et anti-particules attractives sous forme d'amas localisés correspond parfaitement au phénomène de *formation des galaxies de notre Univers.* Dans ce modèle, c'est l'existence de neutrinos répulsifs qui devient le moteur de la formation des galaxies. Et il est très intéressant de noter que la répulsivité des neutrinos de matière est due exclusivement à la charge de courbure des neutrinos, concept qui n'existe pas en Relativité Générale ni dans le Modèle Standard des particules élémentaires. D'autre part, on sait déjà que la charge de courbure est aussi à l'origine de la faible dissymétrie existant entre matière et anti-matière, ce qui confirme le lien fort existant entre cette dissymétrie observée expérimentalement et la formation initiale des galaxies et des structures de notre Univers actuel.

De la «matière noire» des astrophysiciens

Quant à la formation d'une *«mer de neutrinos répulsifs»* dans laquelle baignent les galaxies, elle explique parfaitement le phénomène attribué à la *«matière noire»* par les astrophysiciens. En effet, lorsqu'on observe une galaxie et qu'on mesure expérimentalement les vitesses des étoiles la composant en fonction de leur distance au centre de la galaxie, on constate que les vitesses des étoiles situées en périphérie de la galaxie sont trop élevées par rapport aux vitesses calculées en appliquant la loi de gravitation de Newton avec la densité de masse des étoiles (qu'on peut mesurer expérimentalement via leur brillance). Tout se passe comme s'il existait un halo de matière invisible à nos yeux aux alentours de la galaxie, qui, par son effet gravifique, force les étoiles à tourner plus vite pour compenser cet effet attractif. Cet halo de matière invisible a été appelé *matière noire* par les astrophysiciens, et la recherche de la nature même de cette matière noire est actuellement un des grands sujets de la recherche fondamen-

tale.

Dans notre théorie, le concept de matière noire n'est plus nécessaire, car il est simplement remplacé par le concept de *«mer de neutrinos répulsifs»* dans laquelle baignent toutes les galaxies, les amas globulaires, et les autres structures de l'Univers visible. En effet, considérons une galaxie soumise à la force répulsive de la mer de neutrinos dans laquelle elle baigne. Cette force répulsive correspond en fait à une force de compression qui s'applique sur les étoiles de la banlieue de la galaxie. Pour résister à cette force de compression, les étoiles de la périphérie de la galaxie doivent forcément tourner plus vite que ce qu'on calcule sur la base de la masse visible, de telle sorte à équilibrer la force de compression de la mer de neutrinos par une force centripète additionnelle de rotation!

De la formation et de la ségrégation de la matière et de l'anti-matière au sein des galaxies

Intéressons-nous maintenant à ce qui se passe au sein des galaxies naissantes, pendant le phénomène de précipitation des particules et anti-particules qui s'attirent. Au sein de cette phase liquide qui précipite, les forces d'interaction gravitationnelle attractives présentent de faibles différences suivant qu'on a à faire à des particules ou des anti-particules. Considérons par exemple la famille des particules X et des anti-particules $\overline{X}$. Les forces d'interaction gravitationnelle entre ces particules s'écrivent, d'après *(27.3)*

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{grav}^{X-X} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} - \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^X}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{X-\overline{X}} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} \\ \boldsymbol{F}_{grav}^{\overline{X}-\overline{X}} \cong \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{\left(M_0^X\right)^2}{d^2} + \boldsymbol{G}_{grav} \dfrac{M_{courbure}^{\overline{X}} M_0^{\overline{X}}}{d^2} \end{cases} \qquad (27.14)$$

Avec la masse d'inertie M_0^X de ces particules, on déduit, grâce à l'équation de Newton classique, l'accélération que subissent ces particules lors de leurs interactions

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{grav}^{X-X} \cong \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}}{d^2}\left(M_0^X - M_{courbure}^{\overline{X}}\right) \\ \boldsymbol{a}_{grav}^{X-\overline{X}} \cong \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}}{d^2} M_0^X \\ \boldsymbol{a}_{grav}^{\overline{X}-\overline{X}} \cong \dfrac{\boldsymbol{G}_{grav}}{d^2}\left(M_0^X + M_{courbure}^{\overline{X}}\right) \end{cases} \qquad (27.15)$$

On en déduit que les anti-particules $\overline{X}$ s'attirent plus fortement que les particules X, et on doit par conséquent voir apparaître un *phénomène de ségrégation progressive* des anti-particules et des particules, au cours duquel les anti-particules auront tendance à se regrouper vers le centre de la galaxie naissante, laissant les particules dans la périphérie de la galaxie!

Il est clair que ce phénomène de ségrégation doit être accompagné d'une intense activité d'annihilation entre les particules et les anti-particules, dans une zone située autour du centre de la galaxie, et qui devrait forcément être *une source de rayonnement gamma*. Mais il doit

aussi y apparaître une activité de combinaisons entre particules et entre anti-particules pour former de la matière et de l'anti-matière (initialement des atomes d'hydrogène et d'anti-hydrogène et des atomes d'hélium et d'anti-hélium). Ces processus d'annihilation et de recombinaison doivent se poursuivre jusqu'à ce qu'il apparaisse une séparation effective entre un coeur de galaxie composé essentiellement d'anti-matière et une périphérie de galaxie composée essentiellement de matière. On constate à nouveau que ce *processus de ségrégation de la matière et de l'anti-matière* est à associer à la *charge de courbure des boucles de dislocation coin*, qui est une propriété exclusive de notre théorie, puisque ce sont ces charges qui sont responsables de la masse équivalente de courbure $M^{\bar{X}}_{courbure}$, elle-même responsable de la faible différence d'interaction gravitationnelle attractive entre matière et anti-matière!

De la formation d'un fond diffus cosmologique de rayonnement

Initialement, toutes les particules et anti-particules sont à l'équilibre thermique avec une mer de photons, via des interactions par diffusion Compton, et tant que leur température n'a pas diminué suffisamment pour former des atomes. Mais dès que la température passe en-dessous d'environ 3'000 K, il y a formation des atomes d'hélium, d'anti-hélium, d'hydrogène et d'anti-hydrogène qui assure la neutralité électrique de la matière et de l'anti-matière. A cet instant il y a aussi découplage des photons d'avec la matière et l'anti-matière neutres. L'Univers devient par conséquent transparent aux photons, qui remplissent alors tout l'espace sous la forme d'un *fond diffus cosmologique de rayonnement.* Ce fond diffus cosmologique de rayonnement a été observé et étudié expérimentalement: il est quasiment *isotrope* et présente le *spectre d'un corps noir parfait*, c'est-à-dire une *distribution de Planck de la densité d'énergie* $U(\nu)$ *de photons*, centrée sur une température T qui est mesurée actuellement à la valeur de 2,7 K

$$U(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \qquad (27.16)$$

avec c la vitesse de la lumière, h la constante de Planck, k la constante de Boltzmann, T la température du corps noir et ν la fréquence des photons.
On reviendra à la section suivante sur le processus qui conduit au «refroidissement» de ce fond diffus cosmologique de rayonnement.

De l'effondrement gravitationnel et de la disparition de l'anti-matière par formation de gigantesques trous noirs au centre des galaxies

La formation par précipitation de galaxies composées de particules et d'anti-particules attractives au sein de la mer de neutrinos répulsifs va conduire à des pressions énormes au coeur des galaxies au fur et à mesure de leur évolution. L'apparition d'un mouvement de tournoiement des galaxies permet d'équilibrer partiellement les forces d'attraction gravitationnelle au sein des galaxies et les forces de compression de la mer de neutrinos. Mais au centre même des galaxies, les forces de compression pourraient atteindre des valeurs suffisantes pour assister à un effondrement gravitationnel de leur coeur. Si un tel effondrement intervient, comme le coeur de s galaxies est formé essentiellement d'anti-matière, il sera responsable de l'apparition de lacunes macroscopiques puisqu'au cours de l'effondrement les boucles de désinclinaison vis vont s'annihiler (si l'anti-matière était initialement neutre électriquement), alors que les boucles de

.

dislocation coin lacunaires propres à l'anti-matière se combinent pour former des lacunes macroscopiques de réseau au centre des galaxies.
La lacune macroscopique créée au centre d'une galaxie par l'effondrement gravitationnel de l'anti-matière n'est en fait rien d'autre qu'une *gigantesque singularité topologique*, qui devient un *énorme trou noir* dès que l'expansion de fond du réseau dépasse l'unité ($\tau_0 \geq 1$). Ce phénomène d'effondrement gravitationnel de l'anti-matière ségrégée au coeur des galaxies expliquerait alors parfaitement, et fort simplement, les observations expérimentales de *l'existence de gigantesques trous noirs au centre de la plupart des galaxies* et de *la disparition de l'anti-matière dans notre univers actuel.*

De la coalescence de la matière dans les galaxies et de la formation des étoiles

La matière qui compose les galaxies après l'effondrement du coeur d'anti-matière en un trou noir central va petit à petit coalescer sous l'effet de l'attraction gravifique pour former des nuages de gaz d'hydrogène et d'hélium, divers types d'étoiles et des systèmes planétaires, tels que ceux observés dans notre univers actuel.

De l'effondrement gravitationnel des étoiles et de la formation des étoiles à neutrons

Comme les galaxies sont alors constituées essentiellement de matière, basée sur des *boucles de dislocation coin de nature interstitielle*, tout effondrement gravitationnel d'une très grosse étoile sous l'effet de sa gravité propre doit conduire à une *singularité topologique localisée du type interstitiel macroscopique*, et non du type lacune macroscopique. Il ne peut par conséquent pas apparaître de *trous noirs lacunaires* après effondrement gravitationnel d'une étoile massive composée de matière!
Expérimentalement, on observe parfois et soudainement ce phénomène d'effondrement gravitationnel d'étoiles massives de matière sous la forme d'une *supernova* (d'un nuage de gaz résiduels de l'explosion initiale de l'étoile, qui s'étend à très grande vitesse), avec, au centre de la supernova, un objet relativement petit et très massif, qui devrait correspondre à une singularité interstitielle macroscopique résiduelle, qu'on qualifie communément de *pulsar* (de par ses propriétés d'émission de pulses électromagnétiques dont la fréquence correspond à la fréquence très rapide de rotation de l'objet sur lui-même) ou d'*étoile à neutrons* (de par la densité massique énorme de l'objet).
La suite de l'histoire est alors bien connue et bien décrite par les astrophysiciens, avec la formation d'atomes de masse de plus en plus grande par la fusion nucléaire de l'hydrogène et des éléments légers au coeur des étoiles et par la dispersion de ces éléments par les supernovae, conduisant finalement à l'apparition de tous les éléments de la table de Mendeleïev et à la formation d'étoiles de plus en plus complexes, de systèmes planétaires, etc.

Du futur de notre univers

Dans le scénario de l'u*nivers «big-bounce»* représenté aux figures 16.8 et 16.11g, qui correspond en fait au mieux à notre propre univers, la phase d'expansion à vitesse croissante, dans les conditions où il n'existe pas de propagation d'ondes longitudinales, se situe entre les valeurs

$\tau_0 = -3/2$ et $\tau_0 = \tau_{0cr} >> 1$. Notre Univers actuel doit donc se situer dans ce domaine d'expansion de fond puisque des observations récentes ont montré que l'expansion de l'univers se fait fort probablement à vitesse croissante. On peut même dire que l'expansion de fond actuelle devrait en fait être comprise dans le domaine $1 < \tau_0 < \tau_{0cr}$, puisque des trous noirs massifs semblent bien avoir été observés au centre de la plupart des galaxies, notamment au centre de notre galaxie, la Voie Lactée!

Comme cette plage d'expansion ($1 < \tau_0 < \tau_{0cr} >> 1$) est très grande, il est difficile de savoir où se situe actuellement notre Univers et combien de temps il lui faudra pour atteindre l'expansion critique τ_{0cr}. Mais on peut par contre affirmer que lorsque celui-ci approchera la valeur critique τ_{0cr}, il apparaîtra forcément des phénomènes titanesques de remaniement des objets célestes, de la matière, des trous noirs et de la mer de neutrinos répulsifs puisqu'à ce moment on aura essentiellement que:

- la constante de gravitation $\boldsymbol{G}_{grav}$ deviendra négative en passant par une singularité à τ_{0cr},
- les modes propres de vibrations localisées disparaîtront au profit de la propagation d'ondes longitudinales (ce qui devrait en fait correspondre à la disparition de la physique quantique comme nous le verrons dans la suite de cet ouvrage!).

Rien que ces deux phénomènes devraient être cataclysmiques. Mais on pourrait encore pousser plus loin en considérant les phénomènes qui devraient intervenir lors de la phase de recontraction du réseau cosmologique, surtout lors du passage inverse par la valeur critique τ_{0cr} où la constante de gravitation redeviendrait positive et où il réapparaîtrait des modes propres de vibrations localisées à la place de la propagation d'ondes longitudinales. Ces prédictions sont très probablement du domaine du possible avec notre théorie, quoiqu'assurément très difficiles et très approximatives. En fait, on nage là en pleine science-prédiction, pour ne pas dire en pleine science-fiction!

Il n'en reste pas moins que notre théorie va nettement plus loin dans les explications et les prédictions que la relativité générale, et que nombre de phénomènes exotiques tels que le déplacement instantané dans l'espace et le temps via les fameux trous de ver décrits à partir de la relativité générale, qui font le bonheur des physiciens théoriciens et des écrivains de science-fiction, ne devraient être que pures élucubrations à la lumière de notre théorie!

27.3 – Constante de Hubble, «redshift» des galaxies et «refroidissement» du fond diffus cosmologique de rayonnement

Expérimentalement, on constate que la lumière des galaxies présente un décalage vers le rouge (redshift des raies spectrales d'émission des atomes). Ce décalage a été attribué par Hubble à la vitesse de récession apparente $\boldsymbol{v}$ des galaxies en fonction de leur éloignement d dû à l'expansion de l'Univers, effet expliqué initialement par l'effet Doppler-Fizeau dû au mouvement de fuite des galaxies dans l'espace. La relation expérimentale entre la vitesse de récession et l'éloignement d a été mesurée par Hubble, qui a trouvé que $\boldsymbol{v} = H_0 d$, où H_0 est la *constante de Hubble* qui vaut approximativement 70 (km/s)/Mpc (70 kilomètre par seconde, par mégaparsec). L'interprétation initiale de cette observation comme un effet Doppler-Fizeau dû à la vitesse d'éloignement des galaxies dans l'espace conduit en fait à ce que des galaxies qui seraient situées à des distances supérieures à 4'000 mégaparsecs s'éloigneraient de nous à

.

des vitesses supérieures à celle de la lumière, ce qui est évidemment un non-sens d'après la relativité restreinte. La solution à ce problème peut être déduite de la relativité générale, pour laquelle l'expansion de l'univers ne doit pas s'interpréter par un mouvement des galaxies dans l'espace, mais plutôt par un gonflement de l'espace lui-même, qui implique un éloignement progressif des objets qu'il contient (un peu de même façon que dans notre théorie où c'est le réseau cosmologique parfait qui s'étend).

De la constante de Hubble dans notre théorie

Regardons ce qu'il en est de la constante de Hubble dans notre théorie, qui se distingue très nettement de la relativité générale, ne serait-ce que pas l'existence du scalaire d'expansion volumique τ qui est directement concerné par une expansion cosmologique du réseau cosmologique parfait. Supposons donc une évolution cosmologique du réseau cosmologique parfait comme celle décrite aux figures 16.8 et 16.11g. Au cours de l'évolution, supposons que le ***GO*** observe une certaine région dans le graphe 16.11g, dans laquelle le réseau cosmologique est en expansion, et même en expansion à vitesse croissante. Cette situation peut être approchée par un développement de deuxième ordre de l'expansion en le temps sous la forme suivante

$$\tau(t) = \tau_i + \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t + \left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t^2 \quad \text{avec} \quad \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i > 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i > 0 \qquad (27.16)$$

Supposons alors que le ***GO*** observe deux galaxies qui sont initialement distantes de d_0 à l'instant $t = 0$. Si ces galaxies <u>ne se meuvent pas</u> par rapport au réseau cosmologique en expansion, la distance d_0 initiale va évoluer au cours du temps, et le ***GO*** observera que la distance entre les deux galaxies va augmenter comme

$$d(t) = d_0\, \mathrm{e}^{(\tau(t)-\tau_i)/3} = d_0\, \mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t + \left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t^2\right)/3} \qquad (27.17)$$

de sorte que les deux galaxies s'éloigneront l'une par rapport à l'autre avec la vitesse relative

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\partial d(t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i + 2\left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t\right) d_0\, \mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t + \left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t^2\right)/3} = \left(\frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i + 2\left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t\right) d(t) \qquad (27.18)$$

A l'instant $t = 0$, la relation existant entre la vitesse de récession $\boldsymbol{v}$ et la distance d_0 d'éloignement s'écrit donc

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i d_0 = H_0\, d_0 \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i \qquad (27.19)$$

Cette relation correspond donc bien à la relation de Hubble. Mais si le ***GO*** observe la relation à un instant $t \neq 0$, il trouvera que

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i + 2\left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t\right) d = H_0(t) d \quad \Rightarrow \quad H_0(t) = \frac{1}{3}\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i + 2\left.\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right|_i t \qquad (27.20)$$

et que la constante de Hubble devient dépendante de l'instant auquel le ***GO*** observe l'univers au cours de son évolution cosmologique, et notamment que celle-ci augmente si on se trouve

dans un domaine où la vitesse d'expansion de l'univers s'accroît.

Du «redshift» des galaxies dans notre théorie

Considérons maintenant deux galaxies distantes initialement de d_0 à l'instant $t=0$ pour le ***GO***. Si, à cet instant $t=0$, la galaxie 1 émet un signal vers la galaxie 2, le signal va parcourir une distance dx pendant le laps de temps dt tel que $dx = c_t dt$. Mais comme le réseau est en expansion selon la relation *(27.16)*, et en négligeant l'accélération de cette expansion, on a que

$$dx = c_t dt = c_{t0}\, \mathrm{e}^{\tau/2}\, dt = c_{t0}\, \mathrm{e}^{\left(\tau_i + \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t\right)/2}\, dt = c_{t(i)}\, \mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t\right)/2}\, dt \qquad (27.21)$$

où $c_{t(i)}$ est la vitesse des ondes transversales à l'instant $t=0$. La distance $d(T)$ entre les deux galaxies sera par conséquent parcourue en un laps de temps T tel que

$$x(T) \cong \int_0^T c_{t(i)}\, \mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i t\right)/2}\, dt = \frac{2c_{t(i)}}{\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i}\left[\mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i T\right)/2} - 1\right] = d(T) \qquad (27.22)$$

Mais $d(T)$ est donnée par *(27.17)*, de sorte que

$$\mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i T\right)/2} - 1 \cong \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i \frac{d_0}{2c_{t(i)}}\, \mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i T\right)/3} \qquad (27.23)$$

En supposant alors le cas $\left(\partial\tau/\partial t\right|\Big)_i T >> 1$, on obtient le laps de temps T mesuré par ***GO*** qui s'est écoulé entre l'émission du signal par la galaxie 1 et la réception du signal par la galaxie 2

$$\mathrm{e}^{\left(\left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i T\right)/6} \cong \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i \frac{d_0}{2c_{t(i)}} \quad \Rightarrow \quad T \cong \frac{6}{\partial\tau/\partial t\big|_i} \ln\left(\frac{d_0}{2c_{t(i)}} \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i\right) \qquad (27.24)$$

Lors de la réception du signal par la galaxie 2, l'expansion de l'univers aura alors atteint une valeur τ_f valant, selon *(27.16)*

$$\tau_f \cong \tau_i + \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i T \cong \tau_i + 6\ln\left(\frac{d_0}{2c_{t(i)}} \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_i\right) \qquad (27.25)$$

Supposons que le signal émis dans la galaxie 1 à l'instant $t=0$ est mesuré par un observateur local ***HS(1)*** à la fréquence $\nu_{émise}^{HS^{(1)}}$ d'une certaine raie spectrale d'un atome donné, la fréquence du signal reçu $\nu_{reçue}^{HS^{(2)}}$ et mesuré par un observateur ***HS(2)*** dans la galaxie 2 à l'instant $t=T$ sera différente à cause de l'accroissement d'expansion $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ de l'Univers intervenu au cours de la propagation. Ainsi, un observateur ***HS(2)*** situé dans la galaxie 2 pourra comparer la fréquence $\nu_{reçue}^{HS^{(2)}}$ de ce signal reçu avec fréquence $\nu_{émise}^{HS^{(2)}}$ de la même raie spectrale du même atome émise dans son propre laboratoire, et il appellera *«redshift» de la galaxie 1* le rapport entre ces deux fréquences

$$redshift = \frac{\nu_{reçue}^{HS^{(2)}}}{\nu_{émise}^{HS^{(2)}}} \qquad (27.26)$$

Pour calculer ce redshift, il faut représenter schématiquement comment sont reliées les valeurs physiques mesurées par l'observateur ***HS(1)*** dans la galaxie 1 à l'instant $t=0$ avec les mêmes

.

valeurs physiques mesurées par le ***GO*** à l'instant $t=0$ et à l'instant $t=T$ ainsi que par l'observateur ***HS(2)*** dans la galaxie 2 à l'instant $t=T$.
Pour cela, on se rappelle que les laps de temps Δt_y mesurés par un ***HS*** dans son référentiel propre $Oy_1y_2y_3$ sont perçus par le ***GO*** dans son référentiel local $Ox_1x_2x_3$ comme des laps de temps Δt reliés par l'expression *(24.23)*

$$\Delta t_y^{HS} = \Delta t^{GO}\, \mathrm{e}^{\tau/4} \qquad (27.27)$$

dans laquelle τ est l'expansion du réseau à l'endroit où se trouve ***HS***. Cette expression permet de relier aussi les mesures de fréquence faites par un ***HS*** et par le ***GO***

$$\nu_y^{HS} = \nu^{GO}\, \mathrm{e}^{-\tau/4} \qquad (27.28)$$

Avec cette relation, on peut représenter schématiquement comment se comportent les mesures de fréquences et de longueurs d'onde faites au cours de l'expérience de transmission du signal entre les galaxies 1 et 2 (fig. 27.3).

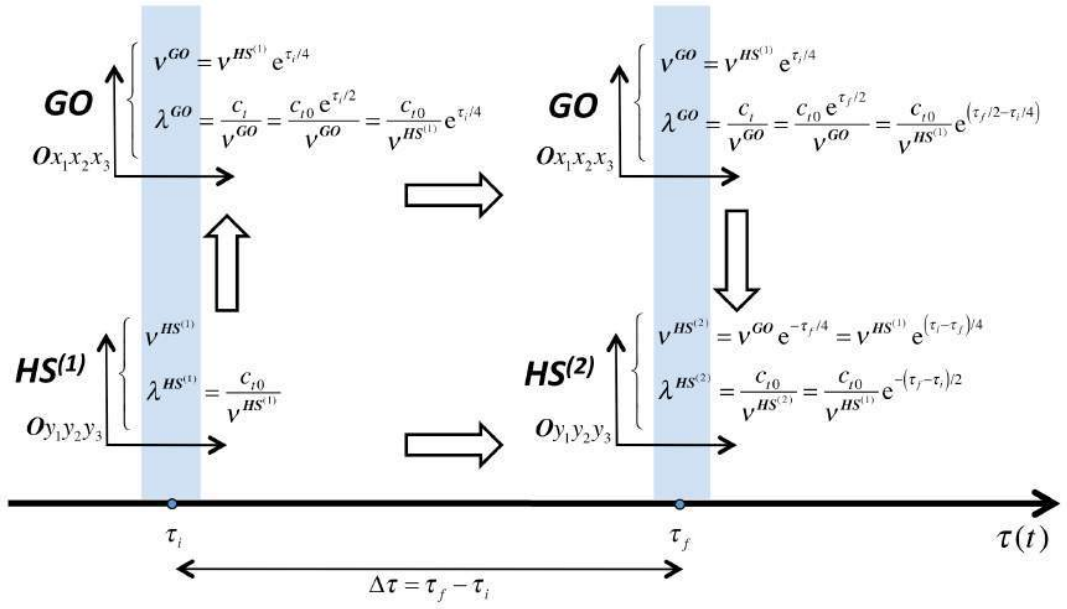


Figure 27.3 *- Représentation schématique des valeurs physiques mesurées par les observateurs* ***HS(1)***, ***GO*** *et* ***HS(2)*** *au cours de la transmission du signal entre les galaxies 1 et 2.*

On constate alors que le «redshift» mesuré par l'observateur ***HS(2)*** vaut

$$\text{"redshift"} = \frac{\nu_{reçue}^{HS^{(2)}}}{\nu_{émise}^{HS^{(2)}}} = \frac{\nu_{émise}^{HS^{(1)}}\, \mathrm{e}^{(\tau_i-\tau_f)/4}}{\nu_{émise}^{HS^{(2)}}} = \mathrm{e}^{-\Delta\tau/4} \qquad (27.29)$$

En utilisant la valeur de $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ obtenue en *(27.25)*, on obtient pour le «redshift» mesuré par l'observateur ***HS(2)***

$$\text{"redshift"} = \mathrm{e}^{-\Delta\tau/4} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{d_0}{2c_{t(i)}}\frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_i\right)} = \left(\frac{d_0}{2c_{t(i)}}\frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_i\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\left(2c_{t(i)}\right)^{3/2}}{\left(\partial\tau/\partial t|_i\right)^{3/2}}\frac{1}{d_0^{3/2}} \qquad (27.30)$$

qui dépend à la fois de la vitesse instantanée d'expansion $\partial\tau / \partial t\big|_i$ et de la distance initiale d_0 entre les deux galaxies. Mais on peut aussi relier le «redshift» à la constante de Hubble instantanée H_0 ou à la vitesse relative $\boldsymbol{v}$ de récession des galaxies en utilisant la relation *(27.19)*

$$\text{"redshift"} = \frac{\left(2c_{t(i)}\right)^{3/2}}{\left(\partial\tau / \partial t\big|_i\right)^{3/2}} \frac{1}{d_0^{3/2}} \cong \left(\frac{2}{3} c_{t(i)}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(H_0 d_0\right)^{3/2}} \cong \left(\frac{2}{3} c_{t(i)}\right)^{3/2} \frac{1}{\boldsymbol{v}^{3/2}} \qquad (27.31)$$

Le «redshift» observé par l'observateur $\boldsymbol{HS^{(2)}}$ sera donc proportionnel à $1/d_0^{3/2}$ ce qui signifie que le rapport des fréquences est d'autant plus petit que la distance initiale d_0 entre les galaxies est grande, et donc que le «décalage vers le rouge» de la raie spectrale augmente avec l'accroissement de la distance initiale d_0. Le «redshift» est aussi proportionnel à $1/\left(H_0\right)^{3/2}$, ce qui signifie qu'il diminue si la constante de Hubble augmente. Et finalement il est aussi proportionnel à $1/\boldsymbol{v}^{3/2}$. Or la vitesse d'éloignement réciproque de deux galaxies n'est pas limitée par la vitesse des ondes transversales dans notre théorie puisque cette vitesse est associée à *la vitesse du réseau dans l'espace absolu du* ***GO,*** qui satisfait *une dynamique purement newtonienne*! Ainsi, le «redshift» mesuré peut tendre vers 0 si la vitesse de récession $\boldsymbol{v}$ due à l'expansion tend vers l'infini!

A noter encore que ces calculs ont été faits en faisant deux suppositions restrictives:

- qu'on se trouve dans une région limitée dans le graphe 16.11g dans laquelle le réseau cosmologique est en expansion, et qui peut être approchée par un développement au deuxième ordre de l'expansion $\tau(t)$ en le temps *(27.16)*. Pour des phénomènes qui s'étaleraient sur des temps beaucoup plus longs, les calculs se compliqueraient singulièrement puisqu'il faudrait alors connaître exactement la fonction $\tau(t)$ de l'expansion cosmologique du réseau!
- que les galaxies <u>*ne se meuvent pas*</u> par rapport au réseau cosmologique en expansion. Si tel n'était pas le cas, par exemple à cause des interactions gravitationnelles entre les galaxies, il faudrait ajouter au «redshift» dû à l'expansion du réseau un effet Doppler-Fizeau dû <u>*aux déplacements des galaxies par rapport au réseau*</u>, tel que celui décrit à la section 21.3!

Du mécanisme de «refroidissement» du fond diffus cosmologique dans notre théorie

Le fond diffus cosmologique de rayonnement est observé actuellement comme un *spectre de corps noir parfait*, suivant très précisément la *distribution (27.16) de Planck de la densité d'énergie* $U(\nu)$ *de photons*, centrée sur une température T valant 2,7 K. On suppose que ce rayonnement est fossile du big-bang, qui s'est formé lors du découplage des photons d'avec les particules lors de la formation des atomes neutres d'hélium et d'hydrogène, et que, par conséquent, il a été émis initialement avec une température de l'ordre de 3'000 K. On peut alors se demander quel est le mécanisme de «refroidissement» de ce rayonnement à la lumière de notre théorie. Pour cela, il suffit de regarder la figure 27.3. Si on suppose que le découplage photon-matière est intervenu lorsque l'Univers possédait une expansion τ_i et que l'expansion actuelle de l'Univers est τ_f, la fréquence d'émission du rayonnement diffus est donné par $\nu_{\text{émise}}^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}$ et la fréquence observé actuellement par un observateur par l'observateur $\boldsymbol{HS^{(2)}}$ vaut

$$\nu_{\text{mesurée}}^{\boldsymbol{HS}^{(2)}} = \nu_{\text{émise}}^{\boldsymbol{HS}^{(1)}} \, \mathrm{e}^{\left(\tau_i - \tau_f\right)/4} = \nu_{\text{émise}}^{\boldsymbol{HS}^{(1)}} \, \mathrm{e}^{-\Delta\tau/4} \qquad (27.32)$$

D'après la distribution de Planck, il existe le rapport suivant entre la fréquence du rayonnement du corps noir et sa température de couleur, mesurées aux expansions τ_f et τ_i

.

$$\frac{h\nu^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée}}{kT^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée}} = \frac{h\nu^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}}{kT^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}} \quad \Rightarrow \quad T^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée} = T^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}\,\frac{\nu^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée}}{\nu^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}} = T^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}\,\mathrm{e}^{-\Delta\tau/4} \tag{27.33}$$

On en déduit une valeur numérique de la variation d'expansion du réseau entre le moment du découplage photon-matière et l'heure actuelle

$$\mathrm{e}^{-\Delta\tau/4} = \frac{T^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée}}{T^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau = 4\ln\frac{T^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}}{T^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}_{mesurée}} \cong 4\ln\left(3'000\right) \cong 32 \tag{27.34}$$

Cette augmentation d'expansion correspond en fait à *une augmentation du volume de la maille élémentaire du réseau* valant approximativement

$$\frac{v^{\boldsymbol{HS}^{(2)}}}{v^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}} = \mathrm{e}^{\Delta\tau} \cong \mathrm{e}^{32} \cong 8\bullet 10^{13} \tag{27.35}$$

qui doit assurément avoir lieu lors de la phase d'inflation du réseau cosmologique (fig. 16.11g).
On constate donc que le «refroidissement» apparent du fond de rayonnement diffus cosmologique est un effet direct de l'expansion du réseau, qui modifie énormément les règles et les horloges des référentiels locaux $\boldsymbol{O}y_1y_2y_3$.
Il est intéressant aussi de constater que, pour le ***GO***, la fréquence $\nu^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée}$ du fond de rayonnement diffus ne change pas au cours de l'expansion puisqu'elle vaut toujours la même valeur qu'au moment de son émission

$$\nu^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée} = \nu^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}\,\mathrm{e}^{\tau_i/4} \tag{27.36}$$

Mais par contre, pour le ***GO***, c'est la longueur d'onde $\lambda^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée}$ qui va évoluer avec l'expansion, puisque celle-ci est alors égale à

$$\lambda^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée} = \frac{c_t}{\nu^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée}} = \frac{c_{t0}\,\mathrm{e}^{\tau(t)/2}}{\nu^{\boldsymbol{GO}}_{mesurée}} = \frac{c_{t0}}{\nu^{\boldsymbol{HS}^{(1)}}_{émise}}\,\mathrm{e}^{\tau(t)/2-\tau_i/4} \tag{27.37}$$

Les points de vue des observateurs locaux ***HS(i)*** et de l'observateur externe ***GO*** sont donc très différents, et cela est dû au fait que la vitesse des ondes transversales de rotation (vitesse de la lumière) est une constante universelle valant toujours c_{t0} pour les observateurs ***HS(i)*** quelle que soit l'état d'expansion du réseau dans lequel ils sont placés, alors que la célérité des ondes transversales de rotation $c_t = c_{t0}\,\mathrm{e}^{\tau(t)/2}$ varie énormément en fonction de l'expansion instantanée $\tau(t)$ du réseau pour l'observateur externe ***GO.***

PARTIE II

D

Physique quantique et Modèle Standard des particules

Fluctuations gravitationnelles associées aux singularités topologiques: physique quantique, équation de Schrödinger, principe d'incertitude, bosons, fermions et principe d'exclusion

Spin et moment magnétique intrinsèque des singularités

Fluctuations transversales quantifiées: photons, dualité ondes-corpuscules, intrication et décohérence

Ingrédients du Modèle Standard des particules élémentaires: force forte et familles de leptons et de quarks

Chapitre 28

Fluctuations gravitationnelles associées aux singularités mobiles: l'équation de Schrödinger

Intuitivement, on pressent que la physique quantique pourrait bien être liée à l'existence de solutions dynamiques de la deuxième équation partielle de Newton *(18.9),* sous forme de fluctuations temporelles localisées du champ d'expansion qui seraient associées aux singularités topologiques du réseau cosmologique parfait lorsque celui-ci ne présente pas de propagation d'ondes longitudinales dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'une fonction d'onde, déduite directement de la deuxième équation partielle de Newton des perturbations d'expansion du réseau est effectivement intimement liée aux singularités topologiques mobiles du réseau, que celles-ci soient des amas de boucles élémentaires ou des boucles élémentaires isolées.

On parviendra ainsi à donner une *interprétation «ondulatoire»* tout-à-fait classique et somme toute assez simple de la physique quantique: la fonction d'onde quantique représenterait en fait l'amplitude et la phase des fluctuations gravitationnelles couplées aux singularités topologiques. Cette interprétation implique alors que le carré de l'amplitude de la fonction d'onde normalisée est bel et bien liée à la probabilité de présence de la singularité topologique qui lui est associée!

Dans la foulée, on retrouvera aussi le principe d'incertitude de Heisenberg, les notions de bosons, de fermions et d'indiscernabilité, le principe d'exclusion de Pauli, ainsi que la voie vers une compréhension physique de phénomènes intriguants tels que l'intrication quantique (entanglement) et la décohérence quantique.

28.1 – Fluctuations gravitationnelles dynamiques du champ d'expansion au sein du réseau

Equation d'ondes des fluctuations dynamiques du champ gravitationnel d'expansion

Supposons l'existence de fluctuations longitudinales dynamiques dans le réseau cosmologique. Ces fluctuations doivent évidemment satisfaire la version dynamique de la seconde équation partielle de Newton *(18.9)*. On obtient au premier ordre en $\tau^{(p)}$, en tenant compte aussi de l'équation géométrocinétique pour $\tau^{(p)}$, les équations approximatives suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\phi}^{(p)}}{\partial t} \cong -\dfrac{\alpha}{mn} \overrightarrow{\text{grad}}\, \tau^{(p)} \\ \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial t} \cong \text{div}\, \vec{\phi}^{(p)} \end{cases} \qquad (28.1)$$

avec

$$\frac{\alpha}{mn} \cong \frac{K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)}{mn} \qquad (28.2)$$

qui peuvent se réduire à une seule équation gérant les fluctuations gravitationnelles $\tau^{(p)}$

$$\frac{\partial^2 \tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong -\frac{\alpha}{nm}\,\Delta\tau^{(p)} \qquad (28.3)$$

Supposons encore que l'on se trouve dans le réseau cosmologique parfait et dans un domaine assez éloigné de la valeur critique τ_{0cr}, donc avec les hypothèses suivantes

Hypothèses 1: $\tau_0 << \tau_{0cr}$; $K_2 << K_0$; $2K_1(1+\tau_0) << K_0$ (28.4)

L'équation d'onde des fluctuations gravitationnelles peut s'écrire en ce cas

$$\frac{\partial^2 \tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong -\frac{K_0}{mn}\,\Delta\tau^{(p)} = -c_t^2 \Delta\tau^{(p)} \qquad (28.5)$$

On peut alors proposer une solution de perturbations gravitationnelles de pulsation ω_f , qu'on écrira par commodité en formulation complexe sous la forme suivante

$$\underline{\tau}^{(p)} \cong \underline{\psi}\, e^{\pm i\omega_f t} \qquad (28.6)$$

où $e^{\pm i\omega_f t}$ correspond à *l'oscillation de la fluctuation* et la *fonction d'onde complexe* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ représente *la phase et l'amplitude de cette oscillation*.

En introduisant cette solution *(28.6)* dans l'équation de Newton *(28.5)* des fluctuations du réseau, on obtient *une équation d'ondes pour la fonction complexe* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ de la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} \pm 2i\omega_f \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} - \omega_f^2 \underline{\psi} \cong -c_t^2 \Delta \underline{\psi} \qquad (28.7)$$

Fluctuations gravitationnelles isolées au sein du réseau cosmologique

Proposons d'abord une solution simple, localisée et indépendante du temps de cette équation pour la fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r})$, en supposant que la pulsation ω_f est une constante indépendante du temps et de l'espace, de la forme suivante

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0\, e^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} e^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} e^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \qquad (28.8)$$

En introduisant cette solution dans *(28.7),* on obtient

$$\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} = \frac{\omega_f^2}{c_t^2} \qquad (28.9)$$

de sorte qu'il apparaît ici une fluctuation gravitationnelle localisée

$$\underline{\tau}^{(p)} \cong \psi(\vec{r})\, e^{\pm i\omega_f t} \cong \psi_0\, e^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} e^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} e^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} e^{\pm i\omega_f t} \qquad (28.10)$$

Cette fluctuation correspond à une régime vibratoire localisé, non amorti, de pulsation ω_f et qui décroît symétriquement et exponentiellement au voisinage de l'origine, avec des portées spatiales valant δ_1, δ_2 et δ_3, qui sont corrélées entre elles et qui décroissent avec la fréquence de pulsation via la relation *(28.9).*

On en déduit donc que, dans un réseau cosmologique parfait satisfaisant les hypothèses *(28.4)*, il peut parfaitement exister des fluctuations stables et localisées de vibration de l'expansion volumique. On reviendra plus en détail sur ce sujet au chapitre 32.

Fluctuations gravitationnelles associées à une singularité topologique mobile

Imaginons qu'aux singularités topologiques mobiles au sein du réseau, telles que des amas de boucles élémentaires ou des boucles élémentaires isloées telles que décrites dans les chapitre précédents, soient aussi associées des fluctuations gravitationnelles longitudinales dynamiques, qui devraient évidemment satisfaire la version dynamique de la seconde équation partielle de Newton *(28.5)* à l'extérieur de la singularité topologique.
On sait que, dans le réseau cosmologique, la deuxième équation partielle de Newton *(18.9)* fait apparaître des perturbations gravitationnelles du champ d'expansion au sein même de singularités immobiles, perturbations qui dépendent directement de l'énergie élastique de distorsion de ces singularités. Et à la section 25.1, on a montré que ce champ interne de perturbation d'expansion est directement responsable d'un champ gravitationnel externe statique de perturbations de l'expansion *qui dépend lui aussi de l'énergie élastique de distorsion de la singularité ou de l'amas de singularités immobile* via le paramètre $4\boldsymbol{G}_{grav} / c_t^2$

$$\tau_{ext\ LD}^{boucle}(r) \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{boucle}}{r} \qquad \text{où} \qquad \tau_{ext\ LD}^{amas}(r) \cong -\frac{4\boldsymbol{G}_{grav}}{c_t^2}\frac{M_0^{amas}}{r} \tag{28.11}$$

Il y a par conséquent de fortes chances pour que le champ de perturbations gravitationnelles dynamiques $\tau^{(p)}$ de l'expansion *(28.6)* à l'extérieur d'une singularité mobile dépende aussi de l'énergie de distorsion élastique de la singularité, mais probablement aussi de l'énergie associée au mouvement de la singularité. Or nous savons qu'une singularité topologique en mouvement dans le réseau est entièrement caractérisée par une *énergie relativiste totale* $E_{\boldsymbol{v}}$ et une *quantité de mouvement relativiste totale* $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}$. Par conséquent, la pulsation $\underline{\omega}_f$ des fluctuations d'expansion qui lui sont associées devrait assurément dépendre aussi de l'énergie relativiste $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ de la singularité et de sa quantité de mouvement relativiste $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$. On peut donc émettre à priori l'hypothèse qu'il devrait exister une relation de la forme suivante pour $\underline{\omega}_f$

Hypothèse 2: $\underline{\omega}_f \cong \underline{\omega}_f\left(E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t), \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)\right) = \underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ *(28.12)*

La pulsation $\underline{\omega}_f$ des fluctuations d'expansion devrait par conséquent dépendre du temps et de l'espace environnant de la singularité topologique, via la dépendance temporelle et spatiale de l'énergie $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ et de la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ de la singularité mobile. On peut alors proposer la solution suivante de perturbations gravitationnelles de pulsation $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$

$$\underline{\tau}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \underline{\psi}(\vec{r},t)\,\mathrm{e}^{\pm i\underline{\omega}_f\left(E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t),\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)\right)t} \cong \underline{\psi}(\vec{r},t)\,\mathrm{e}^{\pm i\underline{\omega}_f(\vec{r},t)t} \tag{28.13}$$

où $\mathrm{e}^{\pm i\underline{\omega}_f(\vec{r},t)t}$ correspond à *l'oscillation de la fluctuation* et la *fonction d'onde complexe* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ représente *la phase et l'amplitude de cette oscillation*.
En introduisant cette solution *(28.13)* dans l'équation de Newton *(28.5)* des fluctuations du réseau, et *en supposant qu'on peut négliger les dérivés temporelles et spatiales de* $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ *vis-à-vis des dérivés temporelles et spatiales de* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$, on obtient une équation d'ondes pour la

fonction complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ de la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} \pm 2i\underline{\omega}_f(\vec{r},t)\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} - \underline{\omega}_f^2(\vec{r},t)\underline{\psi} \cong -c_t^2 \Delta \underline{\psi} \qquad (28.14)$$

De la conjecture d'existence d'opérateurs d'énergie et de quantité de mouvement

Dans cette équation *(28.14)*, il apparaît explicitement la pulsation $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ des fluctuations gravitationnelles, que l'on suppose dépendre de l'énergie $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ et de la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ de la singularité via la relation *(28.12)*, et la *fonction d'onde complexe* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ qui représente *la phase et l'amplitude des fluctuations gravitationnelles*.
Si la fréquence $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ des fluctuations gravitationnelles dépend effectivement de $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ et de $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$, ces deux grandeurs doivent aussi être contenues implicitement dans les comportements temporel et spatial de la fonction d'onde complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ associée à la singularité mobile.
Or, cette fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ associée à l'équation d'onde *(28.14)* rappelle en fait la fonction d'onde apparaissant en physique quantique, et la physique quantique dit qu'il est possible de définir *des opérateurs* permettant de mesurer $E_{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}$ à partir de la fonction d'onde quantique $\underline{\psi}(\vec{r},t)$. Lorsqu'ils sont appliqués localement à la fonction d'onde, ces opérateurs quantiques, correspondant aux dérivés partielles par rapport au temps et à l'espace de la fonction d'onde quantique*, fournissent l'énergie totale et les composantes de la quantité de mouvement totale qu'auraient la singularité à cet endroit, multipliés par la fonction d'onde* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$.
Par analogie avec la physique quantique, *conjecturons donc à priori des opérateurs aux propriétés similaires,* avec les effets suivants

Conjecture 10: *il existe deux opérateurs qui, appliqués à la fonction d'onde* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ *d'une singularité mobile dans le réseau, permettent de mesurer l'énergie et la quantité de mouvement relativistes de celle-ci, à savoir*

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\underline{\psi} \rightarrow E_{\boldsymbol{v}}\underline{\psi} \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}\underline{\psi} \rightarrow \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{v}i}\underline{\psi} \end{cases} \qquad (28.15)$$

Dans ces relations, on a introduit, comme en physique quantique, une constante $\hbar$ permettant de normaliser les dérivés partielles de la fonction d'onde à des termes énergétiques (et qui n'est, dans le cas de la physique quantique, rien d'autre que *la constante de Planck).*
Il est assez simple de vérifier que ces opérateurs, appliqués deux fois de suite sur la fonction d'onde, fournissent alors le carré de l'énergie totale et le carré de la quantité de mouvement totale

$$\begin{cases} -\hbar^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\psi} \rightarrow E_{\boldsymbol{v}}^2\underline{\psi} \\ -\hbar^2\Delta\underline{\psi} \rightarrow \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}\underline{\psi} \end{cases} \qquad (28.16)$$

Normalisons alors l'équation *(28.14)* sous la forme d'une équation composée de termes corres-

pondant à des carrés d'énergie en la multipliant par $\hbar^2$

$$\hbar^2\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial t^2}\mp 2\left(\hbar\underline{\omega}_f(\vec{r},t)\right)i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}-\left(\hbar\underline{\omega}_f(\vec{r},t)\right)^2\underline{\psi}\cong -c_t^2\hbar^2\Delta\underline{\psi} \qquad (28.17)$$

On en déduit que chaque terme de cette équation doit représenter le produit du carré d'une énergie par la fonction d'onde sans dimension $\underline{\psi}(\vec{r},t)$. On en déduit en particulier que le terme $\hbar\omega_f$ a *la dimension d'une énergie.*

D'autre part, l'opérateur dérivé seconde du temps fournit le carré de *l'énergie relativiste totale* $E_{\boldsymbol{v}}$ qu'aurait la singularité à l'endroit où on applique l'opérateur, et l'opérateur laplacien fournit le carré de *la quantité de mouvement relativiste totale* $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}$ qu'aurait la singularité à l'endroit où on applique l'opérateur. De cette définition des opérateurs dérivé seconde et laplacien, on déduit les opérateurs fournissant directement l'énergie totale de la singularité et les composantes de la quantité de mouvement de la singularité en un endroit donné.

Nantis de ces opérateurs *"conjecturées à priori»* en se basant sur la physique quantique, nous pouvons essayer de les appliquer à la relation *(28.17)* déduite de la deuxième équation partielle de Newton. Il vient

$$E_{\boldsymbol{v}}^2(\vec{r},t)\mp 2\hbar\underline{\omega}_f(\vec{r},t)E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)+\left(\hbar\underline{\omega}_f(\vec{r},t)\right)^2=\left(E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)\mp\hbar\omega_f(\vec{r},t)\right)^2\cong -c_t^2\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}(\vec{r},t) \qquad (28.18)$$

On obtient ainsi la relation qui devrait exister entre *l'énergie relativiste* $E_{\boldsymbol{v}}$ de la singularité, *l'énergie de mouvement* $\sqrt{c_t^2\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}}$ de la singularité et *la pulsation* $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ *des fluctuations gravitationnelles associées à la singularité,* qui devient *un nombre complexe*

$$E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)\mp\hbar\underline{\omega}_f(\vec{r},t)\cong\pm i\sqrt{c_t^2\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}(\vec{r},t)} \qquad (28.19)$$

Equation d'onde des fluctuations gravitationnelles d'une singularité mobile

Dans le cas d'une singularité qui se déplace *à vitesse relativiste*, celle-ci doit satisfaire les principales relations relativistes *(20.41)* et *(20.42)* du chapitre 20*,* à savoir

$$E_{\boldsymbol{v}}^2=M_0^2c_t^4+\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}c_t^2 \qquad (28.20)$$

dans laquelle $E_{\boldsymbol{v}}$ est *l'énergie relativiste totale* de la singularité, M_0 est *la masse au repos de la singularité*, reliée directement à son *énergie de repos* E_0^{dist} et à son *énergie potentielle* $V(\vec{r},t)$, et $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}$ est *la quantité de mouvement relativiste* de la singularité, donnés par

$$\begin{cases} E_{\boldsymbol{v}}=\dfrac{M_0c_t^2}{\gamma}=\dfrac{E_0^{dist}+V(\vec{r},t)}{\gamma} \\ M_0c_t^2=E_0^{dist}+V(\vec{r},t) \qquad \text{avec} \quad \gamma=\sqrt{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c_t^2}} \\ \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}=\dfrac{M_0}{\gamma}\vec{\boldsymbol{v}}=\dfrac{E_0^{dist}+V(\vec{r},t)}{\gamma c_t^2}\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases} \qquad (28.20)$$

Ces expressions conduisent à la relation suivante donnant *la pulsation* $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ *complexe* des fluctuations gravitationnelles associées à une singularité topologique (une boucle élémentaire ou un amas de boucles élémentaires liées entre elles) se déplaçant à vitesse $\boldsymbol{v}$

$$\hbar\underline{\omega}_f=\pm E_{\boldsymbol{v}}\pm i\sqrt{c_t^2\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}}=\pm E_{\boldsymbol{v}}\pm i\sqrt{E_{\boldsymbol{v}}^2-M_0^2c_t^4}=\pm E_{\boldsymbol{v}}\left(1\pm i\frac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right)=\pm\frac{E_0^{dist}+V(\vec{r},t)}{\gamma}\left(1\pm i\frac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) \qquad (28.22)$$

La pulsation relativiste complexe de $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ présente par conséquent deux solutions conjuguées

$$\begin{cases} \underline{\omega}_f(\vec{r},t) = \pm\dfrac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\left(1+i\dfrac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) = \pm\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{E_0^{dist}+V(\vec{r},t)}{\gamma}\left(1+i\dfrac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) \\ \underline{\omega}_f^*(\vec{r},t) = \pm\dfrac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\left(1-i\dfrac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) = \pm\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{E_0^{dist}+V(\vec{r},t)}{\gamma}\left(1-i\dfrac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) \end{cases} \qquad (28.23)$$

Il est intéressant de constater qu'on retrouve bien une expression justifiant l'hypothèse 2 que nous avions émise, en effectuant le produit des deux valeurs conjuguées de la pulsation, et on constate que c'est la norme de la pulsation complexe $\underline{\omega}_f(\vec{r},t)$ qui est une fonction simple de $E_{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}$

$$\left|\underline{\omega}_f\right|(\vec{r},t) = \sqrt{\underline{\omega}_f\underline{\omega}_f^*} = \frac{1}{\hbar}E_{\boldsymbol{v}}\sqrt{1+\frac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c_t^2}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{E_{\boldsymbol{v}}^2+c_t^2\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}} \qquad (28.24)$$

L'équation d'onde *(28.17)* pour $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ possède alors *deux versions relativistes* à cause du signe $\pm$ qui apparaît dans $(1\pm i\boldsymbol{v}/c_t)$, alors que le signe $\pm$ dans *(28.22)* n'y apparaît plus

$$\hbar^2\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial t^2}+2E_{\boldsymbol{v}}\left(1\pm i\frac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right)i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}-E_{\boldsymbol{v}}^2\left(1\pm i\frac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right)^2\underline{\psi} \cong -c_t^2\hbar^2\Delta\underline{\psi} \qquad (28.24)$$

Perturbations gravitationnelles associées à une singularité massive se déplaçant à vitesse relativiste

Reprenons l'équation d'onde relativiste *(28.24)* et essayons d'en trouver une solution pour une singularité assez massive qui se déplacerait *quasi-librement à vitesse relativiste* $\boldsymbol{v}$ *plus ou moins constante* dans la direction $\boldsymbol{O}x_2$, ce qui implique que l'hypothèse suivante soit satisfaite

Hypothèse: $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ *varie assez lentement dans le temps et l'espace* *(28.25)*

Sous cette hypothèse que l'énergie totale relativiste de la singularité ne varie que lentement dans le temps et l'espace, on peut admettre que la fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r},t)$, qui représente l'amplitude et la phase de l'oscillation à pulsation $\omega_f(\vec{r},t)$ est en fait une fonction de la position x_2 le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. Posons donc une solution ondulatoire simple de l'équation d'onde relativiste le long de l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, qui ne dépende pas explicitement du temps, du type

$$\underline{\psi} \cong \psi_0\, e^{i\underline{k}(\vec{r},t)x_2} \qquad (28.26)$$

où le nombre d'onde complexe $\underline{k}(\vec{r},t)$ varie lui aussi très lentement dans le temps et l'espace. En injectant cette solution dans *(28.24)*, on obtient l'expression suivante pour la valeur du nombre d'onde complexe $\underline{k}$

$$\underline{k}(\vec{r},t) \cong \pm i\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t}\left(1\pm i\frac{\boldsymbol{v}}{c_t}\right) \qquad (28.27)$$

et on constate que $\underline{k}(\vec{r},t)$ dépend en fait de $\vec{r}$ et t uniquement de par la dépendance de l'énergie relativiste $E_{\boldsymbol{v}}(\vec{r},t)$ en $\vec{r}$ et t. La fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ associée à la singularité s'écrit

par conséquent

$$\underline{\psi} = \psi_0 \, e^{(\mp)\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t} x_2} \, e^{(\pm)(\mp) i \frac{E_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}}{\hbar c_t c_t} x_2} \tag{28.28}$$

ce qui permet d'exprimer les fluctuations d'expansion *(28.3)* associées à la singularité relativiste

$$\underline{\tau}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \underline{\psi}(\vec{r},t) e^{\pm i\omega_f(\vec{r},t)t} \cong \psi_0 \, e^{(\mp)\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t} x_2} \, e^{(\pm)(\mp) i \frac{E_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}}{\hbar c_t c_t} x_2} \, e^{\pm i\omega_f(\vec{r},t)t} \tag{28.29}$$

En y introduisant la valeur *(28.12)* de $\omega_f(\vec{r},t)$, on obtient

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \, e^{(\mp)\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t} x_2} \, e^{(\pm)(\mp) i \frac{E_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}}{\hbar c_t c_t} x_2} \, e^{i\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar} t} \, e^{\mp \frac{E_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}}{\hbar c_t} t} \tag{28.30}$$

Seules deux solutions parmi les quatre possibles ont réellement une signification physique, de sorte que, finalement, la solution peut s'écrire comme

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \, e^{-\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t}|x_2 \mp \boldsymbol{v} t|} \, e^{i\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\left(t \pm \frac{\boldsymbol{v}}{c_t^2} x_2\right)} \tag{28.31}$$

ce qui permet d'expliciter les fluctuations réelles d'expansion d'une singularité relativiste, en prenant la partie réelle de cette expression, sous la forme suivante

$$\tau_{réel}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \, e^{-\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t}|x_2 \mp \boldsymbol{v} t|} \cos\left[\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\left(t \pm \frac{\boldsymbol{v}\, x_2}{c_t^2}\right)\right] \tag{28.32}$$

Pour discuter cette expression, décomposons son cosinus en écrivant

$$\tau_{réel}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \, e^{-\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar c_t}|x_2 \mp \boldsymbol{v} t|} \left[\cos\left(\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar} t\right)\cos\left(\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{v}}{c_t^2} x_2\right) \mp \sin\left(\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar} t\right)\sin\left(\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{v}}{c_t^2} x_2\right)\right] \tag{28.33}$$

On constate que cette fonction représente le produit d'oscillations dans le temps et d'oscillations dans l'espace. Les oscillations dans le temps présentent une fréquence donnée par

$$f = \frac{E_{\boldsymbol{v}}}{2\pi\hbar} = \frac{E_0^{dist} + V(\vec{r},t)}{2\pi\hbar\gamma} = \frac{E_0^{dist} + V(\vec{r},t)}{2\pi\hbar\sqrt{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c_t^2}}} \tag{28.34}$$

et les oscillations dans l'espace une longueur d'onde donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c_t^2}{E_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}} = \frac{2\pi\hbar c_t^2 \gamma}{\left(E_0^{dist} + V(\vec{r},t)\right)\boldsymbol{v}} = \frac{2\pi\hbar c_t^2}{\left(E_0^{dist} + V(\vec{r},t)\right)\boldsymbol{v}} \sqrt{1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c_t^2}} \tag{28.35}$$

La fréquence f des oscillations temporelles est donc une fonction croissante de la vitesse $\boldsymbol{v}$ et de l'énergie relativiste $E_{\boldsymbol{v}}$ de la singularité, et elle tend vers une valeur infinie pour $\boldsymbol{v} \to c_t$. Elle dépend indirectement de la position $\vec{r}$ de la singularité et du temps t via la dépendance du potentiel $V(\vec{r},t)$ en ces grandeurs.

Quand à la longueur d'onde λ des oscillations spatiales, elle diminue en fonction de la vitesse $\boldsymbol{v}$ et de l'énergie relativiste $E_{\boldsymbol{v}}$ de la singularité, et elle tend vers 0 pour $\boldsymbol{v} \to c_t$. Elle est elle aussi modulée dans l'espace et le temps via le potentiel $V(\vec{r},t)$.

L'amplitude de ces oscillations temporelles et spatiales est modulée par une enveloppe exponentiellement décroissante de part et d'autre de la position moyenne $x_2(t) = \pm \boldsymbol{v}\, t$ de la singularité (qui se déplace donc dans la direction de l'axe Ox_2 ou en sens opposé selon le signe + ou -). La vitesse de décroissance de l'enveloppe $e^{-|x_2 \mp \boldsymbol{v} t|/\delta}$ est liée à *une portée* δ *de l'envelo-*

ppe des oscillations qui vaut

$$\delta = \frac{\hbar c_t}{E_{\boldsymbol{v}}} = \frac{\hbar c_t \gamma}{E_0^{dist} + V(\vec{r},t)} = \frac{\hbar c_t}{E_0^{dist} + V(\vec{r},t)} \sqrt{1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c_t^2}} \qquad (28.36)$$

La portée δ de l'enveloppe des oscillations diminue donc lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la singularité augmente et lorsque son énergie relativiste $E_{\boldsymbol{v}}$ augmente, et elle tend vers 0 pour $\boldsymbol{v} \to c_t$. Elle est elle aussi modulée dans l'espace et le temps via le potentiel $V(\vec{r},t)$ que subit la singularité. Tout ceci implique que les fluctuations gravitationnelles associées à l'énergie relativiste totale de la singularité sont de très courtes portées et deviennent assurément négligeables pour des singularités massives, telles que des amas de boucles élémentaires liées. Par exemple, pour un électron à vitesse non-relativiste, la portée des perturbations gravitationnelles associées à son énergie de repos E_0^{dist} est déjà minuscule, de l'ordre de $2 \cdot 10^{-12}\ m$.
Finalement, on constate que les fluctuations dynamiques d'expansion associées à la singularité relativiste sont contractées selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ du mouvement de la singularité, en fonction de la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la singularité, comme on le voit bien sur la longueur d'onde λ des oscillations spatiales et sur la portée δ de l'enveloppe des oscillations. Ces effets *correspondent strictement à l'effet relativiste de contraction des règles* d'un amas mobile de singularités décrit à la section 21.2 !

28.2 – Equation d'onde de Schrödinger des fluctuations gravitationnelles d'expansion d'une singularité non-relativiste

L'équation d'onde "réduite" d'une singularité se déplaçant à vitesse non-relativiste

Le traitement de la section précédente s'applique aux perturbations gravitationnelles associées à l'énergie relativiste d'une singularité suffisamment massive pour ne pas être influencée par les perturbations gravitationnelles aléatoires et microscopiques existant au sein du réseau cosmologique (voir chapitre 32). Mais pour une singularité suffisamment microscopique pour subir les effets des fluctuations gravitationnelles, il devrait exister une équation d'onde tenant compte de ces effets. Considérons donc le cas d'une singularité microscopique (une boucle de désinclinaison ou de dislocation par exemple) en régime non-relativiste $|\boldsymbol{v}| << c_t$, et réécrivons l'équation d'onde *(28.24)*

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} + 2E_{\boldsymbol{v}}\, i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} - E_{\boldsymbol{v}}^2\, \underline{\psi} \cong -c_t^2 \hbar^2 \Delta \underline{\psi} \qquad (28.38)$$

En utilisant la première relation *(28.16)*, à savoir

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} \to E_{\boldsymbol{v}}^2 \underline{\psi} \qquad (28.39)$$

l'équation d'onde peut se transformer sous *une forme "réduite"* ne contenant plus que la dérivé première du temps

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} \cong -\frac{c_t^2 \hbar^2}{2E_{\boldsymbol{v}}} \Delta \underline{\psi} + E_{\boldsymbol{v}}\, \underline{\psi} \qquad (28.40)$$

Mais l'énergie totale de la singularité non-relativiste s'exprime *approximativement* comme

$$E_{\boldsymbol{v}} = \frac{M_0 c_t^2}{\gamma} \underset{\gamma \to 1}{\cong} M_0 c_t^2 = E_0^{dist} + V(\vec{r},t) \qquad (28.41)$$

de sorte qu'on peut exprimer approximativement l'équation d'onde réduite en effectuant les remplacements suivants

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} \cong -\frac{\hbar^2}{2M_0} \Delta \underline{\psi} + \left(E_0^{dist} + V(\vec{r},t)\right) \underline{\psi} \qquad (28.42)$$

On reconnaît alors une équation d'onde qui ressemble déjà beaucoup à *l'équation de Schrödinger de la physique quantique*, sauf qu'il y existe le terme $\left(E_0^{dist} + V(\vec{r},t)\right)\underline{\psi}$ en lieu et place de $V(\vec{r},t)\underline{\psi}$. Utilisons les définitions *(28.15)* et *(28.16)* des opérateurs pour interpréter cette équation d'onde. Il vient

$$E_{\boldsymbol{v}} \cong \frac{\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{2M_0} + \left(E_0^{dist} + V(\vec{r},t)\right) = E_0^{dist} + T + V(\vec{r},t) \qquad (28.43)$$

L'équation d'onde *(28.42)* exprime donc le fait que l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}$ d'une singularité est égale à la somme de son énergie de repos E_0^{dist}, de son énergie cinétique T et de son énergie potentielle $V(\vec{r},t)$.

La solution pour les perturbations gravitationnelles dynamiques associées à la singularité s'écrit par conséquent comme le produit de sa fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ déduite de l'équation d'onde *(28.42)* avec un terme oscillatoire de pulsation $\omega_{E_{\boldsymbol{v}}} = E_{\boldsymbol{v}} / \hbar$

$$\underline{\tau}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \underline{\psi}(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\omega_{E_{\boldsymbol{v}}} t} \cong \underline{\psi}(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\frac{E_{\boldsymbol{v}}}{\hbar}t} \cong \underline{\psi}(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\frac{E_0^{dist}+T+V(\vec{r},t)}{\hbar}t} \qquad (28.44)$$

L'équation d'onde de Schrödinger d'une singularité non-relativiste

Reprenons la solution *(28.44)* pour les perturbations gravitationnelles dynamiques, et réécrivons-la sous la forme modifiée suivante

$$\underline{\tau}^{(p)}(\vec{r},t) \cong \underline{\psi}(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\frac{E_0^{dist}}{\hbar}t} \mathrm{e}^{\pm i\frac{T+V(\vec{r},t)}{\hbar}t} = \underline{\psi}_H(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\frac{T+V(\vec{r},t)}{\hbar}t} = \underline{\psi}_H(\vec{r},t) \mathrm{e}^{\pm i\frac{H}{\hbar}t} \qquad (28.45)$$

faisant apparaître un terme oscillatoire de pulsation $\omega_H = H / \hbar$ correspondant à *l'hamiltonien* H de la singularité, c'est-à-dire à la somme de son énergie cinétique T et de son énergie potentielle $V(\vec{r},t)$, en introduisant la pulsation propre de repos $\omega_0 = E_0^{dist} / \hbar$ de la singularité dans la fonction d'onde $\underline{\psi}_H(\vec{r},t)$ associée à l'hamiltonien de la singularité. Il est aisé de montrer que cette fonction d'onde $\underline{\psi}_H(\vec{r},t)$ peut alors être déduites de l'équation d'onde suivante

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}_H}{\partial t} \cong -\frac{\hbar^2}{2M_0} \Delta \underline{\psi}_H + V(\vec{r},t) \underline{\psi}_H \qquad (28.46)$$

qui n'est rien d'autre que ***l'équation de Schrödinger de la physique quantique***. En effet, on vérifie grâce à l'interprétation de cette équation d'onde à partir des opérateur *(28.15)* et *(28.16)*

$$E_H \cong \frac{\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{2M_0} + V(\vec{r},t) = T + V(\vec{r},t) = H \qquad (28.47)$$

que cette équation d'onde fournit bien une fonction d'onde $\underline{\psi}_H(\vec{r},t)$ liée à l'hamiltonien de la singularité, à savoir à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

De l'interprétation de l'équation de Schrödinger d'une singularité non-relativiste

L'équation d'onde *(28.46)* correspond en tout point, très exactement, à *l'équation de Schrödinger de la physique quantique pour une particule non-relativiste*, à condition d'admettre que la constante universelle $\hbar$ que nous avons conjecturées soit effectivement *la constante de Planck* $\hbar$ *de la physique quantique*.
Cette similitude parfaite n'est évidemment pas fortuite et permet <u>pour la première fois</u> de donner une interprétation très compréhensible de la physique quantique, en disant que:

> *"l'équation de Schrödinger est une équation d'onde déduite de la deuxième équation partielle de Newton d'un réseau cosmologique parfait dans le domaine* $\tau_0 << \tau_{0cr}$ *, qui permet de* ***calculer la fonction d'onde*** $\underline{\psi}_H(\vec{r},t)$ ***d'une singularité topologique, représentant l'amplitude et la phase des fluctuations gravitationnelles dynamiques de pulsation*** $\omega_H = H/\hbar$ ***associées à son hamiltonien****"*.

L'équation d'onde stationnaire d'une singularité placée dans un potentiel statique

Si le potentiel dans lequel est placée la singularité topologique est un potentiel statique $V(\vec{r})$, le terme de gauche de l'équation *(28.40)* est un opérateur donnant l'énergie totale $E_{\boldsymbol{v}}$ de la singularité, qui doit évidemment être une constante puisque la singularité se déplace dans un potentiel statique. On a donc

$$i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t} \cong -\frac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\underline{\psi} + \left(E_0^{dist} + V(\vec{r})\right)\underline{\psi} = E_{\boldsymbol{v}}\underline{\psi} \qquad (28.49)$$

qu'on peut aussi ré-écrire sous la forme suivante

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\underline{\psi} + V(\vec{r})\underline{\psi} = \left(E_{\boldsymbol{v}} - E_0^{dist}\right)\underline{\psi} = \left(E^{cin} + V\right)\underline{\psi} = H\underline{\psi} \qquad (28.50)$$

On retrouve là l'expression de ***l'équation de Schrödinger stationnaire de la physique quantique***, qui est, comme on le sait de la physique quantique, un *problème aux valeurs propres*, ce qui signifie que l'hamiltonien, c'est-à-dire la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique associées au mouvement de la singularité, donnée par $H == E^{cin} + V = E_{\boldsymbol{v}} - E_0^{dist}$, est une constante pouvant prendre *diverses valeurs propres* H_n suivant le potentiel $V(\vec{r})$, de sorte que la fonction d'onde présente des *états propres* $\underline{\psi}_n$ satisfaisant *l'équation aux valeurs propres* suivantes

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\underline{\psi}_n + V(\vec{r})\underline{\psi}_n = H_n\underline{\psi}_n \qquad (28.51)$$

Sur la base de la solution $\underline{\psi}_n(\vec{r})$ de l'équation d'onde, on déduit *la véritable grandeur physique, à savoir les perturbations d'expansion stationnaires* associées à la singularité liée par le potentiel $V(\vec{r})$, données par *(28.45)*

$$\underline{\tau}_n^{(p)}(\vec{r},t) \cong \underline{\psi}_n(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\pm\frac{H_n}{\hbar}t} \qquad (28.52)$$

et c'est la partie réelle de $\underline{\tau}_n^{(p)}(\vec{r},t)$ qui représentera les réelles perturbations stationnaires d'expansion.

28.3 – Conséquences de l'équation d'onde de Schrödinger des fluctuations gravitationnelles d'une singularité non-relativiste

Des commutateurs d'opérateurs et du principe d'incertitude d'Heisenberg

On connaît bien la puissance de l'équation de Schrödinger dynamique *(28.42)* et de l'équation de Schrödinger stationnaire *(28.51)* en physique quantique. Nombre de conséquences liées aux équations de Schrödinger sont décrites dans l'Annexe B, et ces conséquences sont évidemment directement applicables dans le cas de notre théorie, comme par exemple:

- les *commutateurs d'opérateurs*: relations *(B.5)* à *(B.8),*

- les *principes d'incertitude de Heisenberg:* relations *(B.9)*,

- les *états propres stationnaires d'une particule* dans différents types de potentiels (oscillateur harmonique, oscillateur anharmonique, particule dans une boîte, rotation de deux particules liées, particule dans un potentiel central): relations *(B.12)* à *(B.23),*

- la *densité des états dans l'espace de phase*: relations *(B.24)* à *(B.27).*

De cette correspondance parfaite entre notre théorie des perturbations gravitationnelles associées aux singularités topologiques mobiles et l'équation d'onde de Schrödinger de la physique quantique, expérimentalement très bien vérifiée, on déduit que notre conjecture 10 s'avère *à posteriori* absolument fondée. Par conséquent, notre interprétation *«classique»* de la physique quantique, à savoir que la physique quantique découle de la deuxième équation partielle de Newton du réseau cosmologique, est assurément juste, de sorte que l'équation de Newton du réseau cosmologique semble vraiment jouer un rôle capital *au coeur de toutes les théories connues de l'Univers*!

De l'interprétation probabiliste du carré de la fonction d'onde

Quant bien même les fonctions d'onde complexes $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ n'apporte aucune indication quant à la position ou à la trajectoire de la singularité, on peut tout de même leur trouver une interprétation physique très intéressante. Comme ces fonctions d'onde correspondent à une *représentation complexe de l'amplitude et de la phase des fluctuations gravitationnelles de pulsation* $\omega_H = H/\hbar$ *associées à la singularité,* il est tout-à-fait logique et probable que si, localement, il n'existe pas de fluctuations gravitationnelles, c'est-à-dire si la fonction d'onde $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ est très petite en certains endroits de l'espace, il n'y aura pratiquement aucune chance d'y trouver la singularité topologique, alors que si ces fluctuations deviennent maximum en certains autres endroits, il y a de très fortes chances d'y trouver la singularité topologique!
On en arrive donc à une interprétation très intéressante de cette fonction d'onde complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$: elle doit assurément être associée à la probabilité de présence de la singularité topologique à laquelle sont associées les fluctuations gravitationnelles $e^{i\omega_H t}$! La fonction $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ est en fait un objet mathématique complexe représentant l'amplitude et la phase des fluctuations gravitationnelles $e^{i\omega_H t}$, alors qu'une probabilité de présence est un objet mathématique scalaire positif dont la somme sur tout l'espace doit être égale à 1. Par conséquent, une possibilité d'extraire une valeur quantitative de probabilité de présence de la singularité topologique à partir de la fonction $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ est d'utiliser le fait que le carré d'une fonction oscillante présente

bien un scalaire positif. Dans le cas d'une grandeur complexe comme $\underline{\psi}(\vec{r},t)$, c'est le produit $\underline{\psi}(\vec{r},t)\bullet\underline{\psi}^*(\vec{r},t)$ de la fonction complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ par son complexe conjugué $\underline{\psi}^*(\vec{r},t)$ qui représente le carré de l'amplitude de la fonction. Il suffit donc de normaliser le produit $\underline{\psi}(\vec{r},t)\bullet\underline{\psi}^*(\vec{r},t)$ pris sur une portion de l'espace ΔV par ce produit pris sur tout l'espace V susceptible de contenir la singularité pour obtenir la probabilité P de trouver la singularité dans la portion d'espace ΔV

$$P=\iiint_{\Delta V}\underline{\psi}(\vec{r},t)\bullet\underline{\psi}^*(\vec{r},t)dV\Big/\iiint_{V}\underline{\psi}(\vec{r},t)\bullet\underline{\psi}^*(\vec{r},t)dV \qquad (28.53)$$

On retrouve par conséquent l'interprétation usuelle simple de la fonction d'onde en physique quantique, tout en lui donnant ici une explication conceptuelle!

Le fait que la fonction d'onde complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ permette de déduire, non pas la position des singularités en un instant donné, mais leur probabilité de présence en un endroit donné et à un instant donné, signifie aussi que les équations d'onde *(28.42)* ou *(28.46)* qui permettent de calculer $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ (ou $\underline{\psi}_n(\vec{r})$ dans le cas stationnaire), et qui ne sont en fait rien d'autre que des émanations *de l'équation de Newton du réseau* appliquée aux fluctuations gravitationnelles, sont en même temps *une nouvelle forme d'équations de la dynamique des singularités topologiques microscopiques* au sein du réseau.

De la "marche stochastique" des singularités topologiques

Comme les mouvements microscopiques exactes des singularités topologiques ne sont pas accessibles et prédictibles via leur fonction d'onde complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$, mais que seule la probabilité de présence des singularités soumises à un potentiel $V(\vec{r},t)$ ou $V(\vec{r})$ peut être obtenue, les mouvements réels des singularités microscopiques au sein du réseau cosmologique doivent être des mouvements stochastiques et chaotiques.

On peut imaginer par exemple que des fluctuations gravitationnelles aléatoires (voir chapitre 32), mais de pulsations différentes de la pulsation ω_H associée à la singularité topologique, et qui apparaîtraient et disparaîtraient au voisinage de la singularité, puissent venir bousculer suffisamment celle-ci en lui fournissant des impulsions aléatoires. Ces impulsions contribueraient alors à des mouvements stochastiques de la singularité. Mais comme la marche stochastique de la singularité doit aussi être fortement couplée avec ses fluctuations gravitationnelles propres à fréquence ω_H, cette marche stochastique devrait présenter une distribution statistique de présence qui se manifesterait via la probabilité de présence *(28.53)* déduite de la fonction d'onde.

Il existe deux phénomènes physiques observables qui présentent des analogies fortes avec une telle marche stochastique des singularités topologiques:

- dans les solides, les dislocations peuvent présenter une marche stochastique microscopique sous l'effet des fluctuations thermiques aléatoires (dues aux phonons) qui peuvent les bousculer. Il apparaît alors un mouvement stochastique des dislocations, appelé *mouvement brownien*, tel que décrit par exemple dans l'article *«overview on dislocation-point defect interaction: the brownian picture of dislocation motion»*[1] !

- des expériences macroscopiques assez récentes réalisées au laboratoire avec des goutte-

[1] *G. Gremaud, Materials Science and Engineering A 370 (2004) 191-198*

lettes rebondissantes sur une surface liquide vibrée présentent des résultats assez étonnants. Les gouttelettes se déplacent aléatoirement sur la surface liquide, raison pour laquelle elles ont été qualifiées de "gouttes marcheuses" [2]. Cette "marche" est attribuée à une interaction résonnante de la goutte avec son propre champ ondulatoire[3]. La mesure de la probabilité de distribution de la goutte sur une surface liquide limitée peut alors présenter une régularité présentant des similitudes étonnantes avec la probabilité de présence de particules microscopiques quantiques confinées dans un puits de potentiel[4].

28.4 – Superposition de singularités topologiques, bosons, fermions et principe d'exclusion

On peut légitimement se demander ce que devient le champ des fluctuations gravitationnelles lorsque deux singularités topologiques sont voisines l'une de l'autre.

L'état stationnaire de superposition de deux singularités topologiques identiques

Imaginons qu'on considère deux singularités *(a)* et *(b)* qui évoluent dans le même espace (dans le même potentiel. Recherchons la fonction d'onde stationnaire de superposition, c'est-à-dire la façon d'écrire les perturbations d'expansion volumique dues aux deux singularités à la fois. En supposant qu'à l'état de superposition stationnaire, les équations de Schrödinger stationnaires restent valables pour les deux singularités, on a

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)+V(\vec{r}_a)\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)=H_n\underline{\psi}_n(\vec{r}_a) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)+V(\vec{r}_b)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)=H_m\underline{\psi}_m(\vec{r}_b) \end{cases} \qquad (28.54)$$

Essayons de combiner ces deux relations, en multipliant la première par $\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)$ et la deuxième par $\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)$, et en sommant le tout. On obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\Delta\left[\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)\right]+\left[V(\vec{r}_a)+V(\vec{r}_b)\right]\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)=\left(H_n+H_m\right)\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b) \qquad (28.55)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde de superposition $\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)$. On en déduit par conséquent que les perturbations oscillatoires de l'expansion volumique dues à la superposition des deux singularités s'écrivent

$$\underline{\tau}\left(\vec{r}_a,\vec{r}_b,t\right)=\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\mathrm{e}^{\pm i\frac{H_n}{\hbar}t}\,\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)\mathrm{e}^{\pm i\frac{H_m}{\hbar}t} \qquad (28.56)$$

On constate alors qu'il y a deux types de superpositions possibles, suivant les signes des expo-

---

[2] *Stéphane Perrard: "Une mémoire ondulatoire: états prores, chaos et probabilités", thèse de doctorat, 2014, Université Paris Diderot (https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01158368)*

[3] *D. M. Harris, J. Moukhtar, E. Fort, Y. Couder, J. W. M. Bush: "Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral" Physical Review E, 88, 011001(R), 2013*

[4] *R. Brady, R. Anderson: "Why bouncing droplets are a pretty good model of quantume mechanics", University of Cambridge Computer Laboratory, 2014 (arXiv:1401.4356v1)*

sants des exponentielles, qui présentent des fréquences d'oscillation globales très différentes

$$\begin{cases} \underline{\tau}_{boson}\left(\vec{r}_a,\vec{r}_b,t\right)=\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)\mathrm{e}^{\pm i\frac{1}{\hbar}(H_n+H_m)t} \\ \underline{\tau}_{fermion}\left(\vec{r}_a,\vec{r}_b,t\right)=\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)\mathrm{e}^{\pm i\frac{1}{\hbar}(H_n-H_m)t} \end{cases} \qquad (28.57)$$

Par analogie avec la physique quantique, on appelle *bosons* les singularités correspondant à la première solution de superposition, dont la pulsation vaut $\left(H_n+H_m\right)/\hbar$, car les deux singularités peuvent occuper le même niveau d'énergie sans disparition des perturbations oscillatoires de l'expansion. Quant aux singularités qui correspondent à la deuxième solution de pulsation $\left|H_n-H_m\right|/\hbar$, on les appelle des *fermions* car elles ne peuvent pas être superposées dans le même niveau d'énergie puisqu'en ce cas les perturbations gravitationnelles oscillatoires de l'expansion disparaissent!

Cette constatation sur la manière qu'ont les singularités de se superposer fait donc directement apparaître le fameux *principe d'exclusion de Pauli:* les singularités qui se combinent selon la deuxième possibilité *(28.57)*, à savoir les *fermions*, ne peuvent pas se retrouver dans le même état (en $\vec{r}_a=\vec{r}_b$).

En physique quantique usuelle, où on ne décrit que les fonctions d'onde, et où on ignore la signification physique réelle de ces fonctions d'onde en terme d'amplitude et de phase de perturbations gravitationnelles oscillatoires, on peut faire apparaître cette différence entre bosons et fermions directement dans la fonction d'onde de superposition $\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)$. Pour cela, on constate que pour une même valeur de l'énergie E du système, il y a deux solutions possibles de l'équation *(28.55)* pour la fonction d'onde $\underline{\Psi}$ de superposition, qui correspondent simplement à échanger les deux singularités identiques

$$\underline{\Psi}=\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b) \quad \text{et} \quad \underline{\Psi}=\underline{\psi}_n(\vec{r}_b)\underline{\psi}_m(\vec{r}_a) \qquad (28.58)$$

Or, une des propriétés fondamentales des équations différentielles linéaires et homogènes est que toute combinaison linéaire de solutions particulières de ce type d'équations est aussi une solution, de sorte que la solution la plus générale de l'équation de Schrödinger *(28.55)* peut s'écrire sous la forme d'une superposition

$$\underline{\Psi}=\alpha\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b)+\beta\underline{\psi}_n(\vec{r}_b)\underline{\psi}_m(\vec{r}_a) \qquad (28.59)$$

Cette expression semblerait indiquer qu'il existe un grand nombre d'états stationnaires pour un système de deux singularités. Cependant, il faut maintenant tenir compte du fait que, à cause du principe d'incertitude lié aux commutateurs des opérateurs, les singularités identiques perdent leur individualité. On dit que des singularités identiques sont *indiscernables*, ce qui signifie tout simplement qu'il n'est pas possible de suivre la trajectoire d'une singularité donnée au cours du temps. Si on considère la fonction d'onde $\underline{\Psi}$ *(28.59)* du système, nous savons que $\underline{\Psi}^2$ détermine la probabilité de trouver les deux singularités dans une certaine portion d'espace. Si on échange les deux singularités, il est clair que $\underline{\Psi}^2$ doit rester inchangée. Par contre, la phase de $\underline{\Psi}$ peut être modifiée par cet échange, de sorte que $\underline{\Psi}\rightarrow\underline{\Psi}e^{i\eta}$. Si on procède à un deuxième échange des singularité, on a évidemment $\underline{\Psi}\rightarrow\underline{\Psi}e^{2i\eta}$ et on se retrouve dans l'état initial $\underline{\Psi}$, de sorte que $e^{2i\eta}=1$. Pour satisfaire cette dernière condition, il suffit en fait que $e^{2i\eta}=+1$ ou $e^{2i\eta}=-1$.

Dans le cas où la fonction d'onde $\underline{\Psi}$ se transforme en $\underline{\Psi}\rightarrow+\underline{\Psi}$ au cours de l'échange des

deux singularités, la fonction d'onde est dite *symétrique*, et les singularités sont appelées des *bosons*. La fonction d'onde $\underline{\Psi}$ s'écrit avec un facteur de normalisation α

$$\underline{\Psi} = \alpha\left(\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b) + \underline{\psi}_n(\vec{r}_b)\underline{\psi}_m(\vec{r}_a)\right) \qquad (28.60)$$

Si la fonction d'onde $\underline{\Psi}$ se transforme en $\underline{\Psi} \to -\underline{\Psi}$, la fonction d'onde est dite *antisymétrique*, et les singularités sont appelées des *fermions*. La fonction d'onde $\underline{\Psi}$ s'écrit avec un facteur de normalisation β comme

$$\underline{\Psi} = \beta\left(\underline{\psi}_n(\vec{r}_a)\underline{\psi}_m(\vec{r}_b) - \underline{\psi}_n(\vec{r}_b)\underline{\psi}_m(\vec{r}_a)\right) \qquad (28.61)$$

L'indiscernabilité des deux singularités ressort alors clairement des deux expressions précédentes de la fonction d'onde $\underline{\Psi}$. On constate aussi que, pour la fonction d'onde antisymétrique, il n'est pas possible que les deux singularités soient dans le même état puisque $\underline{\Psi}$ serait alors nulle: ceci est bien l'expression mathématique au niveau de la fonction d'onde elle-même, du *principe d'exclusion* associé aux expressions *(28.57),* qui dit que deux fermions ne peuvent occuper le même état simultanément parce que les perturbations gravitationnelles disparaissent en ce cas!

Dans le cas d'un système de N singularités identiques, les concepts précédents se généralisent facilement. Dans le cas de bosons, la fonction d'onde symétrique $\underline{\Psi}_{sym}$ du système s'écrit sous la forme

$$\underline{\Psi}_{sym} = \alpha \sum_{a,b,...,N} \psi_n(\vec{r}_a)\psi_m(\vec{r}_b) \ldots \psi_k(\vec{r}_N) \qquad (28.62)$$

où la somme porte sur les permutations possibles de tous les états différents du système. Si le système possède n_1 singularités à l'état d'énergie n, n_2 singularités à l'état d'énergie m, n_3 singularités à l'état d'énergie k, etc., le nombre de termes composant la fonction d'onde $\underline{\Psi}_{sym}$ est donné par

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3! \ldots} \qquad (28.63)$$

Dans le cas de fermions, la fonction d'onde antisymétrique $\underline{\Psi}_{anti}$ du système peut s'écrire sous la forme d'un déterminant

$$\underline{\Psi}_{anti} = \beta\begin{vmatrix} \psi_n(\vec{r}_a) & \psi_n(\vec{r}_b) & \ldots \\ \psi_m(\vec{r}_a) & \psi_m(\vec{r}_b) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad (28.64)$$

En effet, la permutation de deux colonnes d'un déterminant change le signe du déterminant, ce qui assure l'anti-symétrie de la fonctions d'onde $\underline{\Psi}_{anti}$ sous l'échange de deux des singularités. D'autre part, on sait aussi qu'un déterminant est nul si deux lignes sont identiques, ce qui correspond ici à l'expression du *principe d'exclusion de Pauli*, à savoir qu'un état donné ne peut être occupé par plus d'un fermion.

28.5 – De l'analogie avec la physique quantique

Il est tout-à-fait remarquable que la fonction d'onde associée aux perturbations gravitationnelles de l'expansion volumique soit parfaitement similaire à la fonction d'onde quantique d'une parti-

cule, et qu'elle satisfasse une équation d'onde identique à l'équation de Schrödinger. Cela mérite évidemment une discussion plus approfondie!

De l'analogie très forte avec la fonction d'onde quantique et l'équation de Schrödinger

L'équation d'onde relativiste *(28.24)* déduite de la deuxième équation partielle de Newton *(28.3)* a permis de décrire les fluctuations «gravitationnelles» d'expansion associées à une singularité massive se mouvant à des vitesses relativistes au sein du réseau. Quant à l'équation d'onde non-relativiste d'une singularité liée par un potentiel, elle est absolument identique à l'*équation de Schrödinger* de la physique quantique puisque leurs interprétations respectives en terme de probabilité de présence d'une particule sont *identiques*!. Les passages clefs utilisés pour aboutir à l'équation de Schrödinger *(28.46)* d'une singularité à partir de la deuxième équation partielle de Newton *(28.3)* pour les perturbations gravitationnelles d'expansion sont, premièrement *la conjecture 10* postulant la signification physique des opérateurs de temps et d'espace appliqués à la fonction d'onde, et deuxièmement *la "réduction" de l'équation d'onde* permettant de passer de l'équation d'onde *(28.38)* du deuxième degré en les dérivés spatiales vers l'équation d'onde *(28.40)* du premier degré en les dérivés spatiales, en utilisant encore ici *la conjecture 10*. Ce sont ces deux passages clefs qui ont permis d'établir une théorie physique tout-à-fait similaire à la physique quantique pour décrire les comportements microscopiques des singularités topologiques au sein d'un réseau cosmologique ne présentant pas d'ondes longitudinales.
Mais il manque encore dans notre théorie une explication physique approfondie de ces deux passages clefs et leur raison d'être. Notamment, on peut légitimement se poser la question de savoir pourquoi la constante de Planck existe, d'où vient sa valeur, et si celle-ci est réellement une constante universelle ou si elle est déductible à partir des autres constantes apparaissant dans notre théorie. Une réponse à ces questions permettrait une compréhension encore plus approfondie et définitive de la physique quantique.

De la démystification de la physique quantique

Mais dans notre théorie, la fonction d'onde complexe $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ et l'équation d'onde de Schrödinger sont tout de même physiquement démystifiées, puisque elles y deviennent les expressions mathématiques de l'enveloppe et de la phase des fluctuations vibratoires de l'expansion, donc des fluctuations gravitationnelles corrélées avec les singularités topologiques.
De cette interprétation tout-à-fait innovante de la physique quantique, la possibilité d'avoir des singularités de type *«bosons»* et de type *«fermions»*, le fait qu'il y ait *indiscernabilité* entre les singularités topologiques lorsqu'elles contribuent au même champ de fluctuations gravitationnelles corrélées, et le fait que les singularités de type «fermions» doivent satisfaire *un principe d'exclusion* similaire au principe d'exclusion de Pauli est probablement le point le plus remarquable et le plus étonnant de nos calculs, car il démystifie un côté qui a toujours été des plus obscurs en physique quantique.
Finalement, il est tout aussi remarquable de constater que toutes ces propriétés, comme par exemple les *propriétés de superposition* (la symétrie de la fonction d'onde $\underline{\Psi}_{sym}$ des singularités de type «bosons» et l'anti-symétrie de la fonction d'onde $\underline{\Psi}_{antisym}$ des singularités de type «fermions», l'indiscernabilité des singularités topologiques et le principe d'exclusion) sont des conséquences directes du fait que *les fluctuations gravitationnelles associées à une ou plu-*

sieurs singularités doivent satisfaire la deuxième équation partielle de Newton du réseau cosmologique!

En fait, l'image d'un champ de fluctuations gravitationnelles vibratoires corrélé avec une singularité topologique possède une potentialité énorme pour expliquer simplement des phénomènes quantiques observés et/ou calculés, mais restant encore très mystérieux dans le cadre de la physique quantique usuelle. Il suffit de penser aux quelques exemples suivants:

- le concept de dualité onde-corpuscule de la physique quantique, qui trouve ici une explication immédiate et simple puisque la particule est la singularité topologique, et que l'onde est le champ des fluctuations gravitationnelles qui lui est corrélé,
- les expériences d'interférences quantiques obtenues par le passage de particules au travers de deux fentes, mais en ne laissant passer qu'une seule particule à la fois, qui peuvent très bien s'expliquer maintenant par le fait que chaque singularité topologique ne peut effectivement passer que par une seule des fentes, mais que le champ des fluctuations gravitationnelles qui lui est associé franchit quant à lui les deux fentes, d'où la possibilité d'une interférence de ces fluctuations à la sortie des deux fentes, entraînant par leur couplage avec la singularité une modification de la trajectoire de celle-ci, et finalement une distribution statistique des points d'impact successifs des particules sur l'écran placé après les deux fentes,
- le principe d'incertitude de Heisenberg, qui est évidemment satisfait dans notre théorie puisqu'elle admet *à fortiori* la même interprétation des opérateurs agissant sur la fonction d'onde que la physique quantique, et satisfait donc toutes les relations de *l'annexe B*. Les relations d'incertitude sont alors directement liées à l'existence des perturbations gravitationnelles corrélées à la singularité,
- les expériences très mystérieuses d'intrication quantique (entanglement) et de décohérence quantique, puisqu'on peut très bien imaginer que l'intrication est le fait pour deux ou plusieurs singularités topologiques de posséder en commun un seul champ de fluctuations gravitationnelles, auquel cas le fait d'agir sur une seule des singularités va modifier ce champ commun de fluctuations gravitationnelles, ce qui va forcément agir sur les autres singularités qui participent à l'intrication, et qui peut aussi provoquer la décohérence quantique, autrement dit le découplage des singularités topologiques impliquées dans le champ commun de fluctuations gravitationnelles.

«Dieu ne joue pas aux dés»

Einstein disait *«Dieu ne joue pas aux dés»* en parlant de la physique quantique, voulant dire par là que la physique quantique de son époque n'était pas une théorie complète, et qu'il devait forcément exister une explication rationnelle et pragmatique à l'aspect probabiliste de la théorie quantique. Cette opinion d'Einstein a été fortement discutée, pour ne pas dire vertement critiquée! Il a bien été démontré qu'il ne pouvait pas exister de variables cachées locales pour expliquer la physique quantique, mais par contre rien n'empêche qu'il puisse exister des variables cachées non locales, et c'est précisément le cas des fluctuations gravitationnelles corrélées aux singularités topologiques! Force est donc de constater ici qu'Einstein avait en effet raison, et qu'il existe bel et bien une explication tout à fait rationnelle de la physique quantique!

Il y a d'ailleurs une note fortement ironique dans la fameuse sentence d'Einstein, puisque la physique quantique s'expliquerait par des fluctuations gravitationnelles du champ d'expansion

volumique et par un mouvement stochastique des singularités topologiques interagissant avec ces fluctuations gravitationnelles, qui sont bien des ingrédients avec lesquels Dieu, s'il existait, *pourrait* jouer aux dés, et que, oh comble de l'ironie, c'est précisément Einstein lui-même qui est à la base des explications de la Gravitation Générale et du Mouvement Brownien, ce qui lui a d'ailleurs valu le prix Nobel de physique!

Ainsi, notre explication de la physique quantique donne raison à Einstein, et montre que celle-ci est l'expression de fluctuations gravitationnelles à très petites échelles dans un réseau cosmologique sans propagation d'ondes longitudinales. Par conséquent, toutes les tentatives modernes de *quantifier la gravitation* sont forcément vouées à l'échec puisque la physique quantique est précisément l'expression des fluctuations gravitationnelles dynamiques à l'échelle microscopique!

Chapitre 29

Fluctuations gravitationnelles au coeur des singularités topologiques: spin et moment magnétique

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à trouver la solution de la deuxième équation partielle de Newton au sein même du tore entourant une boucle de désinclinaison vis. On va montrer qu'il ne peut pas exister de solution statique à cette équation, et que, par conséquent, il faudra rechercher une solution dynamique pour les perturbations «gravitationnelles» d'expansion au voisinage immédiat de la boucle. Cette solution dynamique se trouve en fait dans *un mouvement de rotation quantifié de la boucle sur elle-même*, qui doit satisfaire la deuxième équation partielle dynamique de Newton, qui devient en ce cas l'équation de Schrödinger comme on l'a montré au chapitre précédent!

Ce mouvement de rotation de la boucle sur elle-même n'est rien d'autre que le *«spin»* de la boucle, et on montre qu'un *moment magnétique* lui est associé, qui correspond exactement au moment magnétique de spin en physique des particules! D'autre part, on montre que, dans le cas de notre théorie, *ce mouvement de rotation est bien réel*, et qu'*il n'enfreint aucunement la relativité restreinte*, au contraire de ce que croyaient initialement les pionniers de la physique quantique!

29.1 – Champ interne de perturbations «gravitationnelles» d'expansion d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

Nous avons déjà calculé les champs externes statiques *(23.2)* de perturbations gravitationnelles d'expansion d'une boucle de désinclinaison vis, et nous avons vu que ces champs sont responsables des effets d'attraction gravitationnelle à longue distance de la boucle via *la force de gravitation* (section 24.2), mais aussi des effets de couplage à courte distance avec d'autres boucles via *la force faible* (chapitre 26).

La condition d'existence d'un champ statique interne d'expansion

Par contre, nous ne nous sommes pas encore penchés sur le cas du champ des perturbations de l'expansion au voisinage immédiat de la boucle de désinclinaison vis. Ce champ doit être calculé au sein du tore entourant la boucle de désinclinaison vis. En utilisant une version statique simplifiée de la deuxième équation partielle de Newton *(18.14)*, on a, au sein du tore

$$\tau_{int}^{BV}(\vec{\xi}) = \frac{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}{2K_1}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4K_1F_{dist}^{BV}(\vec{\xi})}{\left(4K_2/3+2K_1(1+\tau_0+)-K_0\right)^2}}\right] \qquad (29.1)$$

dans laquelle $\vec{\xi}$ représente le vecteur lieu repérant un point sur une section du tore par rapport

au centre de cette section (fig. 19.2). Dans cette équation du deuxième degré, l'énergie de distorsion $F_{dist}^{BV}(\vec{\xi})$ est associée aux champs de rotation et de cisaillement de la pseudo-dislocation vis, et vaut, d'après *(19.5)*

$$F_{dist}^{BV}(\vec{\xi}) \cong \left(K_2 + K_3\right)\frac{\Lambda^2}{2\pi^2}\frac{1}{\xi^2} \cong \left(K_2 + K_3\right)\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2}{8\pi^2}\frac{1}{\xi^2} \qquad (29.2)$$

Une champ statique de perturbations de l'expansion devrait donc se déduire de l'équation

$$\tau_{int}^{BV}(\vec{\xi}) = \frac{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}{2K_1}\left[-1 + \sqrt{1 - \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+) - K_0\right)^2}\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2}{2\pi^2}\frac{1}{\xi^2}}\right] \qquad (29.3)$$

Pour que cette équation ait une solution réelle, il faudrait que l'argument de la racine soit positif, donc que la distance $\vec{\xi}$ au coeur de la boucle satisfasse la relation

$$\xi^2 > \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+) - K_0\right)^2}\frac{\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2}{2\pi^2} \qquad (29.4)$$

Sachant que la charge de rotation de la boucle de désinclinaison vis satisfait la relation suivante

$$\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2 = \pi^2 R_{BV}^2\,\vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}_{BV}^2 = \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{\pi^2 R_{BV}^2} \qquad (29.5)$$

on déduit la condition pour qu'il existe une solution à l'équation *(29.3)*, notamment dans le domaine d'expansion de fond $\tau_0 << \tau_{0cr}$

$$\xi^2 > \frac{K_1\left(K_2+K_3\right)}{2\pi^4\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+) - K_0\right)^2}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{R_{BV}^2} \cong \frac{K_1}{2\pi^4 K_0}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{R_{BV}^2} \qquad (29.6)$$

ce qui revient à la condition simple que

$$\xi > \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{K_1}{2K_0}}\frac{\left|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\right|}{R_{BV}} \qquad (29.7)$$

Essayons d'exprimer la condition qu'il doit exister sur le module K_1 pour que cette condition revienne à ce que la distance $\vec{\xi}$ soit supérieure au rayon R_{BV}. On trouve assez facilement que cette condition s'écrit

$$K_1 > K_{1cr} = K_0\frac{2\pi^4\,R_{BV}^2}{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2} \quad \Rightarrow \quad \xi > R_{BV} \qquad (29.8)$$

Cette condition signifie que si le module K_1 est supérieur à la valeur critique K_{1cr}, il n'existe en fait pas de solution statique à l'équation *(29.3)* dans l'ensemble du volume du tore entourant la boucle de désinclinaison vis!

Il est intéressant de faire intervenir ici des valeurs numériques qu'on peut tirer du monde réelle, en utilisant par exemple l'analogie avec les électrons, à savoir que, pour ceux-ci, on a une charge électrique valant $q_{\lambda BV} = q_{électron} = 1.6\cdot 10^{-19}\left[C\right]$, un rayon estimé de l'ordre de $10^{-18}\left[m\right]$ et que les modules élastiques $K_3 = K_0$ sont en fait les analogues de la constante diélectrique du vide, de sorte qu'on peut utiliser la valeur numérique suivante pour ces modules: $K_3 = K_0 = 1/\varepsilon_0^{diélectrique} = 1.1\cdot 10^{11}\left[m/F\right]$. Avec ces valeurs numériques, la condition *(29.8)* impliquerait alors que $K_{1cr} = K_0 2\pi^4 R_{BV}^2/q_{\lambda BV}^2 \cong 10^{-21}$

L'existence et la nature d'un champ dynamique interne d'expansion

La condition que le module K_1 soit supérieur à la valeur critique $K_{1\,cr} \cong 10^{-21}$ à de fortes chances d'être remplie en présence d'une boucle de désinclinaison vis, ce qui est fortement conforté par l'application numérique obtenue grâce à l'analogie avec les électrons du monde réel. Admettons donc la conjecture suivante:

Conjecture 11: *K_1 satisfait la relation suivante dans le réseau cosmologique parfait:*

$$K_1 \geq K_{1\,cr} = K_0\, 2\pi^4\, R_{BV}^2 \,/\, \boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}^2 \qquad (29.9)$$

En admettant cette conjecture, le champ de perturbations «gravitationnelles» au sein du tore entourant la boucle de désinclinaison vis ne peut pas être une solution de l'équation statique *(29.3)*, et doit par conséquent devenir un champ de perturbations «gravitationnelles» internes *dynamiques*, solution de la deuxième équation partielle de Newton *(18.12)*. Mais autour de la boucle, cette équation de Newton pour les perturbations dynamiques n'est rien d'autre que l'équation de Schrödinger *(28.46).* Il faut donc trouver un mouvement de la boucle qui ne soit pas une translation de celle-ci, mais un mouvement confiné au même endroit de l'espace. Or, le seul mouvement possible de la boucle qui soit confiné au même endroit de l'espace est en fait *une rotation de celle-ci sur elle-même*!

29.2 – Moment cinétique, spin et moment magnétique d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

Considérons donc une boucle de désinclinaison vis de rayon R_{BV} comme représentée à la figure 19.2, et imaginons que celle-ci puisse tourner autour d'un axe de direction $\vec{e}_{axe}$ contenu dans le plan de la boucle avec *une pulsation* ω_{BV}, ce qui n'est pas impossible puisque la boucle correspond en fait à *une pseudo-dislocation vis*. Si on traite d'abord ce problème de façon classique, on peut utiliser des coordonnées polaires pour définir *le moment cinétique* $\vec{L}_{BV}$ de la boucle autour de son axe de rotation, *en supposant la masse de la boucle distribuée uniformément sur la surface de la boucle*

$$\vec{L}_{BV} = \oint \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm = \vec{e}_{axe} \int_0^{R_{BV}} 4 \int_0^{\pi/2} \underbrace{r\cos\theta}_{|\vec{r}|}\, \underbrace{r\cos\theta\, \omega_{BV}}_{|\vec{v}|}\, \underbrace{\frac{M_0^{BV}}{\pi R_{BV}^2} r d\theta dr}_{dm} = \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \qquad (29.10)$$

Comme on ne connaît qu'approximativement la distribution de la masse au voisinage de la boucle, on va introduire un facteur numérique δ_1 de correction tel que

$$\vec{L}_{BV} \cong \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \quad \text{avec} \quad \delta_1 \cong 1 \qquad (29.11)$$

On peut alors introduire *le moment d'inertie de la boucle* autour de l'axe de rotation

$$\vec{L}_{BV} \cong I_{BV} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \quad \Rightarrow \quad I_{BV} = \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{4} \quad \text{avec} \quad \delta_1 \cong 1 \qquad (29.12)$$

Comme une boucle de désinclinaison vis possède aussi une *charge de rotation* $\boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}$ (analogue à la charge électrique), elle possède aussi un *«moment magnétique»* $\vec{\mu}_{BV}$ dans la direc-

tion de l'axe rotation qui est défini, *en supposant la charge répartie sur le contour de la boucle*, comme

$$\vec{\mu}_{BV} = \frac{1}{2}\oint \vec{r} \wedge \vec{v}\, d\boldsymbol{q} = \vec{e}_{axe} 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{R_{BV}\cos\theta}_{|\vec{r}|} \underbrace{R_{BV}\cos\theta\, \omega_{BV}}_{|\vec{v}|} \underbrace{\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}}{2\pi} d\theta}_{d\boldsymbol{q}} = \frac{R_{BV}^2 \boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \qquad (29.13)$$

Comme on ne connaît qu'approximativement la distribution de la charge au voisinage de la boucle, on va introduire un facteur numérique δ_2 de correction tel que

$$\vec{\mu}_{BV} \cong \delta_2 \frac{R_{BV}^2 \boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \quad \text{avec} \quad \delta_2 \cong 1 \qquad (29.14)$$

On trouve donc une relation directe entre le «moment magnétique» $\vec{\mu}_{BV}$ et le moment cinétique $\vec{L}_{BV}$ de cette boucle, qui s'appelle *le rapport gyromagnétique*

$$\vec{\mu}_{BV} \cong 2\frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2M_0^{BV}} \vec{L}_{BV} = g_{BV} \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2M_0^{BV}} \vec{L}_{BV} \quad \text{avec} \quad g_{BV} = 2\frac{\delta_2}{\delta_1} \cong 2 \qquad (29.15)$$

On peut encore calculer l'*énergie cinétique* $E^{cin}_{rotation\, BV}$ associée à ce mouvement de rotation autour de l'axe de rotation, sous la forme

$$E^{cin}_{rotation\, BV} = \frac{1}{2}\oint \vec{v}^2\, dm = \int_0^{R_{BV}} 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{r^2 \cos^2\theta\, \omega^2}_{\vec{v}^2} \underbrace{\frac{M_0^{BV}}{\pi R_{BV}^2} r d\theta dr}_{dm} = \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{8} \omega_{BV}^2 \qquad (29.16)$$

Avec le facteur correctif δ_1 sur la distribution de la masse au sein de la boucle, on obtient

$$E^{cin}_{rotation\, BV} \cong \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{8} \omega_{BV}^2 \quad \text{avec} \quad \delta_1 \cong 1 \qquad (29.17)$$

On a alors les liens suivants entre énergie cinétique, moment cinétique et moment d'inertie

$$E^{cin}_{rotation\, BV} \cong \frac{2\vec{L}_{BV}^2}{\delta_1 M_0^{BV} R_{BV}^2} \cong \frac{\vec{L}_{BV}^2}{2I_{BV}} \qquad (29.18)$$

De la quantification du moment cinétique de la boucle vis

En admettant que la boucle de désinclinaison vis (BV) tourne effectivement sur elle-même, ce mouvement microscopique de rotation doit être calculé à l'aide de l'équation de Schrödinger stationnaire *(28.46).* Le traitement du mouvement de rotation d'un objet microscopique autour d'un axe par l'équation de Schrödinger stationnaire est succinctement résumé dans *l'annexe B*, et les valeurs propres de l'énergie sont données par

$$\varepsilon_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) \qquad (29.19)$$

Pour chaque valeur de l'énergie ε_j correspondant à une vitesse angulaire donnée, il y a $2j+1$ états propres différents correspondant classiquement à des orientations différentes de l'axe de rotation. On dit que l'état d'énergie ε_j est $2j+1$ fois dégénéré.

Quant au *nombre quantique magnétique* m_z , qui caractérise la quantification de la projection du moment cinétique selon un certain axe z , il peut prendre les valeurs suivantes

$$m_z = j, j-1, ..., 1-j, -j \qquad (29.20)$$

de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe $\boldsymbol{O}z$ prend les valeurs

$$L_z = \hbar m_z \qquad (29.21)$$

L'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle valent donc

$$\begin{cases} E^{cin}_{rotation\,BV} = \dfrac{\hbar^2}{2I_{BV}}\, j\,(j+1) \\ \vec{L}^2_{BV} = 2I_{BV}E^{cin}_{rotation\,BV} = \hbar^2\, j\,(j+1) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{L}_{BV}\right| = \hbar\sqrt{j\,(j+1)} \end{cases} \qquad (29.22)$$

Le *moment magnétique de la boucle* selon l'axe $\boldsymbol{O}z$ s'écrit alors

$$\vec{\mu}_{BV\,z} \cong g_{BV}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}}{2M_0^{BV}}L_z\vec{e}_z = g_{BV}\frac{\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}}{2M_0^{BV}}m_z\,\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad g_{BV} = 2\frac{\delta_2}{\delta_1} \cong 2 \qquad (29.23)$$

où g_{BV} est le *facteur de Landé* de la boucle vis, qui est à peu près égal à 2 dans le cas de la boucle de désinclinaison vis, mais qui dépendrait de la distribution de la masse et de la charge dans le cas d'autres types de singularités topologiques.
On constate que, dans l'expression *(29.23),* on retrouve alors la valeur du fameux *magnéton de Bohr ,* à savoir $\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}/2M_0^{BV}$.

De l'interprétation tout-à-fait classique du spin d'une particule

En physique quantique, le spin d'une particule chargée comme l'électron a bien été attribué initialement à une rotation propre de la particule. Cependant, le fait que l'électron soit considéré comme une particule sphérique, qui plus est extrêmement petite, a fait douter de cette interprétation «classique» du spin. Mais l'argument le plus fort pour renoncer à cette interprétation «classique», bien que les effets du spin comme le moment magnétique de l'électron correspondent rigoureusement à une rotation propre de la particule sur elle-même, est le fait qu'un calcul de la vitesse équatoriale de rotation de l'électron donne une vitesse largement supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui ne cadre pas du tout avec la théorie de la Relativité Restreinte!
Mais il en va tout autrement dans notre théorie. En effet, essayons de calculer la vitesse équatoriale dans le cas de la boucle de désinclinaison vis, qui s'obtient à partir de son rayon R_{BV} et de la pulsation ω de son mouvement de rotation

$$\boldsymbol{v}_{équatoriale} = R_{BV}\omega_{BV} \qquad (29.24)$$

Pour déterminer la pulsation ω de la rotation, on égale l'énergie cinétique *(29.17)* de rotation de la boucle à son énergie cinétique *(29.22)* déterminée via l'équation de Schrödinger. Il vient

$$E^{cin}_{rotation\,BV} \cong \delta_1\frac{M_0^{BV}R_{BV}^2}{8}\omega_{BV}^2 = \frac{\hbar^2}{2I_{BV}}\,j\,(j+1) \quad \Rightarrow \quad \omega_{BV} = \pm\frac{4\hbar}{\delta_1 M_0^{BV}R_{BV}^2}\sqrt{j\,(j+1)} \qquad (29.25)$$

En introduisant cette valeur de ω_{BV} dans l'expression de la vitesse équatoriale $\boldsymbol{v}_{équatoriale}$, on obtient la valeur

$$\boldsymbol{v}_{équatoriale} = R_{BV}\omega_{BV} = \pm\frac{4\hbar}{\delta_1 M_0^{BV}R_{BV}}\sqrt{j\,(j+1)} \qquad (29.26)$$

Numériquement, utilisons les valeurs connues de l'électron, à savoir la masse de l'électron $M_0^{BV} \equiv M_0^{électron} = 9{,}1\bullet 10^{-31}\,[kg]$, son rayon approximatif de l'ordre de $10^{-18}\,[m]$, la valeur de

δ_1 voisine de 1, la valeur de la constante de Planck $\hbar \equiv 6,6 \bullet 10^{-34} \left[m^2 kg / s \right]$, et son spin connu de $j = 1/2$. Il vient alors la vitesse

$$\boldsymbol{v}_{\acute{e}quatoriale} \cong 2,5 \bullet 10^{15} \left[m / s \right] \qquad (29.27)$$

On retrouve bien que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle est largement supérieure à la vitesse de la lumière au sein du réseau, à savoir $c_{t0} \equiv c = 3,3 \bullet 10^8 \left[m / s \right]$, comme l'avaient trouvé les pionniers de la physique quantique.

Mais il intervient dans notre théorie un fait complètement nouveau, qui est l'expansion volumique statique énorme au voisinage immédiat de la boucle tournante. En effet, exprimons l'expansion volumique statique à la limite du tore où les perturbations d'expansion peuvent devenir statiques. A cette limite, l'expansion volumique statique est maximum et elle est donnée par la solution unique de l'équation *(29.3)* lorsque le terme sous la racine est nulle, de sorte que

$$\tau^{BV}_{statique\ max} = \frac{K_0 - 4K_2 / 3 - 2K_1(1+\tau_0)}{2K_1} \cong \frac{K_0}{2K_1} \qquad (29.28)$$

On en déduit par conséquent que la vitesse réelle des ondes transversales dans le voisinage immédiat de la boucle vaut en fait

$$c_t\big|_{limite} \cong c_{t0}\, e^{\tau^{BV}_{statique\ max}/2} \cong c_{t0}\, e^{\frac{K_0}{4K_1}} \qquad (29.29)$$

Par conséquent, la vitesse $c_t\big|_{limite}$ est assurément très supérieure à $c_{t0} \equiv c = 3,3 \bullet 10^8 \left[m / s \right]$ puisque $K_0 / K_1 >> 1$. En fait, il suffit que

$$c_t\big|_{limite} \cong c_{t0}\, e^{\frac{K_0}{4K_1}} > \boldsymbol{v}_{\acute{e}quatoriale} \cong 2,5 \bullet 10^{15} \left[m / s \right] \qquad (29.30)$$

pour que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle soit possible. On peut essayer de déterminer quelle est la valeur limite du module K_1 pour que la rotation de la boucle soit possible. On obtient très facilement qu'il faut simplement que

$$K_1 / K_0 < 1,6 \bullet 10^{-2} \qquad (29.31)$$

Or cette condition est toujours satisfaite puisque on a $K_1 / K_0 << 1$. On est donc assuré que, *dans notre théorie,* le mouvement de rotation de la boucle sur elle-même est non seulement parfaitement possible, mais qu'il est surtout *obligatoire* puisque c'est la seule solution possible à la deuxième équation partielle de Newton!!!

On en conclue donc qu'il existe à nouveau une explication tout à fait «classique» de la notion de spin d'une particule, en tant que réel mouvement quantifié de rotation de la boucle autour d'un axe, qui n'enfreint aucunement les principes de la relativité restreinte. Cette explication enlève d'une part tout le côté mystérieux de la notion de spin en physique quantique, et explique d'autre part parfaitement l'existence d'un moment magnétique de spin quantifié de l'électron, associé directement à la rotation réelle de la boucle chargée!

29.3 – Du problème de la valeur du spin d'une boucle topologique

Si l'existence d'une rotation propre des boucles est une nécessité dans notre théorie pour satisfaire la deuxième équation partielle de Newton au voisinage immédiat de la boucle, il est encore une question à laquelle nous n'avons pas de réponse: quelle valeur faut-il attribuer au spin de la

boucle?
Autrement formulée, cette question revient à rechercher la valeur à attribuer au nombre quantique azimutal j qui caractérise la quantification de l'énergie de rotation et du moment cinétique *(29.22)* de la boucle, ainsi que de son moment magnétique *(29.23)*.
Expérimentalement, on sait que le spin de l'électron vaut $j=1/2$ et que le spin du boson intermédiaire W^- vaut $j=1$. Mais la raison profonde pour laquelle ces particules possèdent ces valeurs particulières reste très mystérieuse! Dans notre théorie, il en va de même: hormis le fait que les spin $j=1/2$ et $j=1$ sont les plus faibles, et donc correspondent aux énergies cinétiques les plus basses possibles, aucun argument raisonnable ne permet pour l'instant de faire un choix de la valeur de j à choisir pour une boucle de désinclinaison vis! Regardons par conséquent l'effet d'un spin $j=1/2$ ou d'un spin $j=1$ sur une boucle de désinclinaison vis.

Boucle de désinclinaison vis de spin 1/2

Considérons une boucle de désinclinaison vis de spin $j=1/2$. Quelle que soit la direction de l'axe de rotation, il ne peut alors y avoir que deux états propres de la boucle, correspondant à une rotation dextrogyre ou lévogyre de la boucle autour de l'axe de rotation, puisque l'état de dégénérescence de l'énergie est en ce cas de $2j+1=2$.
L'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle valent donc en ce cas

$$\begin{cases} E^{cin}_{rotation\,BV}=\dfrac{\hbar^2}{2I_{BV}}\,j\,(j+1)=\dfrac{3\hbar^2}{8I_{BV}} \\ \vec{L}^2_{BV}=\hbar^2\,j\,(j+1)=\dfrac{3}{4}\hbar^2 \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{L}_{BV}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hbar \end{cases} \qquad (29.32)$$

Quant au nombre quantique magnétique m_z, il peut prendre les deux valeurs suivantes

$$m_z=j,j-1,...,1-j,-j=\pm\frac{1}{2} \qquad (29.33)$$

de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe $\boldsymbol{O}z$ prend les valeurs $\pm\hbar/2$

$$L_z=\hbar m_z=\pm\frac{\hbar}{2} \qquad (29.34)$$

On retrouve donc ici exactement la notion de spin d'une *particule de spin 1/2*.
Le *moment magnétique de la boucle* selon l'axe $\boldsymbol{O}z$ s'écrit alors

$$\vec{\mu}_{BV\,z}\cong g_{BV}\frac{\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}}{2M_0^{BV}}m_z\vec{e}_z=\pm g_{BV}\frac{\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}}{4M_0^{BV}}\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad g_{BV}\cong 2 \qquad (29.35)$$

Boucle de désinclinaison vis de spin 1

Considérons maintenant une boucle de désinclinaison vis de spin $j=1$. Quelle que soit la direction de l'axe de rotation, il ne peut alors y avoir que trois états propres de la boucle, correspondant à une rotation dextrogyre, à une rotation lévogyre, ou à aucune rotation de la boucle autour de son axe de rotation, puisque l'état de dégénérescence de l'énergie vaut en ce cas de $2j+1=3$.

L'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle valent en ce cas

$$\begin{cases} E^{cin}_{rotation\,BV} = \dfrac{\hbar^2}{2I_{BV}}\, j\,(j+1) = \dfrac{\hbar^2}{I_{BV}} \\ \vec{L}^2_{BV} = \hbar^2\, j\,(j+1) = 2\hbar^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{L}_{BV}\right| = \hbar\sqrt{2} \end{cases} \tag{29.36}$$

Quant au nombre quantique magnétique m_z, il peut prendre les deux valeurs suivantes

$$m_z = j, j-1, ..., 1-j, -j = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases} \tag{29.37}$$

de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe Oz prend les valeurs $\pm\hbar/2$

$$L_z = \hbar m_z = \begin{cases} 0 \\ \pm\hbar \end{cases} \tag{29.38}$$

On retrouve donc ici exactement la notion de spin d'une *particule de spin 1*.
Le *moment magnétique de la boucle* selon l'axe Oz s'écrit alors

$$\vec{\mu}_{BV\,z} \cong g_{BV}\frac{\hbar \boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2M_0^{BV}} m_z \vec{e}_z = \begin{cases} 0 \\ \pm g_{BV}\dfrac{\hbar \boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2M_0^{BV}}\vec{e}_z \end{cases} \quad \text{avec} \quad g_{BV} \cong 2 \tag{29.39}$$

Du lien existant entre les notions de bosons, de fermions et de spin

La question de savoir si une boucle de singularité topologique se comporte comme un fermion ou un boson en cas de superposition de plusieurs boucles (voir section 29.4) et la question de la valeur du spin d'une boucle de singularité topologique sont assurément liés très intimement. En effet, nous savons de la physique quantique que les fermions ont un spin de 1/2 et que les bosons ont un spin de 1. De la physique quantique, on sait aussi que la composante de spin de la fonction d'onde Ψ de deux particules est symétrique lorsque les spins des deux particules sont parallèles, et antisymétrique si les spins sont anti-parallèles, et on a donc les possibilités suivantes pour la fonction d'onde Ψ de deux particules:

• *Fermions:* fonction d'onde antisymétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale antisymétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale symétrique.

• *Bosons:* fonction d'onde symétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale symétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale antisymétrique.

Il serait très intéressant de creuser ce problème, et de voir quelle interprétation topologique lui donner dans le cadre de notre théorie des boucles topologiques. Mais ce problème dépasse pour l'instant le cadre de cet ouvrage, et sera donc relégué parmi les problèmes encore en suspens dans notre modèle du réseau cosmologique parfait!

Chapitre 30

Fluctuations transversales quantifiées: les photons

Au chapitre 14, on a montré que la propagation d'une onde «électromagnétique» transversale de rotation polarisée linéairement est accompagnée d'une ondelette longitudinale «gravitationnelle». Dans ce chapitre, on va s'intéresser à ce qui se passe dans le cas de paquets d'onde localisés. On va montrer que ces paquets d'onde ne peuvent apparaître qu'avec *une hélicité non nulle* afin que leur énergie totale ne dépende pas du temps. En supposant alors que ces paquets d'onde sont émis lorsqu'une singularité topologique change subitement d'état, il devient tout-à-fait compréhensible qu'ils présentent une *quantification de leur énergie.* Ces paquets d'onde se comportent alors comme des quasi-particules énergétiques de fluctuations «électromagnétiques» qu'on pourrait qualifier de *«photons»* et qui ont effectivement des propriétés très similaires à celles des photons, comme l'hélicité, la quantité de mouvement, la dualité onde-corpuscule, la non-localisation, l'intrication, etc.

30.1 – Fluctuations «électromagnétiques» transversales localisées

On a vu au chapitre 14 que la propagation d'une onde transversale polarisée linéairement au sein du réseau cosmologique est astreinte à l'existence d'une perturbation corrélée de l'expansion du réseau, et que seules les ondes de rotation polarisées circulairement sont des ondes transversales pures, sans ondelettes d'expansion associées. On peut raisonnablement se demander si cette propriété étonnante ne pouvait pas être à l'origine de l'existence de fluctuations «électromagnétiques» quantifiées, comme les fameux photons de la physique quantique?

Les paquets localisés d'onde de rotation, véritables fluctuations «électromagnétiques»

Considérons des ondes transversales se propageant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, avec une polarisation du champ de rotation selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ et du champ de vitesse selon l'axe $\boldsymbol{O}x_3$. Les équations de champ linéarisées de ces fluctuations se déduisent de *(14.13)*, *(14.14)* et *(14.18)* et s'écrivent, en supposant un réseau cosmologique parfait dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} \cong c_t^2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2^2} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial t} \cong \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t} \cong -c_t^2 \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial x_2} + c_t^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial t} \cong \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t} \cong -c_t^2 \dfrac{\partial \tau^{(p)}}{\partial x_2} + c_t^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1)^2 \end{cases} \qquad (30.1)$$

Essayons alors de former un paquet d'ondes transversales, de fréquence ω, d'enveloppe exponentielle de portées δ_2 et $\delta_1 = \delta_3 = \delta$, exprimé en écriture complexe, avec un champ de rotation donné par

$$\underline{\omega}_1(x_2,t)=\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\,\mathrm{e}^{i(kx_2-\omega t)} \tag{30.2}$$

En utilisant les équations d'onde *(30.1)*, on peut montrer qu'on obtient les champs suivants

$$\begin{cases} \underline{\omega}_1(x_2,t)=\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \\ \underline{\phi}_3(x_2,t)=-2c_t\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \\ \underline{\tau}^{(p)}(x_2,t)=\frac{1}{2}\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \\ \underline{\phi}_2(x_2,t)=-\frac{1}{2}c_t\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \end{cases} \tag{30.3}$$

En écrivant les champs réels, parties réelles des champs complexes, on a alors

$$\begin{cases} \omega_1(x_2,t)=\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \phi_3(x_2,t)=-2c_t\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \tau^{(p)}(x_2,t)=\frac{1}{2}\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos\left[2\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \phi_2(x_2,t)=-\frac{1}{2}c_t\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos\left[2\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \end{cases} \tag{30.4}$$

L'énergie par unité de volume de cette fluctuation dans un réseau cosmologique dont l'expansion de fond satisfait $\tau_0<\tau_{0cr}$ s'écrit en ce cas

$$e^{fluctuation}=\underbrace{2K_3\omega_1^2}_{e_{\omega}^{dist}}+\underbrace{K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2-2\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\tau^{(p)}}_{e_{\tau^{(p)}}^{dist}}+\underbrace{\frac{1}{2}mn\dot{\vec{\phi}}^2}_{e^{cin}} \tag{30.5}$$

de sorte que, comme $c_t^2=K_3/mn$, on a la densité d'énergie suivante

$$e^{fluctuation}=\begin{bmatrix} 4K_3\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos^2\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ +\frac{1}{8}\left(K_3+2K_1\right)\omega_{10}^4\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-4\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos^2\left[2\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ -\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\omega_{10}^2\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\cos\left[2\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \end{bmatrix} \tag{30.6}$$

De la nécessité d'introduire une hélicité du paquet d'onde de rotation

L'énergie de cette fluctuation par oscillation du champ de rotation ne contient que des termes en $\cos^2\omega t$ et $\cos\omega t$, de sorte qu'elle n'est pas indépendante du temps, alors qu'elle devrait en principe l'être! Pour faire disparaître les termes en $\cos^2\omega t$, on peut ajouter à l'oscillation de

rotation $\omega_1(x_2,t)$ en $\cos\omega t$ selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ une oscillation de rotation $\omega_3(x_2,t)$ en $\sin\omega t$ selon l'axe $\boldsymbol{O}x_3$, oscillations qui satisfont les relations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t} \cong \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi_3}{\partial t} \cong 2c_t^2\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega_3}{\partial t} \cong -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial t} \cong -2c_t^2\dfrac{\partial\omega_3}{\partial x_2} \end{cases} \qquad (30.7)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tau^{(p)}}{\partial t} \cong \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial t} \cong -c_t^2\dfrac{\partial\tau^{(p)}}{\partial x_2} + c_t^2\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1)^2 + c_t^2\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_3)^2 \end{cases}$$

En écrivant les paquets d'ondes de rotation $\underline{\omega}_1(x_2,t)$ et $\underline{\omega}_3(x_2,t)$ sous la forme complexe

$$\begin{cases} \underline{\omega}_1(x_2,t) = \omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \\ \underline{\omega}_3(x_2,t) = \pm i\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \end{cases} \qquad (30.8)$$

on montre à l'aide des relations *(30.7)* que les paquets d'ondes associés aux vitesses du réseau $\underline{\phi}_1(x_2,t)$ et $\underline{\phi}_3(x_2,t)$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} \underline{\phi}_3(x_2,t) = -2c_t\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \\ \underline{\phi}_1(x_2,t) = \pm i2c_t\omega_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}}\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)} \end{cases} \qquad (30.9)$$

Grâce à la dernière relation *(30.7)*, on déduit aussi que les champs $\underline{\phi}_2(x_2,t)$ et $\tau^{(p)}(x_2,t)$ dus à $\underline{\omega}_1(x_2,t)$ et $\underline{\omega}_3(x_2,t)$ s'annulent mutuellement, en fait simplement parce que

$$\underline{\omega}_1^2 + \underline{\omega}_3^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\underline{\omega}_1^2}{\partial x_2} + \frac{\partial\underline{\omega}_3^2}{\partial x_2} = 0 \qquad (30.10)$$

Ceci implique que s'il existe tout de même un champ $\tau^{(p)}(x_2,t)$ associé au paquet d'onde de rotation, il est indépendant des champs $\underline{\omega}_1(x_2,t)$ et $\underline{\omega}_3(x_2,t)$, et il faut qu'il satisfasse l'équation d'onde suivante, identique à la relation *(28.5)*

$$\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong -c_t^2\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial x_2^2} \qquad (30.11)$$

L'énergie du paquet d'onde de rotation

Le paquet d'onde définis par *(30.8)* et *(30.9)* représente en fait, dans l'analogie avec l'électromagnétisme, un paquet d'ondes électromagnétiques, qui <u>DOIT</u> présenter une hélicité droite ou

gauche pour que son énergie soit indépendante du temps et surtout pour qu'il ne soit pas accompagné d'une perturbation «gravitationnelle» d'expansion. En représentation réelle, on obtient en ce cas

$$\begin{cases} \omega_1(x_2,t) = \omega_{10}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}} \cos\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \omega_3(x_2,t) = \mp\omega_{10}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}} \sin\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \phi_3(x_2,t) = -2c_t\omega_{10}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}} \cos\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \\ \underline{\phi}_1(x_2,t) = \mp 2c_t\omega_{10}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}} \sin\left[\frac{\omega}{c_t}(x_2-c_t t)\right] \end{cases} \qquad (30.12)$$

Sachant que $mnc_t^2 = K_3$ dans le réseau cosmologique parfait pour $\tau_0 < \tau_{0cr}$, la densité volumique d'énergie de ce paquet d'onde est donnée par

$$e^{fluctuation} = \underbrace{2K_3\left(\omega_1^2+\omega_3^2\right)}_{e_{\omega}^{dist}} + \underbrace{\frac{1}{2}mn\left(\phi_1^2+\phi_3^2\right)}_{e^{cin}} = 4K_3\omega_{10}^2\, \mathrm{e}^{-2\frac{|x_1|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-2\frac{|x_3|}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-2\frac{|x_2-c_t t|}{\delta_2}} \qquad (30.13)$$

En effectuant le changement de variable $x_2 - c_t t = y$, on peut assez facilement calculer l'énergie totale de cette fluctuation du champ de rotation, qui vaut

$$E^{fluctuation} = 8\int_0^{\infty} dx_1 \int_0^{\infty} dx_3 \int_0^{\infty} dy \left(4K_3\omega_{10}^2\, \mathrm{e}^{-2\frac{x_1}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-2\frac{x_3}{\delta}}\, \mathrm{e}^{-2\frac{y}{\delta_2}} \right) = 4K_3\omega_{10}^2\delta^2\delta_2 \qquad (30.14)$$

30.2 – Quantification de l'énergie des fluctuations «électromagnétiques» et analogie avec les quasi-particules «photons»

Si on considère que le réseau cosmologique parfait est effectivement une représentation théorique de l'Univers réel, alors les paquets d'onde de rotation que nous venons de décrire doivent assurément correspondre aux photons. En supposant par conséquent que ces paquets d'onde sont émis lorsqu'une singularité topologique change subitement d'état (par exemple transition de niveau d'un électron dans un atome), il devient très simple d'expliquer qu'ils présentent une quantification de leur énergie. En effet, supposons une singularité qui passe d'un niveau d'énergie élevé *(a)* à un niveau d'énergie plus bas *(b)*. D'après la relation *(28.22)* exprimée dans le cas non-relativiste, on a alors la transition d'énergie suivante

$$\left(E_0^{dist}+V\right)^{(a)} = E_0^{dist}+V^{(a)} = \hbar\underline{\omega}_f^{(a)} \quad \rightarrow \quad \left(E_0^{dist}+V\right)^{(b)} = E_0^{dist}+V^{(b)} = \hbar\underline{\omega}_f^{(b)} \qquad (30.15)$$

avec

$$V^{(a)} > V^{(b)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}_f^{(a)} > \underline{\omega}_f^{(b)} \qquad (30.16)$$

Au cours de la transition, la singularité perd l'énergie suivante

$$\Delta E_{perdue} = E_0^{dist}+V^{(a)} - \left(E_0^{dist}+V^{(b)}\right) = V^{(a)} - V^{(b)} = \hbar\underline{\omega}_f^{(a)} - \hbar\underline{\omega}_f^{(b)} = \hbar\left(\underline{\omega}_f^{(a)} - \underline{\omega}_f^{(b)}\right) \qquad (30.17)$$

et cette énergie est dissipée sous la forme d'un photon, donc d'une fluctuation d'onde transversale transportant cette énergie perdue par la singularité, de sorte que

$$\boxed{E^{\,fluctuation} = 4K_3\omega_{10}^2\delta^2\delta_2 = \hbar\left(\underline{\omega}_f^{(a)} - \underline{\omega}_f^{(b)}\right) = \hbar\underline{\omega}_{\,fluctuation}} \qquad (30.18)$$

Cette relation est alors tout-à-fait remarquable, car elle montre que *l'énergie de la fluctuation transversale est quantifiée à la valeur* $\hbar\left(\underline{\omega}_f^{(a)} - \underline{\omega}_f^{(b)}\right)$, et que *la fréquence* $\underline{\omega}_{\,fluctuation}$ *de la fluctuation transversale émise n'est rien d'autre que la différence des fréquences des perturbations gravitationnelles de la singularité dans les états (a) et (b).* On retrouve par conséquent l'observation expérimentale que l'énergie des photons est quantifiée, comme l'a d'ailleurs proposé initialement Einstein, et que l'énergie d'un photon possède une valeur bien déterminée proportionnelle à sa pulsation $\underline{\omega}_{\,fluctuation}$ via la constante de Planck!

De la non-localité du paquet d'onde de rotation

Le paquet d'onde ainsi formé possède un *«volume»* $\delta^2\delta_2$, une amplitude ω_{10} et une énergie $E^{\,fluctuation} = \hbar\omega$. Comme son énergie est astreinte à rester constante, ceci implique que ni l'amplitude ω_{10}, ni le «volume» $\delta^2\delta_2$ sont prédéterminés, mais qu'ils sont simplement liés par la relation suivante

$$\omega_{10}^2 = \frac{E^{\,fluctuation}}{4K_3}\frac{1}{\delta^2\delta_2} = \frac{\hbar\omega}{4K_3}\frac{1}{\delta^2\delta_2} \qquad (30.19)$$

Le paquet d'onde présente ainsi une sorte de *«malléabilité»*, ou de *«plasticité»*: il peut par exemple s'allonger ou se rétrécir le long de son axe de propagation $\boldsymbol{O}x_2$, ou bien s'étendre ou se comprimer selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$ perpendiculaires à la direction de propagation, ou bien s'étendre ou se contracter de manière isotrope dans le réseau, moyennant que le produit $\omega_{10}^2\delta^2\delta_2$ reste une constante égale à $E^{\,fluctuation} / 4K_3 = \hbar\omega / 4K_3$.
Si le paquet d'onde est très ramassé sur lui-même, c'est-à-dire que son «volume» $\delta^2\delta_2$ est très petit et que son amplitude ω_{10} est très grande, il se comportera alors comme une *quasi-particule localisée d'énergie* $E^{\,fluctuation}$. Mais au cours de sa propagation, il peut aussi très bien s'étendre et occuper un «volume» $\delta^2\delta_2$ très important, avec une amplitude ω_{10} très faible, et se comporter en ce cas plutôt comme une onde, capable de tous les phénomènes d'interférence et de diffraction d'une onde usuelle. On retrouve ici la *propriété de non-localité* de la quasi-particule au cours de sa propagation, au même sens qu'en physique quantique.

De la quantité de mouvement de la quasi-particule «photon»

Sous forme de quasi-particule, c'est-à-dire lorsque le paquet d'onde est très contracté, donc de «volume» très faible, il ne possède évidemment pas de masse d'inertie, mais il possède par contre *une quantité de mouvement non nulle*. On déduit cette particularité du fait que ce paquet d'onde se déplace à la célérité c_t et donc qu'il doit satisfaire *l'équation relativiste de l'énergie (20.42)*, avec une masse d'inertie $M_0 = 0$, à savoir

$$\left(E_{\boldsymbol{v}}^{photon}\right)^2 = \left(\vec{\boldsymbol{P}}^{\,photon}\right)^2 c_t^2 \qquad (30.20)$$

ce qui implique une quantité de mouvement non nulle dans la direction de propagation $\boldsymbol{O}x_2$

$$\vec{P}^{\,photon} = \frac{E_{\nu}^{photon}}{c_t}\vec{e}_2 = \frac{\hbar\omega}{c_t}\vec{e}_2 \qquad (30.21)$$

De la dualité onde-corpuscule du paquet d'onde de rotation

Ces paquets d'onde possèdent en fait une *dualité onde-corpuscule* similaire à celle observée en physique quantique. La seule restriction imposée à ce paquet d'onde par le fait qu'il se propage dans un réseau cosmologique satisfaisant $\tau_0 < \tau_{0cr}$, c'est qu'il est astreint obligatoirement à rester *une seule entité*, d'énergie et d'hélicité données, afin que son énergie $\hbar\omega$ reste constante et qu'il n'apparaisse pas de perturbations d'expansion!
Ceci implique qu'un tel paquet d'onde, s'il est très étendu et qu'il doit par exemple traverser une fente, doit obligatoirement se contracter suffisamment pour traverser la fente sous forme d'une seule entité. Mais rien n'empêche qu'au cours de cette traversée, le côté ondulatoire de cette entité interagisse avec les bords de la fente de sorte que l'entité soit diffractée au cours de cette traversée, et donc que la «trajectoire» de la quasi-particule soit modifiée!
De même, si ce paquet d'onde étendu rencontre une double fente, il peut traverser les deux fentes en se contractant localement, et se recombiner après cette traversée, moyennant que son intégrité d'entité n'ait pas été modifiée au cours de cette traversée. Mais la recombinaison de l'entité ondulatoire après le passage des deux fentes est soumise aux interférences ondulatoires, de sorte que la probabilité de trouver la quasi-particule dans l'espace après les fentes présente des franges identiques à des franges d'interférence classiques pour une onde plane traversant deux fentes!
Ceci implique aussi que si le paquet d'onde, très étendu au cours de sa propagation, commence à être absorbé par un obstacle, le maintien d'une énergie constante dans le temps le force à se re-contracter de sorte à ce que l'absorption de son énergie soit un phénomène très localisé. On pourrait raisonnablement parler là de *la «matérialisation» du paquet d'onde sous la forme d'une «quasi-particule»*. Il doit donc se comporter comme une quasi-particule très localisée lors de sa création ou de son annihilation.
A noter que ce qu'on appelle le *«problème de la mesure»* en physique quantique correspond très exactement à ce type de phénomène. Toute tentative de «toucher» au paquet d'onde va obliger celui-ci à se modifier de telle sorte à ce qu'il reste une entité d'énergie indépendante du temps. Ainsi, une mesure sur ce paquet d'onde est forcément une action qui va perturber ce paquet d'onde et modifier ses caractéristiques.

De la création de paires de quasi-particules «photons»

Comme la quasi-particule «photon» possède une quantité de mouvement due à son comportement relativiste, la création d'un photon unique violerait la conservation de la quantité de mouvement. Ceci implique que les photons ne peuvent être créés que par paire de photons de même fréquence, se propageant dans deux directions opposées de sorte à ce que leur quantité de mouvement global soit nulle.

Du phénomène d'intrication de deux quasi-particules virtuelles «photons»

Initialement, lors de la création d'une paire de photons, il pourrait bien n'exister qu'un seul pa-

quet d'onde créé localement, auquel cas celui-ci doit s'allonger à la vitesse c_t de part et d'autre de l'axe de propagation des deux quasi-particules virtuelles afin d'assurer une quantité de mouvement globale nulle! On pourrait dire en ce cas que le paquet d'onde unique d'énergie $2\hbar\omega$ représentant les deux quasi-particules de quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{P}}^{photon} = \pm\left(\hbar\omega / c_t\right)\vec{e}_2$ correspond alors à *un état intriqué des deux quasi-particules virtuelles*. Mais si une des extrémités de ce paquet d'onde est brusquement «matérialisée» sous forme d'une quasi-particule (photon 1) transférant une énergie $E_{déposée} = \hbar\omega$ à un «objet» interagissant avec lui, la deuxième extrémité du paquet d'onde va se regrouper et possèdera l'énergie $E^{fluctuation} = \hbar\omega$ et la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{P}}^{photon} = \pm\left(\hbar\omega / c_t\right)\vec{e}_2$. Il se transformera donc obligatoirement en un paquet d'onde représentant le photon 2, qui peut être «matérialisé» sous forme d'une quasi-particule. Mais il faut noter que le paquet d'onde initial possédait, à l'instant de la «matérialisation» de la première quasi-particule, une polarisation et une hélicité qui ont pu être mesurée, et que cette polarisation et cette hélicité mesurées deviennent alors l'apanage du paquet d'onde résiduel. C'est exactement ce que la physique quantique prédit lorsqu'elle parle *d'intrication de deux photons*! Et il n'y a donc pas de «transmission» instantanée de l'information d'une quasi-particule (photon 1) à l'autre quasi-particule (photon 2) puisque c'est au cours de la «matérialisation» de la première quasi-particule (photon 1) que le paquet d'onde associé à la deuxième quasi-particule (photon 2) se forme et acquière obligatoirement les caractéristiques complémentaires à la première quasi-particule (photon 1), caractéristiques qui seront observée lors de la «matérialisation» de la deuxième quasi-particule (photon 2)!

Du phénomène de décohérence

Comme on vient de le dire, un paquet d'onde d'énergie $E^{fluctuation} = 2\hbar\omega$ représentant les deux photons créés initialement peut s'allonger selon un seul axe sur de grandes distances. Mais cet allongement se fait évidemment au détriment de l'amplitude ω_{10} du paquet d'onde. Au fur et à mesure de l'allongement du paquet d'onde, celui-ci deviendra de plus en plus sensible à son environnement, c'est-à-dire aux autres fluctuations de champs qu'il rencontre, jusqu'à ce qu'il rencontre une fluctuation suffisamment forte pour «casser» le paquet d'onde initial et le diviser en deux paquets d'onde indépendants, qui ne seront donc plus intriqués. Dès cet instant, les deux paquets d'onde deviennent indépendants. On peut alors parler d'un phénomène de *décohérence*, au sens que la «matérialisation» des deux paquets d'onde sous forme de deux photons individuels ne présentera plus l'effet d'intrication décrit à la section précédente. Ce phénomène est absolument similaire au phénomène de décohérence que la physique quantique invoque pour expliquer le passage du monde microscopique quantique au monde macroscopique classique!

De l'analogie avec les photons, les fluctuations quantiques du vide, les Multi-Univers et les gravitons

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont tout-à-fait intéressants, car ils signifient que le réseau cosmologique qui ne présente pas d'ondes longitudinales pour $\tau_0 < \tau_{0cr}$ peut contenir des perturbations localisées de pures ondes transversales de polarisation circulaire qui ont toutes les caractéristiques des *photons* (quantification, dualité ondes-corpuscules, intrication,

etc.). Au chapitre 31, on montrera qu'il pourrait aussi exister une superposition de fluctuations longitudinales locales d'expansion dont l'énergie peut être nulle, qui présentent une étonnante similitude avec ce qu'on appelle couramment les *fluctuations quantiques du vide* en physique quantique. On y évoquera aussi d'hypothétiques fluctuations corrélées d'expansion, dont l'énergie serait essentiellement cinétique, et qui pourraient représenter, à l'échelle macroscopique, des Multi-Univers en expansion-contraction, et à l'échelle microscopique, des perturbations quantifiées qui pourraient être assimilées à des *gravitons,* mais très différents des gravitons postulés en Relativité Générale.

Chapitre 31

Ingrédients d'une analogie avec le modèle standard des particules élémentaires

On a montré précédemment que le réseau cosmologique parfait présente des analogies fortes avec toutes les grandes théories de la physique moderne, à savoir les équations de l'électromagnétisme, la relativité restreinte, la relativité générale, les trous noirs, la cosmologie, l'énergie noire et la physique quantique, y compris la notion de spin et de moment magnétique, et qu'il peut exister trois types de boucles de singularités topologiques de base possédant respectivement les attributs d'une charge électrique, d'un moment dipolaire électrique ou d'une charge de courbure par flexion (qui est l'apanage exclusif de notre théorie du réseau cosmologique parfait, et qui explique assez simplement plusieurs phénomènes mystérieux à l'heure actuelle, comme la force faible de couplage de deux boucles topologiques, la masse noire, les trous noirs galactiques et la disparition de l'anti-matière).

Dans ce chapitre, on va s'attacher à trouver et décrire les ingrédients qui pourraient expliquer, sur la base des boucles de singularités topologiques de base, l'existence du modèle standard des particules élémentaires. Autrement dit, on va essayer de trouver quelles mécanismes pourraient générer les familles de particules fondamentales comme les leptons et les quarks, quelles pourraient être les origines de l'existence de trois générations de ces particules élémentaires, et d'où pourrait provenir la force forte à comportement asymptotique qui lie ensemble les quarks pour former des baryons et des mésons.

Ce chapitre n'a pas du tout la prétention de fournir une théorie élaborée ou une solution définitive et quantitative pour expliquer le modèle standard de la physique des particules, mais plutôt de montrer par quelques arguments spécifiques que c'est assurément le choix d'une *structure microscopique particulière du réseau cosmologique parfait* qui pourrait apporter une réponse aux diverses questions qui se posent concernant le modèle standard. Ce chapitre va donc apporter quelques éléments de réflexion en montrant qu'il peut apparaître dans un solide de structure bien choisie toute une «zoologie» de boucles de singularités topologiques qui peuvent posséder un étrange air de famille avec les particules élémentaires du modèle standard. Il permettra aussi de présenter des comportements très similaires au comportements des particules élémentaires, comme la présence d'une force forte asymptotique pouvant participer à un couplage entre des boucles topologiques!

31.1 – Les problèmes du modèle standard des particules élémentaires

A l'heure actuelle, la physique des particules explique la structure intime de la matière à l'aide d'un modèle appelé *modèle standard des particules élémentaires* (voir Annexe C). Ce modèle fait apparaître des *fermions,* des particules de matière qui présentent deux familles assez différentes, la famille des *leptons* et la famille des *quarks*, ainsi que trois types d'interactions qui peuvent intervenir entre ces fermions: l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte.
Les interactions entre les *fermions* de matière interviennent par l'échange de particules appelées *bosons de jauge*, correspondant aux quanta des champs quantiques d'interaction concernés. L'interaction électromagnétique fait appel au *photon* γ *,* l'interaction faible à trois bosons de jauge Z^0, W^+ et W^-, et l'interaction forte à 8 bosons de jauge appelés *gluons*.
Quant à la masse des particules, elle est introduite dans le modèle standard par une nouvelle interaction associée au champ quantique de Higgs, dont la particule médiatrice est appelée *boson de Higgs*.

Les problèmes du modèle standard qui possèdent déjà des solutions dans la théorie du réseau cosmologique parfait

Le modèle standard des particules, malgré ses succès indéniables, laisse de nombreuses questions non résolues. Dans ce chapitre, on va essayer de voir si une approche du modèle standard par notre théorie du réseau cosmologique parfait peut apporter une réponse à ces diverses questions. Il ne s'agira pas ici de donner une réponse complète et quantitative à tous ces problèmes, mais d'esquisser, de façon très qualitative, autrement dit avec les mains, comment le réseau cosmologique pourrait fournir une solution à ces problèmes. Certains des problèmes soulevés par le modèle standard possèdent d'ailleurs déjà une esquisse de solution explicitée dans les chapitres précédents.
Faisons donc un tour des problèmes posés par le modèle standard qui possèdent déjà une explication dans la théorie du réseau cosmologique et expliquons comment le réseau cosmologique apportent des réponse, au moins partielles, à ces divers problèmes:

- l'absence de l'interaction gravitationnelle dans le modèle standard

L'interaction gravitationnelle fait directement partie des résultats obtenus avec le réseau cosmologique, comme solution statique de la deuxième équation partielle de Newton, et c'est d'ailleurs cette même équation sous sa forme dynamique qui a permis d'introduire et de donner une explication simple de la physique quantique et de la notion de spin des singularités topologiques en boucle.

- la nécessité du boson de Higgs et l'impossibilité de calculer les masses des divers fermions et bosons dans le modèle standard

Dans le modèle standard de base, les fermions n'ont pas de masse, et les théoriciens ont dû introduire un mécanisme ad-hoc, l'interaction avec le champ de Higgs via le boson de Higgs, qui fournit la masse d'inertie aux particules élémentaires. Cependant, dans le modèle standard, il n'est pas possible d'obtenir des valeurs quantitatives des masses d'inertie des particules, qui doivent donc être «calées» sur les valeurs obtenues expérimentalement. La théorie du réseau

cosmologique contient en fait un mécanisme assez analogue au champ de Higgs: c'est le champ des masses d'inertie des «corpuscules» du réseau (qui sont donc une sorte d'analogues des bosons de Higgs de spin 0) ainsi que l'énergie élastique de distorsion du réseau qui sont responsables ensemble des propriétés relativistes d'inertie des singularités topologiques, et qui permettent un calcul quantitatif des masses d'inertie des singularités topologiques, sans devoir «caler» ces valeurs sur des résultats expérimentaux.

- la nature physique de l'interaction électromagnétique dans le modèle standard

L'interaction électromagnétique, ainsi que son boson vecteur, le photon, avec ses diverses propriétés quantiques, font partie intégrante de la théorie du réseau cosmologique, et y ont une explication physique simple et bien définie sur la base du champ de rotation au sein du réseau cosmologique.

- la nature physique de l'interaction faible dans le modèle standard

Une interaction faible présentant une analogie avec l'interaction faible du modèle standard a été obtenue dans la théorie du réseau cosmologique (chapitre 26), sous la forme d'une force de liaison à très courte portée liant des «fermions topologiques» entre eux (les boucles de désinclinaison vis aux boucles de dislocation coin), via un couplage de leurs charges de rotation et de courbure.

*- la violation de l'invariance **CP** (charge/parité) dans le modèle standard*

Dans l'univers actuel, on observe une violation de l'invariance ***CP*** (charge/parité) que les théoriciens estiment être la cause probable de l'asymétrie matière/anti-matière et du déséquilibre matière/anti-matière dans l'univers actuel. Dans la théorie du réseau cosmologique, cette faible asymétrie entre matière et anti-matière existe bien, et s'explique parfaitement par l'existence de la charge de courbure par flexion des boucles de dislocation coin, charge qui n'a absolument pas d'équivalent dans le modèle standard des particules. Ce même phénomène est d'ailleurs aussi à l'origine de l'explication de la fameuse *masse noire* des astrophysiciens et de la disparition de l'anti-matière au cours de l'évolution cosmologique de l'univers.

- l'absence d'explication de l'énergie noire et de la masse noire dans le modèle standard

Ces deux concepts inventés par les théoriciens pour apporter des explications à l'accélération de l'expansion cosmologique et au comportement gravitationnel des galaxies possèdent les deux une explication dans la théorie du réseau cosmologique: l'énergie de distorsion élastique en ce qui concerne l'énergie noire et la force gravitationnelle répulsive des neutrinos en ce qui concerne la masse noire.

Les problèmes du modèle standard qui n'ont pas encore d'explications dans la théorie du réseau cosmologique parfait

Parmi les problèmes du modèle standard des particules élémentaires, il en est quelques-uns pour lesquels il n'est pas encore apparu d'explications plausibles dans la théorie du réseau cosmologique. Il s'agit entre autre de:

- l'existence de fermions sous la forme de trois générations de leptons et de quarks

Si les fermions correspondent à des singularités topologiques dans la théorie du réseau cosmologique, l'existence de fermions sous la forme de leptons et de quarks, ainsi que l'existence de

trois générations de ces fermions, devraient vraisemblablement trouver une explication par un choix judicieux de la structure du réseau cosmologique et de la constitution des particules élémentaires comme des singularités topologiques sous la forme de boucles de dispiration, assemblages judicieux de boucles de désinclinaison vis, de boucles de désinclinaison coin, de boucles de dislocation coin et de boucles de dislocation mixte.

- l'existence de trois bosons de jauge massifs dans l'interaction faible

L'interaction faible étant déjà apparu dans notre théorie comme la force liant les boucles de désinclinaison vis aux boucles de dislocation coin, il reste à trouver ce que sont les bosons de jauge massifs, vecteurs de cette interaction, dans la théorie du réseau cosmologique.

- l'existence d'une interaction forte liant les quarks par un mécanisme de confinement

L'interaction forte, avec son mécanisme de confinement et ses bosons vecteurs, les gluons, est la seule interaction qui n'est pas encore apparue dans le cadre de la théorie du réseau cosmologique. Mais on a déjà rencontré des mécanismes qui pourraient être des candidats potentiels très intéressants pour expliquer cette force et son comportement asymptotique, comme par exemple les mécanismes générateurs d'une énergie de faute au sein du réseau, telle que la dissociation d'une dislocation par exemple.

- l'existence de charges électriques quantifiées, de valeurs relatives 1, 1/3 et 2/3

Les charges électriques des fermions possèdent des valeurs relatives 1, 1/3 et 2/3 entre la charge des électrons et les charges des quarks. Ces valeurs quantifiées n'ont absolument aucune explication dans le modèle standard, mais il y a fort à parier que le choix d'une structure particulière du réseau cosmologique pourrait apporter une explication à ce problème.

Dans la suite de ce chapitre, on va essayer de trouver des réponses et des explications à ces interrogations du modèle standard, en jouant exclusivement sur la structure du réseau cosmologique et sur les propriétés des singularités topologiques qu'il peut contenir. Dans le modèle standard, 26 paramètres différents sont requis (dans le cas où les neutrinos sont massifs) pour obtenir une théorie fonctionnelle, telles que les masses des particules et les intensités des diverses forces, et ces paramètres doivent obligatoirement être «calés» sur les valeurs des résultats expérimentaux. Il y a fort à parier que le modèle du réseau cosmologique puisse permettre de réduire fortement le nombre des paramètres à ajuster, simplement par le fait qu'il peut apporter de nouvelles explications physiques à des phénomènes qui n'en ont pas dans le modèle standard!

31.2 – Un réseau cubique «coloré» pour expliquer la première famille de quarks et de leptons du modèle standard

Dans le réseau cosmologique parfait, nous avons vu que la singularité topologique la plus simple pour expliquer la charge électrique est la boucle de désinclinaison vis. Comme on l'a vu au chapitre 24, pour que l'interaction gravitationnelle des boucles de désinclinaison vis satisfasse des comportements similaires aux comportements expérimentalement observés (dilatation du temps, courbure des rayons d'onde), il suffit que les coefficients α_{BV} et β_{BV} dans les expressions $R_{BV} = R_{BV0}\,\mathrm{e}^{\alpha_{BV}\tau}$ et $\boldsymbol{\Omega}_{BV} = \boldsymbol{\Omega}_{BV0}\,\mathrm{e}^{\beta_{BV}\tau}$ donnant la dépendance du rayon et de l'angle de torsion de la boucle de désinclinaison vis en fonction de l'expansion de fond du ré-

seau satisfassent la relation $3\alpha_{BV} + 2\beta_{BV} = 1/8$. Ceci implique que l'angle de torsion Ω_{BV} pourrait

(i) soit être une constante indépendante de l'expansion, auquel cas $\alpha_{BV} = 1/24$ et $\beta_{BV} = cste$, ce qui permet l'existence d'une raison topologique pour l'explication de l'existence de valeurs discrètes et indépendantes de l'expansion pour l'angle Ω_{BV},

(ii) soit dépendre en fait de l'expansion volumique, auquel cas Ω_{BV} ne peut pas prendre une valeur discrète qui soit directement liée à la structure du réseau puisque cet angle dépendrait alors de manière continue de l'expansion volumique.

Ainsi, pour qu'il apparaisse des charges quantifiées comme la charge de l'électron, mais aussi des charges fractionnaires de 1/3 et 2/3 de la charge de l'électron comme c'est le cas des quarks du modèle standard, il faudrait que les boucles de désinclinaison vis soient obtenues par une rotation des deux plans intérieurs à la boucle d'un angle *correspondant à la symétrie du réseau*, par exemple $\pi/2$, π, $3\pi/2$, ... dans le cas d'une réseau cubique, ou bien $\pi/3$, $2\pi/3$, π, ... dans le cas d'un réseau hexagonal.
Nous choisirons par conséquent l'hypothèse suivante pour essayer de trouver un réseau cosmologique qui pourrait expliquer le modèle standard des particules élémentaires

Conjecture 12: l'angle Ω_{BV} prend des valeurs discrètes liées à la symétrie du réseau et indépendantes de l'expansion volumique $(\beta_{BV} = cste)$ *(31.1)*

Un réseau cubique «coloré» avec des règles d'empilement et de rotation particulières

Imaginons *à priori* un réseau cubique simple assez particulier (fig. 31.1), de pas de réseau a, qui serait constitué de *«plans colorés de corpuscules»* avec une alternance de trois couleurs fondamentales ***R***, ***V***, ***B*** (ces «couleurs» imaginaires ne sont choisies que par commodité et n'ont *pour l'instant* aucun rapport avec les «couleurs» utilisées dans le modèle standard pour expliquer la charge de couleur des quarks et gluons). Même si on ne connaît pas la raison physique de l'existence de ces «plans colorés», on peut supposer que cette alternance de couleurs des plans corpusculaires puisse être une condition d'existence d'un réseau cosmologique parfait en l'absence de singularités topologiques, et que, si l'alternance ***R***, ***V***, ***B*** des plans du réseau est rompue par la présence d'une singularité topologique, il puisse apparaître des énergies de faute si un plan «corpusculaire» ne suit pas l'arrangement ***R***, ***V***, ***B***. Postulons alors *à priori* des règles d'empilement et de rotation des plans colorés dans ce réseau très particulier:

Conjecture 13: l'empilement des plans ***R***, ***V***, ***B*** suit trois règles élémentaires: *(31.2)*

Règle 1: l'alternance des plans ***R***, ***V***, ***B*** <u>*ne peut pas être rompue*</u> (soit par impossibilité, soit par pénalité d'une énergie surfacique de faute γ_1 extrêmement élevée),

Règle 2: dans une direction donnée de l'espace, il peut apparaître un décalage de la succession des plans ***R***, ***V***, ***B*** selon un plan de faute d'empilement, et ce décalage possède <u>*une énergie surfacique de faute*</u> γ_0 <u>*non nulle*</u> (fig. 31.1, image 4).

Règle 3: si un plan de couleur donnée subit une rotation d'un angle $\pm\pi/2$, $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi/2$, <u>*il change de couleur*</u> selon le tableau 31.1, ce qui correspond à l'existence d'une certaine propriété axiale des plans du réseau.

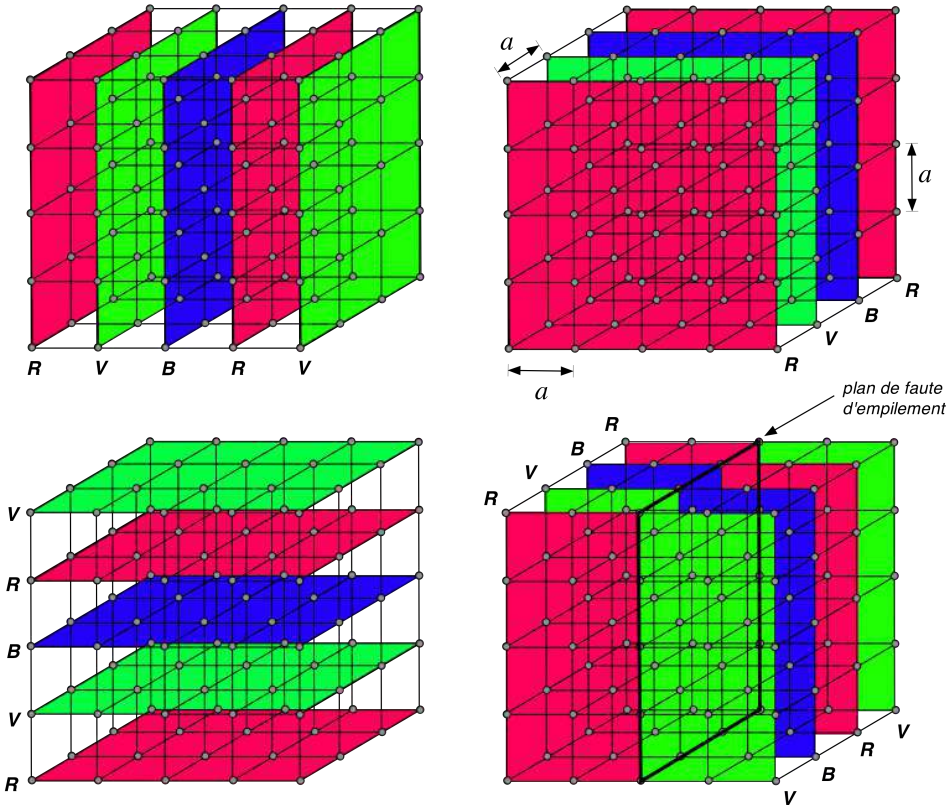


Figure 31.1 - *un réseau cosmologique imaginaire parfait, cubique et isotrope, avec des plans **RVB** présentant un empilement régulier dans les trois directions de l'espace, ainsi qu'une faute d'empilement des plans colorés présentant une énergie surfacique de faute.*

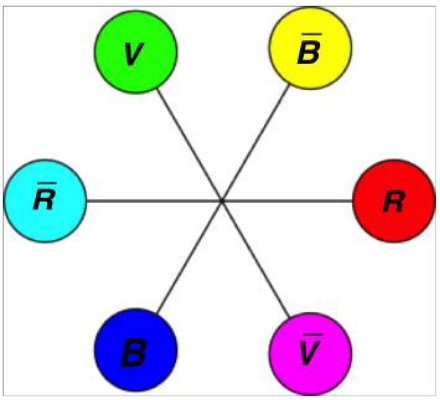
angle de rotation Ω_{BV}	***changement de couleur***	***couleurs R, V, B et anti-couleurs*** $\bar{R}$, $\bar{V}$, $\bar{B}$
$\begin{cases} +3\pi/2 \\ 0 \\ -3\pi/2 \end{cases}$	$\begin{cases} R \to R \\ V \to V \\ B \to B \end{cases}$	
$\begin{cases} +\pi/2 \\ \\ -\pi \end{cases}$	$\begin{cases} R \to V \\ V \to B \\ B \to R \end{cases}$	
$\begin{cases} -\pi/2 \\ \\ +\pi \end{cases}$	$\begin{cases} R \to B \\ V \to R \\ B \to V \end{cases}$	

Tableau 31.1 - *les changements de couleur d'un plan par rotation, et les couleurs complémentaires de rouge, vert, bleu, à savoir cyan, magenta et jaune.*

De la nécessité de combiner une boucle de désinclinaison vis avec une boucle de dislocation coin dans un tel réseau et de l'existence des quarks

On peut introduire une boucle de désinclinaison vis dans notre réseau particulier (représentée symboliquement dans la figure 31.2, h) avec un angle de rotation du plan inférieur de $\pm\pi/2$ ou $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi/2$. Mais d'après la règle 3, une rotation de $\pm\pi/2$ ou $\pm\pi$ induite sur tous les plans inférieures à la boucle va changer leur couleur, avec, d'après la règle 2, la génération d'un cylindre de fautes d'empilement présentant l'énergie surfacique de faute γ_0, comme représenté schématiquement dans les figures 31.2, a à d.

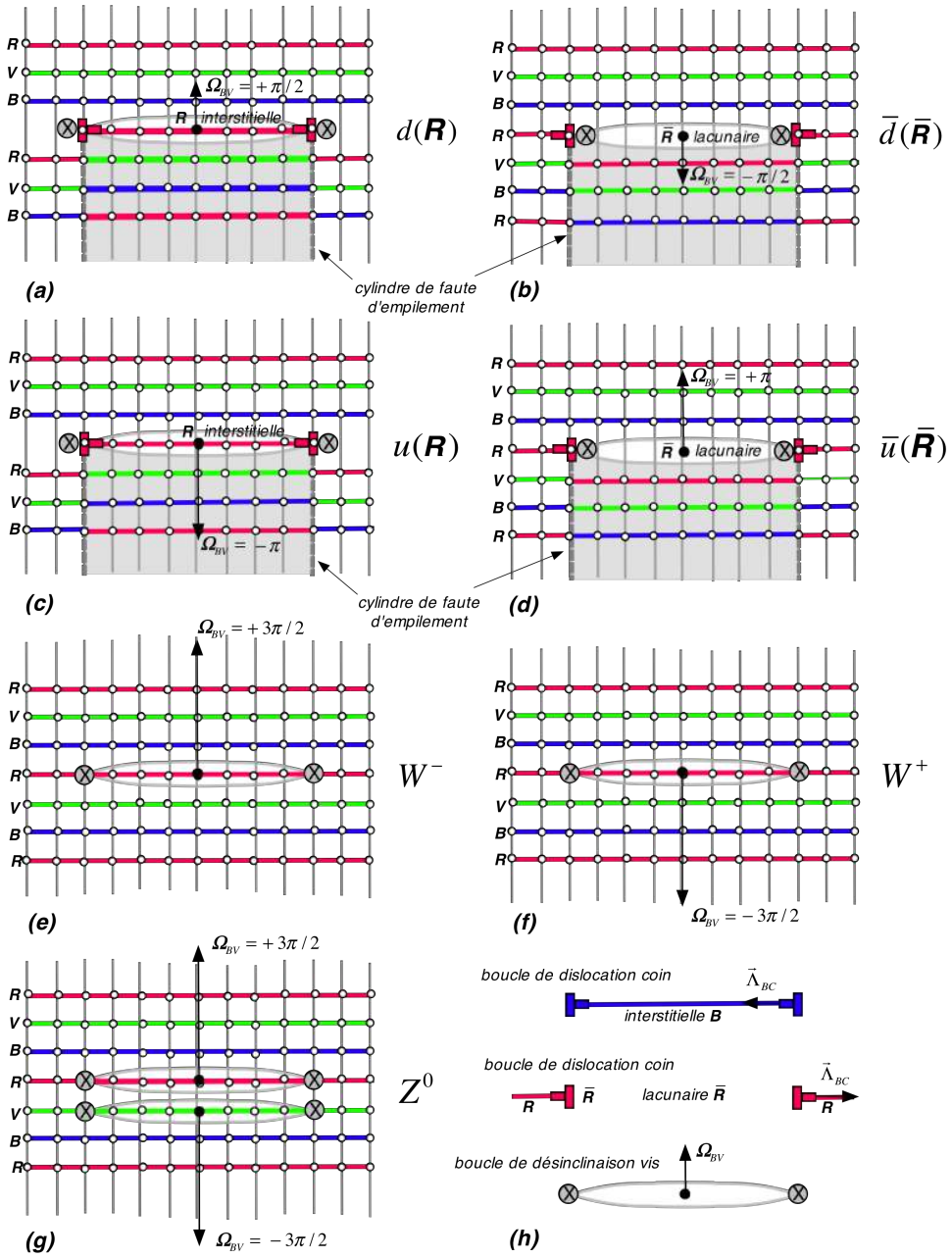


Figure 31.2 *- les combinaisons de boucles de désinclinaison vis d'angles $\pm\pi/2$, $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi/2$ avec des boucles de dislocation coin qui assurent la continuité de succession des plans* ***RVB.***

Le changement de couleur des plans inférieurs dans le cas des rotations de $\pm\pi/2$ ou $\pm\pi$ implique aussi que la règle 1 est violée au niveau de la boucle de désinclinaison vis, et que, pour satisfaire l'empilement des plans colorés, il faut nécessairement associer à la boucle de désinclinaison vis une boucle de dislocation coin (représentée symboliquement dans la figure 31.2, h), de type interstitiel si l'angle de rotation vaut $+\pi/2$ ou $-\pi$ (fig. 31.2, a et c), ou de type lacunaire si l'angle de rotation vaut $-\pi/2$ ou $+\pi$ (fig. 31.2, b et d).
Le plan intercalaire dans le cas de la boucle coin interstitielle possède une des trois couleurs ***R***, ***V***, ***B,*** alors que le plan manquant dans le cas de la boucle coin lacunaire possède l'anti-couleur de la couleur du plan interrompu, à savoir une des couleurs $\bar{\boldsymbol{R}}$, $\bar{\boldsymbol{V}}$ ou $\bar{\boldsymbol{B}}$ (on utilise alors dans les figures les couleurs complémentaires de ***R***, ***V***, ***B,*** qui sont les couleurs *cyan, magenta et jaune*, voir tableau 31.1). Dans les quatre cas (fig. 31.2, a à d), la boucle de désinclinaison vis est évidemment liée à la boucle de dislocation coin par la *force faible* décrite à la section 25.3, mais aussi par la nécessité d'introduire la boucle coin pour assurer la succession des couleurs des plans au niveau de la boucle de désinclinaison vis!
Les dispirations ainsi formées possèdent une «couleur», qui correspond à la couleur du plan de la boucle interstitielle ou à l'anti-couleur du plan lacunaire (l'anti-couleur ou couleur complémentaire de la couleur du plan corpusculaire dans lequel apparaît la boucle lacunaire).
Quant aux boucles de désinclinaison d'angle $\pm 3\pi/2$ (fig. 31.2, e à g), elles n'ont pas besoin d'être combinées avec des boucles coin puisque ces rotations n'entraînent aucun changement de couleur dans les plans inférieurs, et par conséquent aussi aucun cylindre de fautes d'empilement en-dessous de la boucle.

nom	$\boldsymbol{\Omega}_{BV}$	$\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$	***boucle coin***	$\boldsymbol{q}_{\theta BC}$	***couleur***
d	$+\pi/2$	$-\pi^2 R_{BV}^2/2$	*interstitielle*	$-2\pi a$	***R***, ***V*** ou ***B***
u	$-\pi$	$+\pi^2 R_{BV}^2$	*interstitielle*	$-2\pi a$	***R***, ***V*** ou ***B***
$\bar{d}$	$-\pi/2$	$+\pi^2 R_{BV}^2/2$	*lacunaire*	$+2\pi a$	$\bar{\boldsymbol{R}}$, $\bar{\boldsymbol{V}}$ ou $\bar{\boldsymbol{B}}$
$\bar{u}$	$+\pi$	$-\pi^2 R_{BV}^2$	*lacunaire*	$+2\pi a$	$\bar{\boldsymbol{R}}$, $\bar{\boldsymbol{V}}$ ou $\bar{\boldsymbol{B}}$
W^-	$+3\pi/2$	$-3\pi^2 R_{BV}^2$	-	0	-
W^+	$-3\pi/2$	$+3\pi^2 R_{BV}^2$	-	0	-
Z^0	$(+3\pi/2)+(-3\pi/2)$	0	-	0	-

Tableau 31.2 - *les sept singularités composées d'une boucle de désinclinaison vis combinées ou non avec des boucles de dislocation coin interstitielles ou lacunaires*

De l'existence des bosons de jauge intermédiaires

Dans le tableau 31.2, on a reporté les propriétés des différentes singularités topologiques ainsi formées, en leur donnant, comme dans la figure 31.2, un nom choisi *«par hasard»*, et en utilisant le fait que les deux dispirations de droite (a et c) dans la figure 31.2 sont clairement les anti-boucles des boucles de gauche (b et d).

Dans le tableau 31.2, on constate alors que les charges $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ de rotation, analogues à la charge électrique, présentent trois valeurs différentes, correspondant respectivement à 1/3x, 2/3x et 1x la charge des boucles W^- ou W^+. D'autre part, seules les dispirations d, u, $\overline{d}$ et $\overline{u}$ présentent une charge $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ de courbure par flexion non nulle, et le signe de ces charges, positif dans le cas de la boucle coin lacunaire et négatif dans le cas de la boucle coin interstitielle, implique comme on l'a déjà postulé avec la conjecture 8, que les particules d et u correspondent par analogie à de la matière et que leurs anti-particules $\overline{d}$ et $\overline{u}$ correspondent à de l'anti-matière. Quant aux particules W^-, W^+ et Z^0 qui ne possèdent pas de charge de courbure $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$, elles doivent assurément présenter une masse importante puisque ce sont des boucles de désinclinaison vis avec un angle de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ très élevé.

De l'interaction faible entre quarks via les bosons intermédiaires

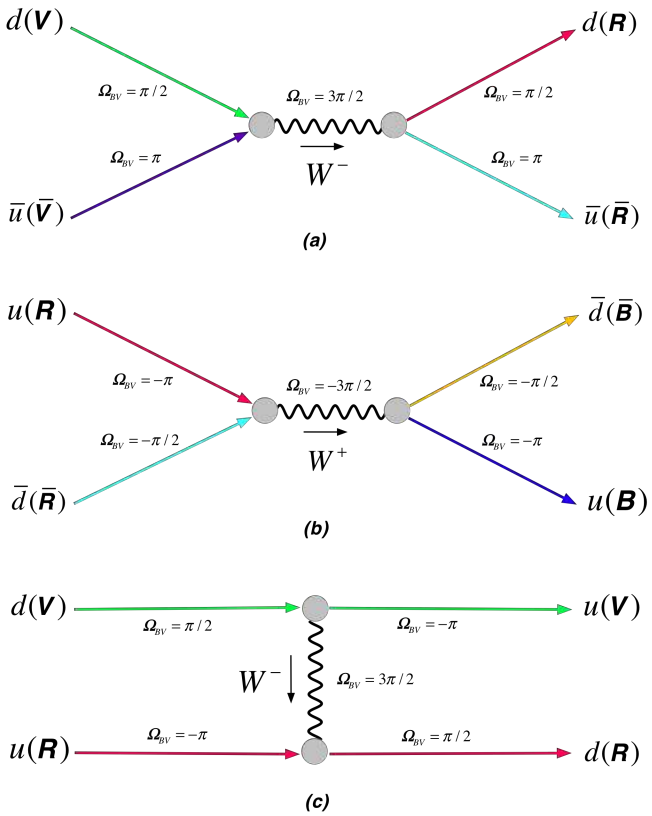


Figure 31.3 - *diagrammes de Feynman de mécanismes de combinaisons et d'échanges de bosons intermédiaires entre les quarks du tableau 31.2*

Il est intéressant de remarquer ici que la combinaison de deux dispirations d et $\overline{u}$, ou $\overline{d}$ et u contribue à créer une boucle de désinclinaison vis pure W^- ou W^+, qui peut à nouveau

se transformer en paire d et $\overline{u}$, ou $\overline{d}$ et u . On peut aussi imaginer un échange d'une boucle W^- ou W^+ entre deux dispirations d et $\overline{u}$, ou $\overline{d}$ et u , ce qui va changer leur nature, ou pour parler de façon plus imagée ou poétique, leur «goût» ou leur «saveur».
Ces combinaison et ces échanges sont illustrés dans la figure 31.3 sous forme de *diagrammes de Feynman*. Ils sont caractérisés par le fait que la rotation totale $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ est conservée, ce qui assure en même temps la conservation de la charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$. On constate aussi que la charge totale $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ est conservée elle aussi dans ces réactions. Il est alors indéniable que ces réactions ont une étrange similitude avec les interactions faibles du modèle standard reportées dans le tableau C.3!

De l'existence de «baryons» et de «mésons» localisés, formés de 3 et 2 dispirations

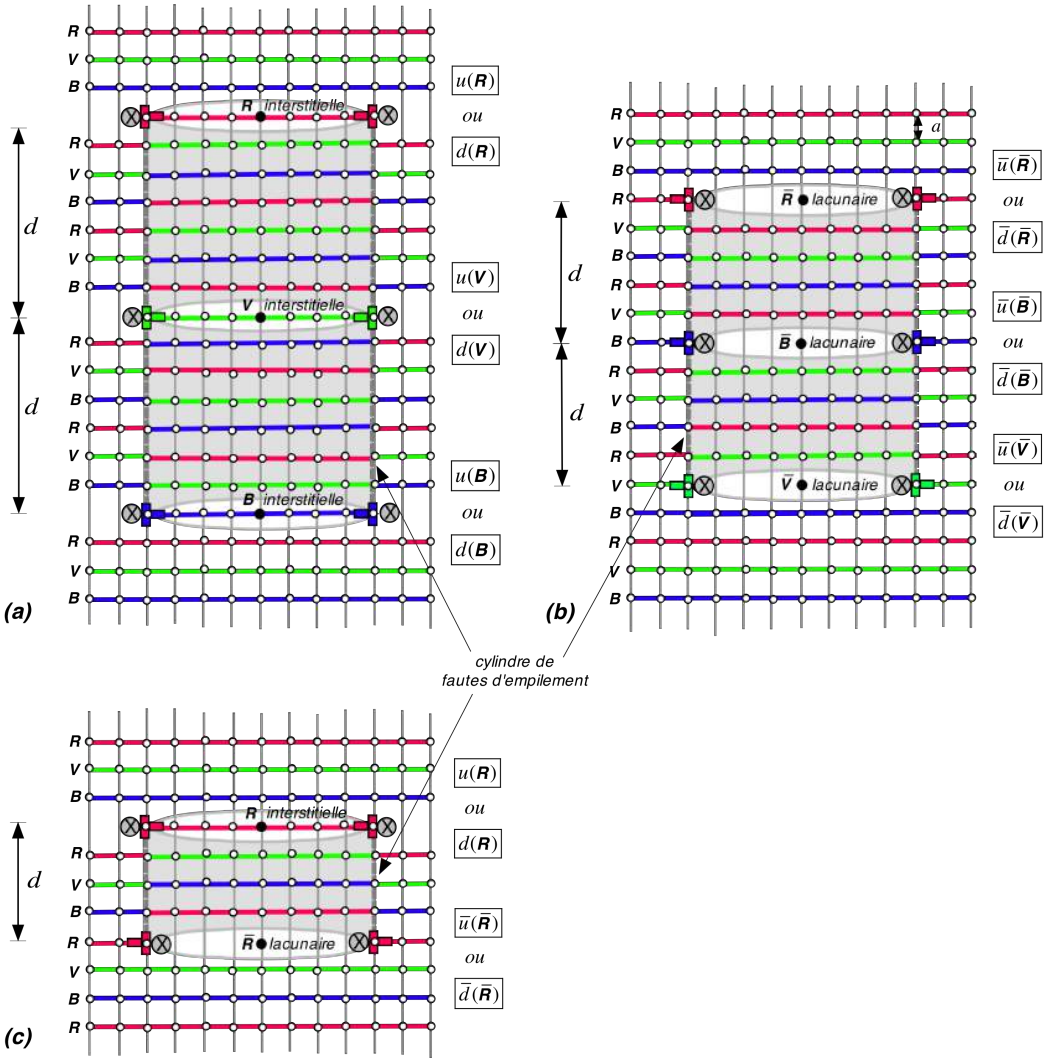


Figure 31.4 - *les trois possibilités de combinaisons de 2 ou 3 dispirations permettant de former des singularités topologiques parfaitement localisées*

Chacune des dispirations (a à d) du tableau 31.2 génère un cylindre de faute d'empilement qui possède une énergie proportionnelle à la surface latérale du cylindre (fig. 31.2). Par consé-

quent, il est impossible que ces dispirations apparaissent de manière isolée, car le cylindre de faute d'empilement serait alors de longueur $\sim R_\infty$, et par conséquent d'énergie gigantesque! On peut alors se demander comment générer des singularités composées de telles dispirations, et qui soient d'énergie raisonnable!

En fait, il existe trois façons de combiner les quatre dispirations du tableau 31.2 pour que la singularité topologique ainsi formée soit parfaitement localisée, à savoir que le tube de faute d'empilement soit de longueur finie:

- *la combinaison de trois singularités* u *ou* d (fig.31.4,a),
- *la combinaison de trois anti-singularités* $\overline{u}$ *ou* $\overline{d}$ (fig.31.4,b),
- *la combinaison d'une singularité* u *ou* d *avec une anti-singularité* $\overline{u}$ *ou* $\overline{d}$ (fig.31.4,c).

Pour que les trois règles émises précédemment soient toutes parfaitement satisfaites dans ces diverses combinaisons, il faut que:

- *la somme des angles* $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ *de rotation de toutes les dispirations de la combinaison soit nulle ou un multiple de* $3\pi/2$, ce qui permet au tube de faute d'empilement d'être de longueur finie,
- *que la couleur de l'assemblage ainsi formé soit «blanche»*, donc que l'assemblage présente la somme des 3 couleurs ***R***, ***V***, ***B*** (fig.31.3,a), ou la somme des 3 anti-couleurs $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\overline{\boldsymbol{V}}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$ (fig. 31.3,b), ou la somme d'une des couleurs ***R***, ***V***, ***B*** avec son anti-couleur respective $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\overline{\boldsymbol{V}}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$ (fig. 31.3,c).

combinaison	***symbole***	$\boldsymbol{\Omega}_{BV}$	$\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$	***boucle coin***	$\boldsymbol{q}_{\theta BC}$
$d\,d\,d$	Δ^-	$+3\pi/2$	$-3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*interstitielle*	$-6\pi a$
$d\,u\,d$	n,Δ^0	0	0	*interstitielle*	$-6\pi a$
$u\,d\,u$	p,Δ^+	$-3\pi/2$	$+3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*interstitielle*	$-6\pi a$
$u\,u\,u$	Δ^{++}	-3π	$+3\pi^2 R_{BV}^2$	*interstitielle*	$-6\pi a$
$\overline{d}\,\overline{d}\,\overline{d}$	$\overline{\Delta}^+$	$-3\pi/2$	$+3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*lacunaire*	$6\pi a$
$\overline{d}\,\overline{u}\,\overline{d}$	$\overline{n},\overline{\Delta}^0$	0	0	*lacunaire*	$6\pi a$
$\overline{u}\,\overline{d}\,\overline{u}$	$\overline{p},\overline{\Delta}^-$	$+3\pi/2$	$-3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*lacunaire*	$6\pi a$
$\overline{u}\,\overline{u}\,\overline{u}$	$\overline{\Delta}^{--}$	$+3\pi$	$-3\pi^2 R_{BV}^2$	*lacunaire*	$6\pi a$

Tableau 31.3 - *les baryons de couleur «blanche» formés de 3 dispirations*

Dans le tableau 31.3, on a reporté les 8 différentes combinaisons possibles de 3 dispirations du tableau 31.2, avec leur propriété, en leur donnant un symbole et en les appelant des *baryons*,

par analogie avec le modèle standard.

Dans ce tableau, l'analogie avec les baryons du modèle standard des particules élémentaires, composés de triplets de *quarks* u et d ou de triplets d'anti-quarks $\overline{u}$ et $\overline{d}$, est flagrante et parfaite! Non seulement on y voit apparaître des particules composées de *quarks* avec des charges de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ fractionnaires correspondant aux charges électriques du modèle standard, mais il s'ajoute ici la charge de courbure par flexion $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ qui n'a pas d'équivalent dans le modèle standard, et qui correspond parfaitement avec notre conjecture 8 (22.91), à savoir que *les singularités de nature lacunaire correspondent par analogie à de l'anti-matière et les singularités de nature interstitielle à de la matière!* Le fait que les particules du modèle standard apparaissent avec deux symboles différents dans ce tableau pour les combinaisons $d\,u\,d$, $u\,d\,u$, $\overline{d}\,\overline{u}\,\overline{d}$ et $\overline{u}\,\overline{d}\,\overline{u}$ s'explique par la notion de spin des boucles de désinclinaison vis, développée au chapitre 29. En effet, si chaque quark possède un spin $\pm 1/2$, alors la composition des spins peut créer un spin globale de $\pm 1/2$ dans le cas des particules n *(neutron)* et p *(proton)* et des anti-particules $\overline{n}$ *(anti-neutron)* et $\overline{p}$ *(anti-proton)*, ou bien un spin $\pm 3/2$ dans le cas des particules Δ^0 et Δ^+ et des anti-particules $\overline{\Delta}^0$ et $\overline{\Delta}^-$. Dans le cas des combinaisons $d\,d\,d$, $u\,u\,u$, $\overline{d}\,\overline{d}\,\overline{d}$ et $\overline{u}\,\overline{u}\,\overline{u}$, les spins des 3 quarks sont obligatoirement alignés (pour une raison qui reste encore à expliquer, mais qui est fort probablement liée avec le principe d'exclusion!) et la composition des spins ne peut alors fournir qu'un spin global de $\pm 3/2$ dans le cas des particules Δ^- et Δ^{++} et des anti-particules $\overline{\Delta}^+$ et $\overline{\Delta}^{--}$.

Dans le tableau 31.4, on a reporté les différentes combinaisons possibles de 2 dispirations du tableau 31.2, avec leur propriété, en leur donnant un symbole et en les appelant des *mésons*, par analogie avec le modèle standard.

combinaison	***symbole***	$\boldsymbol{\Omega}_{BV}$	$\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$	***boucle coin***	$\boldsymbol{q}_{\theta BC}$
$d\,\overline{d}$	π^0, ρ^0	0	0	-	0
$d\,\overline{u}$	π^-, ρ^-	$+3\pi/2$	$-3\pi^2 R_{BV}^2/2$	-	0
$\overline{d}\,u$	π^+, ρ^+	$-3\pi/2$	$+3\pi^2 R_{BV}^2/2$	-	0
$u\,\overline{u}$	η^0, ω^0	0	0	-	0

Tableau 31.4 - *les mésons de couleur «blanche» formés de 2 dispirations*

Dans ce tableau, l'analogie avec les mésons du modèle standard des particules élémentaires, composés de doublet de *quarks* u ou d avec des anti-quarks $\overline{u}$ ou $\overline{d}$, est flagrante et parfaite! On y voit apparaître des particules composées de *quarks* (avec des charges de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$ fractionnaires) qui correspondent aux mésons du modèle standard, mais avec une charge de courbure par flexion $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$ nulle, ce qui signifie que ces singularités topologiques ne peuvent pas être cataloguées comme de l'anti-matière (singularités de nature lacunaire) ou de la matière (singularités de nature interstitielle)!

Le fait que les particules du modèle standard apparaissent avec deux symboles différents dans ce tableau s'explique aussi par la notion de spin des boucles de désinclinaison vis, développée au chapitre 29. En effet, si chaque quark possède un spin $\pm 1/2$, alors la composition des spins peut créer un spin globale de 0 dans le cas des particules π^0, π^-, π^+ et η^0, ou bien un spin ± 1 dans le cas des particules ρ^0, ρ^-, ρ^+ et ω^0.

De la force forte et de son comportement asymtotique

Les quarks composant les particules des tableaux 31.3 et 31.4 sont liés par le cylindre de fautes d'empilement, de sorte que l'énergie de la singularité topologique augmente comme $E_\gamma \sim \gamma_0 2\pi R_{BV} d$ si la distance d séparant deux dispirations augmente. La force de liaison des dispirations est donc *«de nature asymptotique»*: c'est une *force forte* en ce sens que *la force de liaison augmente si on tente de séparer les dispirations*. C'est un phénomène similaire au cas de l'énergie de faute d'empilement entre deux dislocations partielles dans un réseau *CFC* (voir fig. 9.9), ou au cas de l'énergie de faute de raccordement entre trois dislocations partielles dans un réseau cubique axial (voir fig. 9.33). La distance d'équilibre d entre les dispirations est alors contrôlée par un mécanisme de compétition similaire à ceux décrits dans le cas des figures 9.9 et 9.33.

De l'interaction forte entre quarks via des bosons de jauge: les gluons

Dans le modèle standard, le traitement quantique des «couleurs» des quarks est assuré par la *chromodynamique quantique*. Dans cette théorie, il existe 8 bosons de jauge colorés, vecteurs de la force forte, appelés *gluons.*

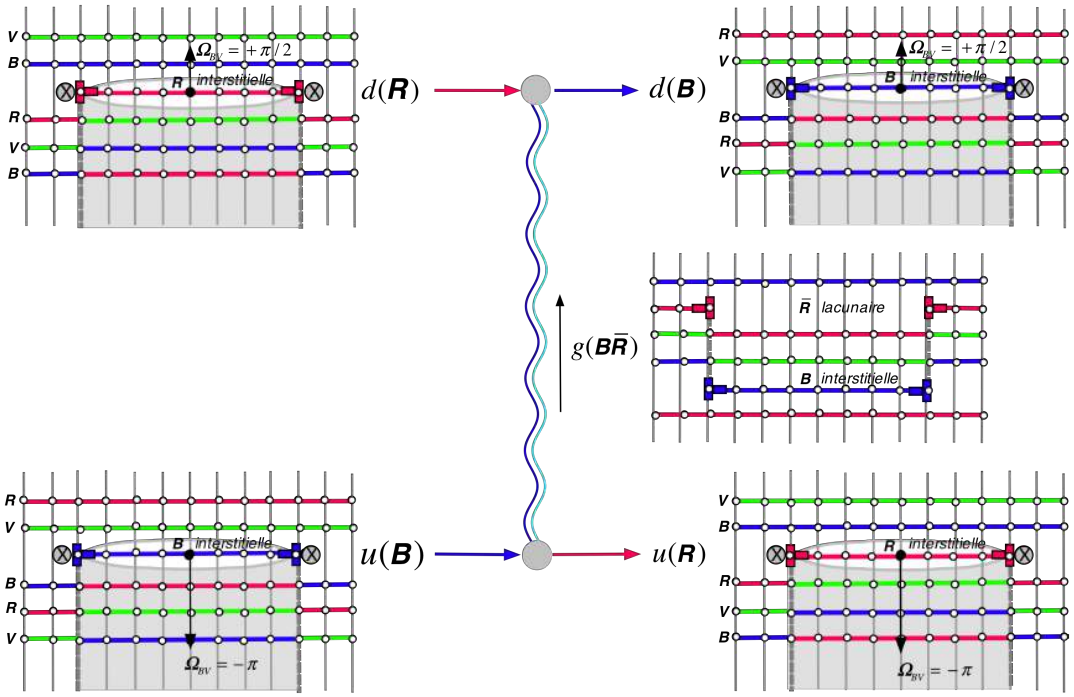


Figure 31.5 - *diagramme de Feynman de l'échange des couleurs de deux quarks par l'échange d'un gluon bicolore*

Et c'est l'échange d'un gluon coloré entre deux quarks qui permet alors d'échanger la couleur de ces deux quarks, par une interaction qui peut être représentée sous la forme d'un diagramme de Feynman (fig. 31.5) illustré par la configuration des singularités topologiques impliquées.

Les gluons colorés correspondent donc à deux boucles coin associées, une de nature interstitielle et une de nature lacunaire, et leur charge de rotation $\boldsymbol{q}_{\lambda BC}$ est nulle. Les boucles coin sont liées entre elles par l'existence d'un cylindre de faute d'empilement, et sont par conséquent soumises à la force forte. Quant à leur charge de courbure $\boldsymbol{q}_{\theta BC}$, elle est nulle puisque qu'on a $\boldsymbol{q}_{\theta BC} = (+2\pi a) + (-2\pi a)$, de sorte que *l'énergie associée aux distorsions de cette paire de boucles doit être extrêmement faible*, et que, par conséquent, *la masse des gluons doit être quasiment nulle, alors qu'il possède une énergie non nulle provenant du cylindre de faute d'empilement!* De ce point de vue, les gluons s'apparentent aux photons.

En chromodynamique quantique, on pense que c'est ce mécanisme d'échange de gluons entre les neutrons et les protons du noyau atomique qui explique la cohésion des noyaux atomiques. Il s'agit donc là d'un effet secondaire de la force forte puisque ces échanges de gluons colorés perturbent les distances d entre les dispirations composant les neutrons et les protons, et par conséquent perturbent les énergies des protons et des neutrons.

De la constitution des leptons et des bosons intermédiaires du modèle standard

Dans le modèle standard, il existe aussi une première famille de particules quasi-ponctuelles qu'on appelle des leptons et qui sont représentés par l'électron e^-, l'anti-électron ou positron e^+, le neutrino électronique ν_e et l'anti-neutrino électronique $\overline{\nu}_e$.

Dans le réseau cosmologique, nous avons déjà postulé l'existence du neutrino sous la forme d'une boucle de dislocation coin de nature interstitielle, alors que l'anti-neutrino correspondait à une boucle de dislocation coin de nature lacunaire. C'est d'ailleurs ce qui nous avait permis de déduire des propriétés gravitationnelles répulsives tout à fait exceptionnelles pour le neutrino, dues à sa charge de courbure par flexion qui domine largement les effets gravitationnels attractifs dus à sa masse d'inertie. Dans le cas du «réseau cosmologique coloré» de la figure 31.1, pour respecter les trois règles auxquelles ce réseau doit satisfaire, le neutrino ne peut correspondre qu'à l'insertion de trois plans consécutifs de couleur ***R***, ***V***, ***B***, et l'anti-neutrino à la soustraction de trois plans consécutifs $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\overline{\boldsymbol{V}}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$ (fig. 31.6, a et b), de sorte à former une inclusion ou un trou qui n'a pas de couleur (de couleur blanche). Sous cette forme, les neutrinos et anti-neutrinos ont exactement les propriétés que nous avons déduites dans les chapitres précédents pour les boucles de dislocation coin prismatiques, à condition que leur vecteur de Burgers ait une norme telle que $\left|\vec{B}_{BC}\right| = 3a$, de sorte que la charge de courbure par flexion de ceux-ci a une norme égale à $\left|\boldsymbol{q}_{\theta BC}\right| = 6\pi a$.

Quant à l'électron et à l'anti-électron, nous avons déjà émis l'hypothèse que la boucle de désinclinaison vis était un bon candidat pour les représenter. En ce cas, pour assurer que la charge de rotation corresponde bien, il faut que l'angle de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ entre deux plans consécutifs soit égal à $\pm 3\pi/2$, pour que la norme de la charge de rotation satisfasse la relation $\left|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\right| = 3\pi^2 R_{BV}^2/2$. Cependant, sous cette forme pure, la boucle de désinclinaison vis a déjà été identifiée comme la particule W^- ou W^+ (fig. 31.2, e et f). De plus, l'électron et le positron

doivent présenter la dissymétrie entre matière et anti-matière, et ils doivent satisfaire les interactions faibles leptoniques (fig. C.3,a). Pour satisfaire ces desiderata, on doit à nouveau faire appel à une combinaison d'une boucle de désinclinaison vis d'angle $\pm 3\pi/2$, qui satisfait la règle 3 et qui ne possède donc pas de couleur, avec une boucle de dislocation coin correspondant à l'insertion de trois plans consécutifs de couleur ***R***, ***V***, ***B***, ou à la soustraction de trois plans consécutifs $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\overline{\boldsymbol{V}}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$. En principe, il devrait donc y avoir quatre électrons différents, de charges $\boldsymbol{q}_{\lambda BV} = \pm 3\pi^2 R_{BV}^2 / 2$ et $\boldsymbol{q}_{\theta BC} = \pm 6\pi a$. Cependant, la façon la plus simple (et la moins énergétique) de créer un électron et un positron serait de comprimer les assemblages de quarks $d\,d\,d$ et $\overline{d}\,\overline{d}\,\overline{d}$ de sorte à collapser les trois boucle vis en une seule, et de collapser les trois boucles coin en une seule. On obtient alors l'électron et le positron représentés à la figure 31.6, c et d.

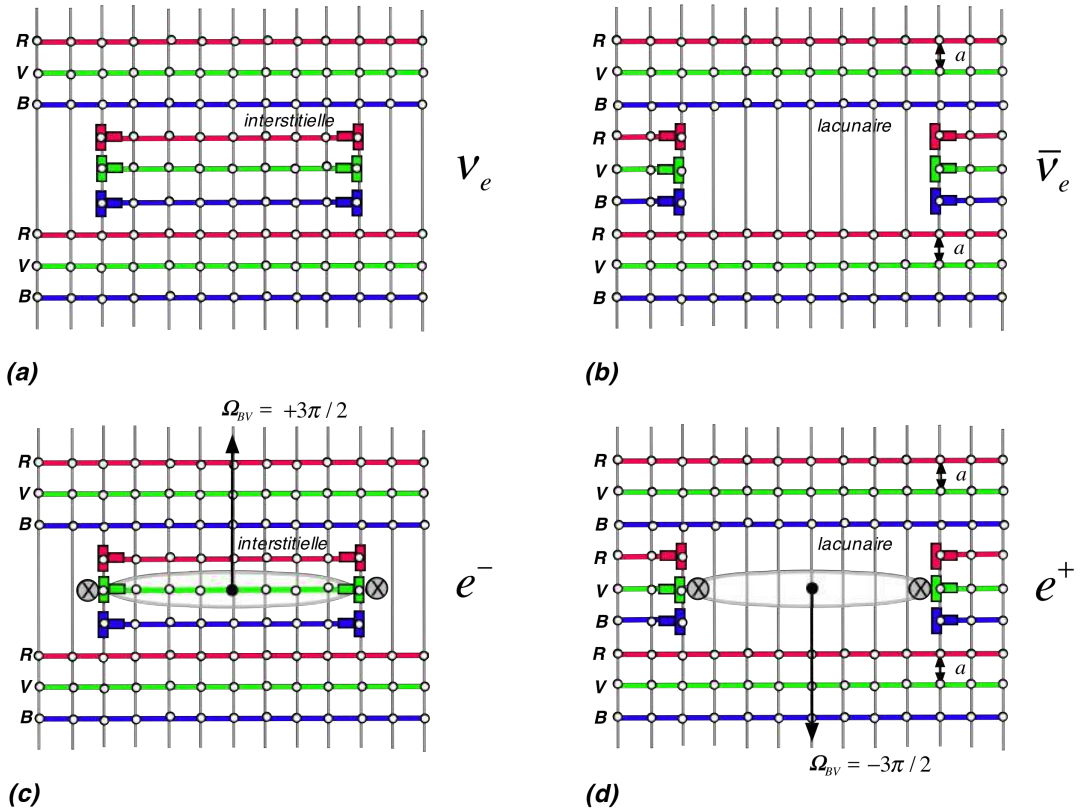


Figure 31.6 - *structure du neutrino, de l'anti-neutrino, de l'électron et du positron, comme assemblages de boucles de dislocation coin et de boucles de désinclinaison vis*

De l'interaction faible des leptons et des bosons intermédiaires du modèle standard

Dans le modèle standard, les interactions faibles correspondent à échanger des bosons intermédiaires $W^{\pm}$ ou Z^0, qui permettent d'échanger la charge électrique entre deux particules (voir fig. C.3). Pour que les diagrammes de Feynman de la figure C.3 fonctionnent avec les dispirations de notre modèle, il faut nécessairement que les bosons intermédiaires soient des boucles de désinclinaison vis pures d'angles de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ valant respectivement $\pm 3\pi/2$ ou 0, comme représentés à la figure 31.2, e à g.

Les bosons intermédiaires sont alors les seules bosons de jauge massifs, ce qui se comprend bien si ce sont effectivement de pures boucles de désinclinaison vis. Expérimentalement, on a trouvé que leur masse est beaucoup plus élevée que celles de l'électron et du positron, ce qui pourrait se comprendre par le fait que la rotation de $\pm 3\pi/2$ doit entièrement être faite sur une distance de a dans le cas des bosons intermédiaires, alors que dans le cas de l'électron et du positron, la rotation de $\pm 3\pi/2$ peut se répartir sur 3 plans successifs, donc sur une distance de $3a$, ce qui doit diminuer très considérablement les distorsions locales du réseau, et donc l'énergie de la particule. Ceci pourrait aussi être la raison pour laquelle un boson de jauge s'associerait extrêmement vite avec 3 boucles coins interstitielles ou lacunaires pour diminuer fortement son énergie, ce qui expliquerait parfaitement les interactions faibles de la figure C.3!
A noter aussi que, dans le modèle standard des particules, les bosons de jauge W^+ et Z^0 sont de spin 1, et donc qu'ils ne satisfont pas le principe d'exclusion, ce qui signifie que deux bosons de jauge peuvent occuper un même état, donc se superposer, ce qui crée en fait une boucle de désinclinaison vis d'angle Ω_{BV} égal par exemple à $\pm 3\pi$. Par contre, l'électron et le positron sont des particules de spin 1/2, qui satisfont le principe d'exclusion de Pauli. Ils ne peuvent par conséquent pas occuper le même état, ce qui signifie qu'on ne peut pas les superposer, ce qui devient naïvement presque une évidence si on considère la structure en boucle des électrons et des positrons représentée à la figure 31.5.
On peut alors reporter les propriétés des leptons et des bosons de jauge dans le tableau 31.5.

symbole	Ω_{BV}	$q_{\lambda BV}$	***boucle coin***	$q_{\theta BC}$
ν_e	$+3\pi/2$	0	*interstitielle*	$-6\pi a$
e^-	0	$-3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*interstitielle*	$-6\pi a$
$\overline{\nu}_e$	$-3\pi/2$	0	*lacunaire*	$6\pi a$
e^+	-3π	$+3\pi^2 R_{BV}^2/2$	*lacunaire*	$6\pi a$
W^-	$+3\pi/2$	$-3\pi^2 R_{BV}^2/2$	-	0
W^+	$-3\pi/2$	$+3\pi^2 R_{BV}^2/2$	-	0
Z^0	$(+3\pi/2)+(-3\pi/2)$	0	-	0

Tableau 31.5 - *les leptons de la première famille et les bosons intermédiaires de jauge*

31.3 – Essai d'explication des trois familles de quarks et de leptons du modèle standard des particules élémentaires

Dans le modèle standard (Annexe C), il existe non seulement les quarks et les leptons que nous venons de décrire, mais il existe encore deux familles supplémentaires de quarks et de leptons (fig. C.1), qui se distinguent surtout par les masses nettement plus élevées observées expérimentalement chaque fois qu'on passe d'une famille à la suivante. On a reporté dans la figure 31.7 la progression des masses au sein du tableau des particules élémentaires du modèle standard, en donnant le facteur multiplicatif approximatif des masses, dans le sens horizontal du tableau et dans le sens vertical du tableau. On constate que les facteurs multiplicatifs moyens reportés en-dehors du tableau sont effectivement très élevés en passant d'une famille à l'autre, alors que les facteurs multiplicatifs pour passer d'une particule à l'autre dans chaque famille ne sont pas si élevés, sauf dans le cas du passage du neutrino à l'électron, ce qui tendrait à faire penser que la structure topologique responsable de la forte augmentation de masse change très probablement d'une famille à l'autre mais reste fort probablement la même au sein d'une même famille. Il est aussi remarquable que les facteurs multiplicatifs associés au neutrino ν_e sont colossalement plus élevés que tous les autres facteurs, ce qui tend à faire penser que c'est probablement la structure des boucles coin qui changent d'une famille à l'autre.

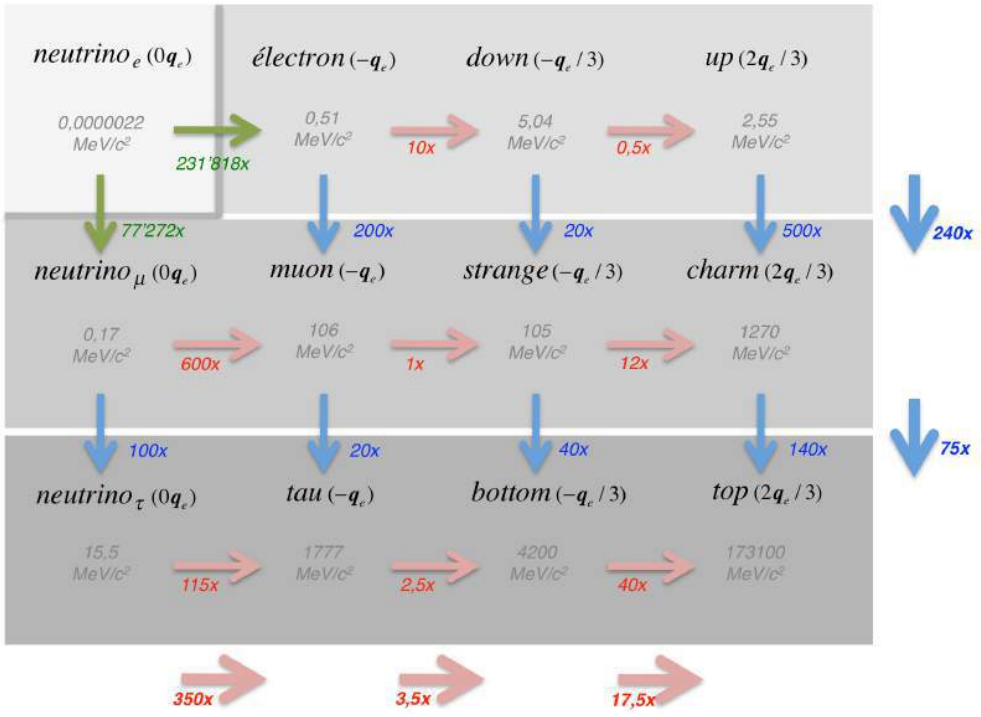


Figure 31.7 - *les masses des particules du modèle standard, mesurées expérimentalement et exprimées en MeV/c², avec les facteurs multiplicatifs approximatifs*

Quant au facteur multiplicatif colossal pour passer du neutrino ν_e à l'électron e^-, il s'explique par la différence d'énergie énorme entre une boucle de dislocation coin et une boucle de désinclinaison vis, comme nous l'avons expliqué à la section 19.11 par la relation *(19.118)*.

De la possibilité de faire intervenir des boucles de désinclinaison coin

Si c'est la structure des parties coin des singularités topologiques qui doit présenter des changements d'une famille à l'autre des leptons et des quarks et justifier des variations d'énergie énormes d'une famille à l'autre, il existe dans la théorie des singularités de réseau des candidats idéaux pour satisfaire ces desiderata: ce sont les boucles de désinclinaison coin qui ont été discutées dans la section 9.3, et notamment les boucles qui pourraient être réalisées avec des combinaisons des désinclinaisons coin $C1$, $\bar{C}1$, $C2$ et $\bar{C}2$ (fig. 31.8).

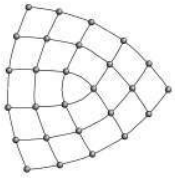
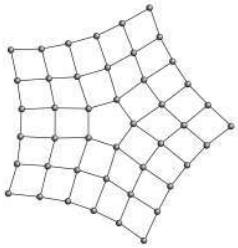
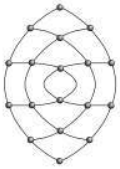
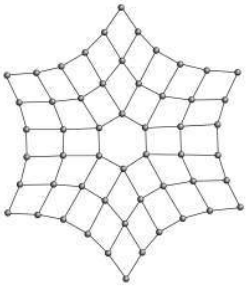
$C1$: $\Omega = +90° : \Theta = -\pi / 2$ 	$\bar{C}1$: $\Omega = -90° : \Theta = +\pi / 2$ 
$C2$: $\Omega = +180° : \Theta = -\pi$ 	$\bar{C}2$: $\Omega = -180° : \Theta = +\pi$ 

Tableau 31.8 - *famille de désinclinaisons coin quantifiées dans un réseau cubique*

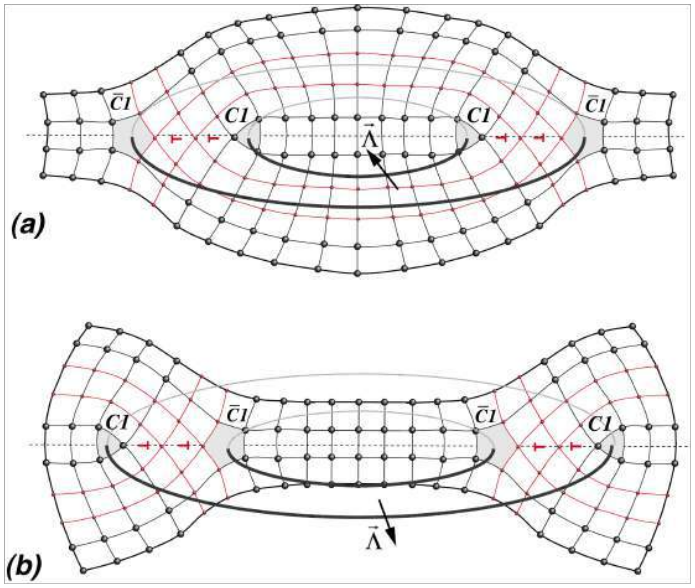


Figure 31.9 - *la formation d'une boucle et d'une anti-boucle de type* $[C1, \bar{C}1]$

En effet, il est possible, en couplant deux boucles de désinclinaison coin $C1$ et $\bar{C}1$, ou bien $C2$ et $\bar{C}2$, de former une structure topologique assez complexe qui correspond en fait à une boucle de dislocation coin. Et la configuration des deux boucles l'une par rappot à l'autre permet de créer des pseudo-boucles de dislocation coin aussi bien lacunaires qu'interstitielles, comme l'illustre bien les deux exemples de la figure 31.9 dans le cas de boucles formées sur la base des désinclinaisons $C1$ et $\bar{C}1$, représentées ici avec des plans intercalaires additionnels. Bien que l'énergie du champ d'une boucle de dislocation coin soit très faible dans le réseau cosmologique parfait, l'énergie d'une singularité formée à l'aide de boucles de désinclinaison coin doit être beaucoup plus élevée, car due aux énormes distorsions élastiques de rotation et de cisaillement impliquées sur les mailles du réseau situées au voisinage même des boucles!

De la réalisation possible de trois familles de quarks

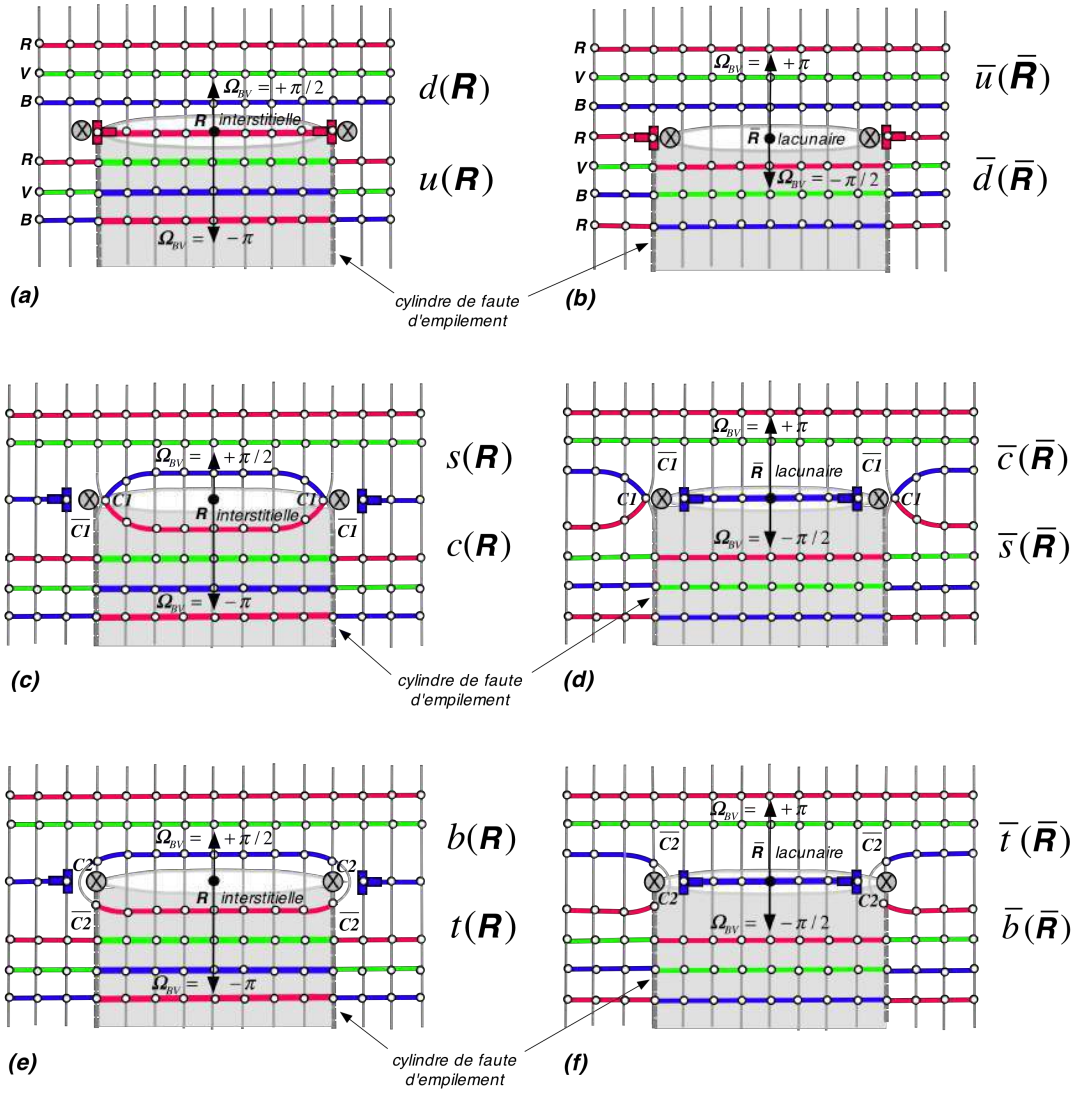


Figure 31.10 *- structure des quarks comme combinaisons de boucles de désinclinaison vis, de boucles de dislocation coin et de paires de boucles de désinclinaison coin.*

Dans la figure 31.10, on a reporté les structures topologiques possibles pouvant expliquer les trois familles de quarks sur la base de l'introduction de paires de boucles de désinclinaison coin $C1$ et $\overline{C1}$ pour la deuxième famille de quarks et de paires de désinclinaison coin $C2$ et $\overline{C2}$ pour la troisième famille de quarks.

A noter que la structure des quarks est représentée très schématiquement dans cette figure, puisqu'on n'y a pas reporté les distorsions énormes du réseau impliquées par la présence des paires de boucles de désinclinaison coin. Et ce sont précisément les distorsions topologiques beaucoup plus élevées des boucles $C2$ et $\overline{C2}$ par rapport aux boucles $C1$ et $\overline{C1}$ qui pourraient alors expliquer les différences d'énergie observées entre les particules de la deuxième et de la troisième famille. Quant à la première famille de quarks, elle ne fait intervenir aucune boucle de désinclinaison coin, ce qui expliquerait les différences d'énergie des particules entre la première famille et la deuxième famille de quarks.

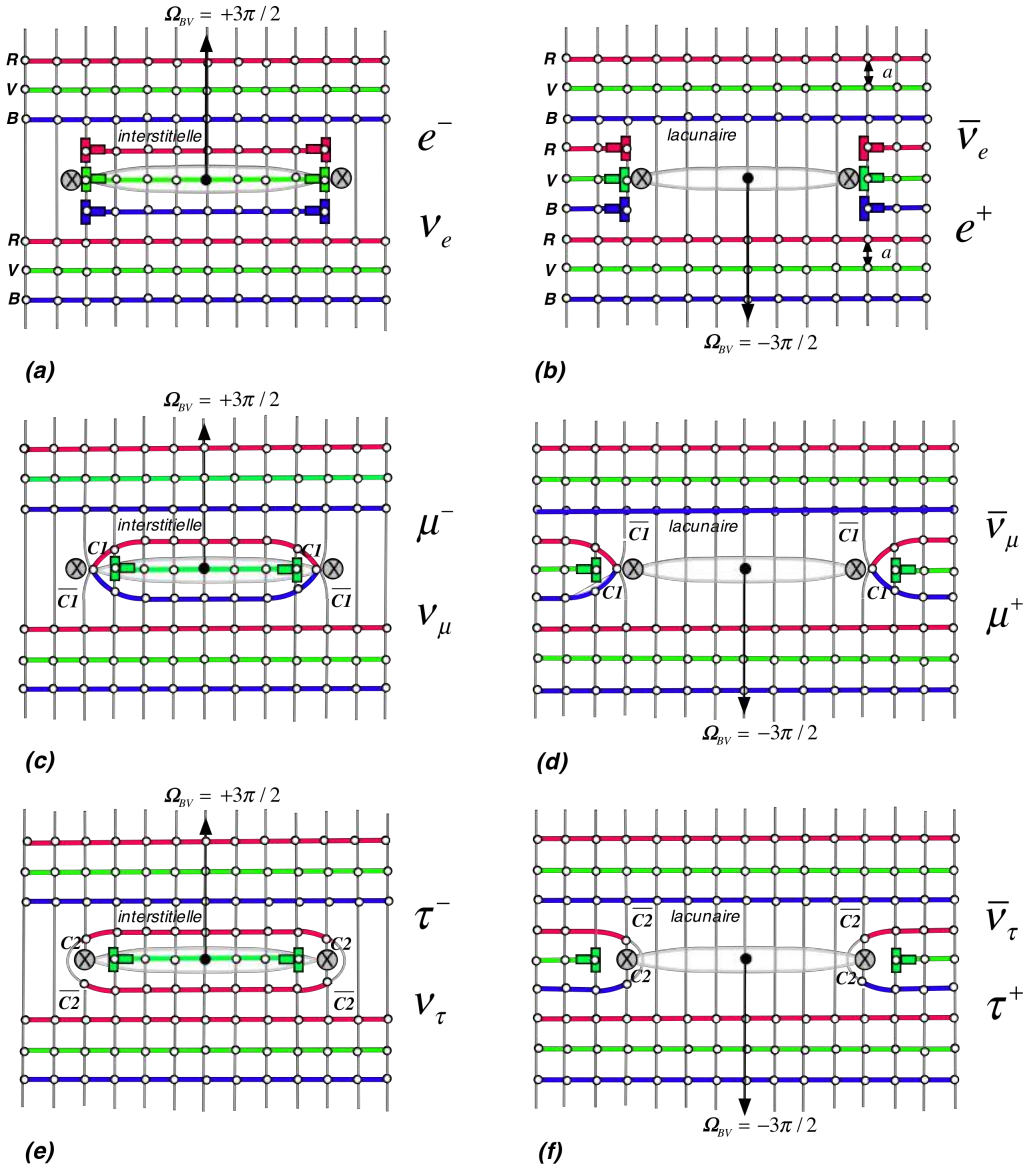


Figure 31.11 - *Structure des leptons, comme assemblages de boucles de dislocation coin et de paires de boucles désinclinaison coin, ainsi que de boucles de désinclinaison vis*

Avec cette explication pour les famille de quarks, les bosons de jauge $W^{\pm}$ et Z^{0} décrits dans la figure 31.2 ne sont pas modifiés puisqu'ils ne font pas intervenir de boucles de dislocation coin! D'autre part, tous les mécanismes décrits pour la première famille restent valables avec les trois familles de quarks décrites à la figure 31.10, que ce soit *les interactions faibles hadroniques* (fig. C.3) faisant intervenir les bosons de jauge $W^{\pm}$ comme celles reportées à la figure 31.3 ou bien *les interactions fortes* faisant intervenir les gluons bicolores de la figure 31.5 !

De la réalisation possible de trois familles de leptons

Les paires de boucles de désinclinaison coin $\boldsymbol{C1}$ et $\overline{\boldsymbol{C1}}$, ou $\boldsymbol{C2}$ et $\overline{\boldsymbol{C2}}$, peuvent aussi être utilisées pour expliquer les trois familles de leptons qui sont observées dans le modèle standard.
On a reporté dans la figure 31.11 les structures topologiques possibles des trois familles de leptons basées sur l'introduction des paire de boucle $\boldsymbol{C1}$ et $\overline{\boldsymbol{C1}}$, ou $\boldsymbol{C2}$ et $\overline{\boldsymbol{C2}}$.
Comme dans le cas des quarks de la figure 31.10, les structures présentées dans la figure 31.11, ainsi que toutes les structures topologiques reportées dans les figures 31.2 à 31.9, respectent scrupuleusement les règles de couleur introduites au début de ce chapitre, notamment la règle 1.
Il est aussi facile de vérifier que tous les leptons de la figure 31.11 satisfont les interactions faibles leptoniques et semi-leptoniques reportées dans la figure C.3. D'autre part, comme il n'existe pas de cylindres de faute d'empilement dans les structures des leptons, ceux-ci ne sont pas soumis à la force forte!

31.4 – De l'intérêt de l'analogie entre le réseau cosmologique «coloré» et le modèle standard des particules élémentaires

L'analogie entre notre modèle de réseau cosmologique «coloré», avec les singularités topologiques élémentaires qu'il peut contenir, et le modèle standard des particules élémentaires est excellente, et elle est très féconde pour fournir des explications à plusieurs facettes assez mystérieuses du modèle standard que nous allons énumérer ici.

De la structure des particules du modèle standard en trois familles de quarks et leptons

Les structures topologiques de boucles de dislocation coin, de boucles de désinclinason vis et de paires de boucles de désinclinaison coin introduites dans un réseau cubique «coloré» possédant des règles strictes d'arrangement et de rotation des plans corpusculaires «colorés» permettent de constituer toutes les particules du modèle standard des particules élémentaires, à savoir les quarks et les leptons, qui présentent une structure en trois familles dont les masses très différentes peuvent s'expliquer par les énergies élastiques de distorsion des mailles du réseau dans le voisinage immédiat des boucles. Ces divers quarks et leptons satisfont aussi toutes les propriétés de *l'interaction faible* et de *l'interaction forte* utilisant respectivement les bosons de jauge intermédiaires $W^{\pm}$ et Z^{0} et les gluons, qui possèdent aussi leurs propres structures topologiques dans le réseau cosmologique «coloré». Quant à la force forte, elle possède bien les bonnes propriétés asymptotiques dues au fait qu'elle est générée par un cylindre de fautes d'empilement dont l'énergie s'accroît s'il est allongé, et elle est responsable de l'exis-

tence des baryons et des mésons, qui sont les seules structures topologiques localisées et «non colorées» qu'il est possible de former sur la base des quarks! De la sorte, on peut reconstituer toutes les particules du modèle standard, comme par exemple les baryons et les mésons des figures C.4 et C.5, composés des quarks et anti-quarks u, d, s et/ou c.

Des champs d'interaction par force faible et par force forte

Quant aux champs de force agissant entre les boucles topologiques, ils ont des *explications topologiques simples*:

- la *force faible* est essentiellement due à la diminution de l'énergie de formation d'une boucle de dispiration lorsqu'on associe une boucle de dislocation coin avec une boucle de désinclinaison vis, comme on l'a vu à la section 25.3. C'est la portée très faible du potentiel d'interaction de capture de cette force qui explique alors la désintégration radio-active des particules élémentaires, par le franchissement du potentiel d'interaction par effet tunnel quantique.
Il existe bien des bosons de jauge échangés au cours de l'interaction faible: ce sont les bosons intermédiaires $W^{\pm}$ et Z^{0}, qui ont une structure topologique bien définie, reportée dans la figure 31.2.

- la *force forte*, qui lie deux ou trois quarks ensemble, est due au cylindre de fautes de raccordement généré par le fait que les boucles de désinclinaison vis associées aux quarks ont des charges $\boldsymbol{q}_{\lambda\, BV}$ qui ne sont que le 1/3 ou les 2/3 de la charge de la boucle de désinclinaison vis parfaite associée à l'électron. La distance de dissociation entre boucles d'un doublet ou d'un triplet de quarks dépend essentiellement de *l'énergie de fautes de raccordement par unité de surface*. Si cette énergie est très forte, on peut imaginer que les boucles seront très proches, comme on l'a illustré dans les figures de ce chapitre. Mais si cette énergie est faible, on pourrait aussi imaginer des tubes de faute constituant des membranes dont le diamètre (égal au diamètre des boucles topologiques) est beaucoup plus faible que la longueur, de sorte que les singularités topologique en doublet et triplet pourraient alors avoir l'aspect de *«longs brins»* terminés à chaque extrémité par des boucles topologiques!
Il existe bien des bosons de jauge échangés au cours de l'interaction forte: ce sont les gluons bicolores, qui ont une structure topologique bien définie, reportée dans la figure 31.5.

Des possibilités de calcul de l'énergie des particules du modèle standard

Une première conséquence très intéressante de cette explication des particules du modèle standard est liée au fait que, dans le cas des boucles de dispiration et de leurs interactions via les forces faible et forte, les énergies mises en jeu pour la *formation* des multiplets de boucles a une origine connue puisque c'est en fait la somme des diverses énergies suivantes:
(i) les énergies de formation associées aux très fortes distorsions locales du réseau générées par ces objets, et stockées dans le réseau au voisinage de ces objets,
(ii) les énergies de fautes de raccordement apparaissant du fait que le réseau cosmologique imaginaire considéré ici est un réseau «coloré», lié au fait qu'il doit possèder des propriétés axiales,
(iii) les énergies mises en jeu par *la force faible* dans les couplages gravitationnels entre les boucles de dislocation coin et les boucles de désinclinaison vis, telles que décrites dans la sec-

tion 25.3,
(iv) les énergies stockées à plus grande distance, qui sont dues aux distorsions à longue portée du réseau reliées à la charge globale $\boldsymbol{q}_\theta$ de courbure par flexion et à la charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ de torsion par rotation de multiplets de boucles, qui sont contenues dans les calculs des énergies de formation, de gravitation et de charges de courbure que nous avons faits dans les chapitres précédents, ainsi que des énergies de vibration propre et de rotation propre des boucles que nous avons obtenus respectivement aux chapitres 28 et 29.

L'énergie totale de formation des multiplets de boucles pourrait donc être calculée de manière rigoureuse, à condition de connaître les propriétés élastiques exactes (les modules K_0, K_1, K_2 et K_3) ainsi que l'énergie surfacique de faute γ_0 du réseau cosmologique dans lequel ces objets apparaissent. Cet aspect énergétique est très important car, dans le cas du modèle standard des particules, l'origine et la valeur de l'énergie des particules élémentaires (leur masse) restent encore très mystérieuses, et sont introduites comme des paramètres du modèle standard, qui doivent être mesurés expérimentalement!
De plus, en observant les distorsions de réseau générées au voisinage des boucles des différentes familles, on imagine immédiatement que la progression des énergies des multiplets de boucles en fonction du numéro d'ordre de leur famille doit être très fortement non-linéaire, phénomène qui est très bien observé dans le cas des énergies des leptons et des quarks de différentes familles du modèle standard.

De l'«élémentarité» des particules du modèle standard

Une autre conséquence intéressante de notre conception du modèle standard est l'existence d'une différence *«d'élémentarité»* entre les boucles topologiques de dispiration de notre réseau cosmologique imaginaire et les leptons et les quarks du modèle standard. En effet, les boucles de dispiration que nous avons décrites, au contraire des leptons et des quarks élémentaires du modèle standard, ne sont pas à proprement parler des particules élémentaires, mais sont déjà des assemblages d'autres particules plus élémentaires, les boucles de dislocation coin lacunaires ou interstitielles, les boucles de désinclinaison vis et les 4 boucles formées des désinclinaisons coin $\boldsymbol{C1}$, $\boldsymbol{\bar{C}1}$, $\boldsymbol{C2}$ et $\boldsymbol{\bar{C}2}$ de la figure 31.8 liées entre elles sous forme de paires de boucles par une force extra-forte de nature purement topologique, le ruban de dislocation virtuel liant les deux boucles de désinclinaisons coin.
Pour juger des autres potentialités de cette idée de constitution des particules du modèle standard, il faudrait vérifier si cette approche permettrait de justifier et d'expliquer l'ensemble compliqué de règles de sélection qui a dû être introduit en physique des particules pour décrire toutes les interactions observées expérimentalement. Ceci n'est évidemment qu'une suggestion, et son développement détaillé n'est pas du ressort de ce traité. A noter que d'autres approches similaires de décomposition des particules du modèle standard ont déjà été proposées en physique des particules, mais sous des formes différentes, comme par exemple le modèle basé sur des pré-quarks appelés *«rishons»*. Mais ces modèles se sont montrés infructueux.

Du rôle de la charge de courbure dans le modèle standard

La charge de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ joue un rôle important dans l'élaboration d'un modèle de «singulari-

tés topologiques élémentaires» pour expliquer le modèle standard des particules. On constate assez facilement que cette charge, dont on ne voit à priori pas d'analogie directe dans le modèle standard, satisfait un principe de conservation au cours des interactions entre boucles, aussi bien lors des interactions faibles que lors des interactions fortes.
La question est alors de savoir si la charge $\boldsymbol{q}_\theta$, qui est conservée lors des interactions entre boucles, a une corrélation avec une des grandeurs caractéristiques ou avec une des relations de conservation du modèle standard (telle que la relation de Gell-Mann-Nishijima par exemple).
La réponse à cette question pourrait assurément présenter des potentialités très importantes pour la physique des particules, d'autant plus que nous avons déjà maintes fois montré que *c'est la charge de courbure* $\boldsymbol{q}_\theta$ *qui est responsable des faibles asymétrie entre matière et anti-matière*, et conséquemment de l'évolution cosmologique de la matière et de l'anti-matière au sein de l'univers, et de la présence d'une «masse noire» sous la forme d'une mer de neutrinos répulsifs entourant les galaxies!

31.5 – Des questions encore en suspens concernant le modèle du réseau cosmologique «coloré» et son analogie avec le modèle standard

L'analogie développée dans ce chapitre entre les boucles topologiques de dispiration dans un réseau cosmologique cubique imaginaire «coloré» et le modèle standard des particules élémentaires s'avère très fructueuse pour essayer de comprendre certains points encore non éclaircis en physique des particules, comme la nature topologique des particules élémentaires, ainsi que des forces forte et faible, ou bien l'origine de la masse des particules élémentaires.
Mais il existe cependant plusieurs questions encore en suspens, qui mériteraient d'être étudiées en détail, parmi lesquelles les principales sont les suivantes:

De l'application du concept de spin

Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 29, la notion de spin semble bien correspondre à une rotation réelle des boucles topologiques. Mais il se pose encore bien des questions qui demanderaient à être étudiées en détail.
La première question est évidemment d'essayer d'imaginer comment une boucle de dislocation coin, et/ou une boucle de désinclinaison vis et/ou une boucle de désinclinaison coin peuvent tourner sur elle-même dans un réseau cosmologique cubique «coloré», sachant de plus qu'il existe un tube de faute d'empilement responsable de la force forte dans le cas des baryons et des mésons. Y a-t-il une explication topologique possible pour un tel mouvement de rotation, ou faut-il alors imaginer un réseau avec des propriétés «encore plus étranges»?
La deuxième question est évidemment liée à la valeur qu'il faut attribuer au spin d'une boucle topologique. Par exemple, pourquoi l'électron, qui correspondrait à un couplage faible entre une boucle de dislocation coin et une boucle de désinclinaison vis, possède un spin 1/2, alors que le boson de jauge $W^{\pm}$, qui correspondrait à une boucle de désinclinaison vis isolée, possède un spin 1? Existe-t-il en fait une raison topologique pour laquelle une certaine boucle doit posséder un spin 1/2 ou un spin 1, ou alors faut-il à nouveau faire appel à quelque autre «propriété étrange» du réseau cosmologique «coloré»?

La troisième question serait de savoir comment appliquer plus soigneusement le concept de spin développé au chapitre 29 au modèle de réseau cosmologique «coloré» que nous avons décrit dans ce chapitre. La réponse à cette question pourrait permettre de trouver une explication à l'existence de particules composées de mêmes quarks, mais de spin différent, comme les mésons π^+ et ρ^+ composés tous deux des quarks $u\bar{d}$, mais de spins respectifs 0 et 1, ou bien les baryons p (proton) et Δ^+ composés tous deux des quarks uud, mais de spin respectifs valant 1/2 et 3/2. Une telle étude permettrait peut-être aussi d'expliquer l'origine exacte du spin 1/2 des baryons et du spin 1 des mésons, qui est encore un point assez obscur du modèle standard des particules, mais qui le reste aussi dans le cas de notre modèle de réseau cosmologiue «coloré»!

De la théorie de la chromodynamique quantique

Il serait évidemment très instructif et intéressant de développer une étude nettement plus fouillée de l'application des calculs *d'équation d'onde*, des concepts *de bosons et de fermions*, du *principe d'exclusion de Pauli* développés au chapitre 28, ainsi que de la notion de spin introduite au chapitre 29, aux singularités topologiques en boucles analogues des particules du modèle standard, et d'essayer de voir si une telle étude ne nous amènerait pas finalement à une explication physique compréhensible de la fameuse théorie de «chromodynamique quantique»?

De l'existence de modèles supersymétriques

Une étude plus fouillée pourrait non seulement (peut-être!) expliquer pourquoi il existe dans le modèle standard des *fermions* (particules de spin 1/2 comme les quarks et les leptons) et des *bosons* (particules de spin 1 comme les bosons de jauge intermédiaires et les gluons), mais elle pourrait aussi répondre à la question de savoir si (par hasard!) il était possible de créer une zoologie de particules identiques à celles que nous avons obtenues dans ce chapitre, mais dont on intervertirait les spins 1/2 et 1, ce qui pourrait faire apparaître un *«modèle supersymétrique»*!

De l'existence d'une quatrième famille de quarks et leptons

Lors de l'introduction des désinclinaisons coin $\boldsymbol{C1}$, $\bar{\boldsymbol{C1}}$, $\boldsymbol{C2}$ et $\bar{\boldsymbol{C2}}$ pour expliquer les familles du modèle standard, on a sciemment négligé l'existence possible (?) des boucles de désinclinaisons coin $\boldsymbol{C3}$ et $\bar{\boldsymbol{C3}}$ reportées dans la figure 9.20. Si ces désinclinaisons pouvaient réellement exister dans le réseau cosmologique «coloré», il apparaîtrait alors *une quatrième famille de quarks et de leptons dans le modèle standard*, dont les énergies seraient alors parfaitement colossales!

De l'existence de leptons «exotiques»

Dans notre description des quarks de la figure 31.10, le fait que les quarks possèdent des charges électriques -1/3 et +2/3 de la charge de l'électron, alors que les anti-quarks possèdent des charges électriques +1/3 et -2/3 de la charge de l'électron s'explique facilement par les *règles de succession des couleurs* des plans corpusculaires que ne vous avons émises. Par contre, pour les leptons que nous avons introduits à la figure 31.11, nous avons choisi *arbitrai-*

rement d'associer au neutrino une charge électrique -1 pour obtenir *l'électron de matière* et d'associer à l'anti-neutrino une charge électrique +1 pour obtenir *le positron d'anti-matière*. Mais en fait les règles de couleur que nous avons introduites n'empêcheraient pas à priori d'associer une charge électrique +1 au neutrino pour obtenir *un positron exotique de matière* et une charge électrique -1 à l'anti-neutrino pour obtenir *un électron exotique d'anti-matière*. Il y a là nouveau sujet de réflexion. En effet:

- soit *ces leptons exotiques n'existent pas*, auquel cas il faudrait assurément trouver une explication plus convaincante que celle que nous avons proposée pour expliquer que l'électron soit fait de matière et le positron d'anti-matière (nous avons proposé que l'électron et le positron pouvaient être considérés comme le résultat de la compression d'assemblages de quarks $d\,d\,d$ et $\overline{d}\,\overline{d}\,\overline{d}$, ce qui expliquerait l'existence des électrons de matière et des positrons d'anti-matière et l'absence des électrons d'anti-matière et des positrons de matière),

- soit *ces leptons exotiques existent effectivement*, auquel cas il faudrait expliquer pourquoi ces particules semblent ne jamais avoir été observées expérimentalement!

Conclusion

Pour conclure cette section, on se doit de constater que notre modèle de réseau cosmologique "coloré" soulève encore de nombreuses questions non résolues, et qu'il pourrait donc être à l'origine d'un nouveau domaine de recherche passionnant!

PARTIE II

E

Quelques conséquences hypothétiques du réseau cosmologique parfait

Fluctuations gravitationnelles pures du réseau cosmologique: fluctuations quantiques du vide, multi-univers et gravitons

Chapitre 32

Fluctuations «gravitationnelles»: fluctuations quantiques du vide, multi-univers et gravitons

Aux chapitres 22 à 26, on a essentiellement traité les champs d'expansion statiques associés à des singularités topologiques localisées, correspondant aux champs gravitationnels statiques de ces singularités et à leurs interactions. Aux chapitres 28 à 30, on a introduit les fluctuations dynamiques du champ d'expansion associées aux singularités topologiques et aux ondes transversales, correspondant à la physique quantique. Dans ce chapitre, on va aborder le comportement dynamique des champs d'expansion dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$ d'un réseau cosmologique parfait, en traitant le problème des fluctuations temporelles localisées du champ d'expansion qui ne sont pas associées à des singularités topologiques ou à des ondes transversales.

On commencera par décrire des fluctuations aléatoires dont l'énergie moyenne est nulle, et qui présentent de fortes analogies avec les fameuses fluctuations quantiques du vide. Puis on va montrer que de telles fluctuations, qu'on pourrait qualifier de fluctuations «gravitationnelles», peuvent être stables sous la condition qu'elles apparaissent en *quadruplet de fluctuations,* de telle sorte à ce qu'elles présentent une énergie totale non nulle qui ne dépende pas du temps.

En considérant de telles fluctuations stables, macroscopiques et isotropes, il est possible de donner une autre version de l'expansion cosmologique de l'Univers, en introduisant la notion de *multi-univers* en expansion et en contraction dans un réseau cosmologique parfait infini.

On peut aussi imaginer des fluctuations «gravitationnelles» longitudinales stables, microscopiques et quantifiées, qui pourraient alors correspondre à d'hypothétiques particules qu'on pourrait qualifier de *«gravitons»*.

32.1 – Fluctuations «gravitationnelles» longitudinales localisées

Au chapitre 14, nous avons vu que, dans un réseau dans lequel la propagation d'ondes longitudinales n'est pas possible, il peut apparaître des vibrations longitudinales localisées, qu'on pourrait appeler des *fluctuations gravitationnelles* $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ puisque ce sont des fluctuations du champ d'expansion volumique. On peut essayer de creuser un peu ce sujet, en décrivant ces fluctuations longitudinales dans un réseau cosmologique ne contenant ni singularités topologiques, ni ondes transversales.

Les fluctuations gravitationnelles en l'absence de singularités et d'ondes transversales

En l'absence de singularités topologiques et d'ondes transversales, imaginons l'existence de

fluctuations $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ du champ d'expansion volumique d'un réseau cosmologique dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$

$$\tau(\vec{r},t) = \tau_0 + \tau^{(p)}(\vec{r},t) \qquad (32.1)$$

Ces fluctuations $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$, si elles existent, doivent évidemment satisfaire l'équation de Newton du champ d'expansion volumique. En l'absence de singularités topologiques et d'ondes transversales, et en négligeant les effets des lacunes et des interstitielles ($\vec{p} \cong m\vec{\phi}$), la deuxième équation partielle de Newton pour les perturbations longitudinales est donnée par la relation *(18.9)* dans laquelle on néglige tous les champs à part $\tau^{(p)}$ et $\vec{\phi}^{(p)}$, et dont on prend directement la divergence

$$\mathrm{div}\left(nm\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} \right) = \Delta\left[\left(\frac{4K_2}{3} + 2K_1(1+\tau_0) - K_0 \right)\tau^{(p)} + K_1\left(\tau^{(p)}\right)^2 \right] \qquad (32.2)$$

En considérant des fluctuations $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ suffisamment faibles, il est possible de linéariser l'équation, en négligeant complètement le terme $(\tau^{(p)})^2$ et en sortant la densité n du terme de divergence

$$nm\,\mathrm{div}\left(\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} \right) = \left(\frac{4}{3}K_2 + 2K_1\left(1+\tau_0\right) - K_0 \right)\Delta\tau^{(p)} \qquad (32.3)$$

On peut introduire un paramètre α valant

$$\alpha = K_0 - 4K_2/3 - 2K_1\left(1+\tau_0\right) \qquad (32.4)$$

qui est positif si le réseau cosmologique ne présente pas d'ondes longitudinales, c'est-à-dire si $\tau_0 < \tau_{0cr}$, et remplacer la dérivé particulaire par la dérivé partielle du temps, de telle sorte que

$$\mathrm{div}\left(\frac{d\vec{\phi}^{(p)}}{dt} \right) \cong \mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{\phi}^{(p)}}{\partial t} \right) \cong \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{\phi}^{(p)} \right) \cong -\frac{\alpha}{nm}\,\Delta\tau^{(p)} \qquad (32.5)$$

En utilisant encore l'équation géométrocinétique pour l'expansion volumique, en supposant les sources de réseau nulles, et en négligeant la dérivé particulaire, à savoir

$$\frac{S_n}{n} = 0 = -\frac{d\tau^{(p)}(\vec{r},t)}{dt} + \mathrm{div}\,\vec{\phi}^{(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\tau^{(p)}(\vec{r},t)}{\partial t} \cong \mathrm{div}\vec{\phi}^{(p)} \qquad (32.6)$$

et en combinant les relations *(32.5)* et *(32.6)*, on obtient l'équation de Newton linéarisée des fluctuations gravitationnelles faibles dans le réseau cosmologique sans propagation d'ondes longitudinales, dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$

$$\frac{\partial^2\tau^{(p)}}{\partial t^2} \cong -\frac{\alpha}{nm}\,\Delta\tau^{(p)} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \qquad (32.7)$$

Si on dissocie le comportement spatial et le comportement temporel de ces fluctuations $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$, on peut les écrire comme le produit d'une fonction spatiale $\psi(\vec{r})$ par un terme oscillant $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ dans le temps

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad (32.8)$$

En introduisant cette écriture des fluctuations dans l'équation de Newton, on obtient l'équation qui régit la composante spatiale $\psi(\vec{r})$ lorsque les fluctuations présentent une pulsation ω

$$\psi(\vec{r}) \cong \frac{|\alpha|}{mn\omega^2}\Delta\psi(\vec{r}) \qquad (32.9)$$

Par exemple, supposons une fluctuation localisée au voisinage de l'origine, selon les trois axes de l'espace. Pour qu'un telle fluctuation satisfasse l'équation de Newton précédente, il faut que la composante spatiale $\psi(\vec{r})$ s'écrive sous la forme suivante

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \tag{32.10}$$

qui, introduite dans l'équation de Newton, permet de relier la pulsation ω de la fluctuation à ses *portées spatiales* δ_i selon les trois directions de l'espace

$$\left[\frac{1}{\delta_1^2}+\frac{1}{\delta_2^2}+\frac{1}{\delta_3^2}\right] = \frac{mn\omega^2}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{mn}}\sqrt{\frac{1}{\delta_1^2}+\frac{1}{\delta_2^2}+\frac{1}{\delta_3^2}} \tag{32.11}$$

On constate donc que la pulsation d'une fluctuation gravitationnelle est inversement proportionnelle à ses portées spatiales.

L'énergie d'une fluctuation gravitationnelle isolée

Considérons une fluctuation gravitationnelle unique donnée par

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \cos\omega t \tag{32.12}$$

Essayons de calculer l'énergie élastique stockée par cette perturbation dans le réseau. La densité d'énergie élastique est donnée par l'expression suivante si l'expansion de fond τ_0 du réseau cosmologique n'est pas nulle

$$e^{dist}(\vec{r},t) \cong K_1\left(\tau^{(p)}(\vec{r},t)\right)^2 - \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\tau^{(p)}(\vec{r},t) \tag{32.13}$$

L'énergie élastique totale de la fluctuation s'obtient en intégrant sur tout l'espace

$$\begin{aligned} E^{dist}(t) &= \iiint_V \left[K_1\left(\tau^{(p)}(\vec{r},t)\right)^2 - \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\tau^{(p)}(\vec{r},t)\right] dV \\ &= K_1\psi_0^2\cos^2\omega t \iiint_V \mathrm{e}^{-2\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-2\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-2\frac{|x_3|}{\delta_3}} dV - \left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\psi_0\cos\omega t \iiint_V \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} dV \end{aligned} \tag{32.14}$$

d'où

$$E^{dist}(t) = K_1\psi_0^2\delta_1\delta_2\delta_3\cos^2\omega t - 8\left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\psi_0\delta_1\delta_2\delta_3\cos\omega t \tag{32.15}$$

Essayons aussi de calculer l'énergie cinétique stockée par cette perturbation dans le réseau. La vitesse satisfait approximativement l'équation

$$\mathrm{div}\vec{\phi}^{(p)} = \frac{\partial\tau^{(p)}(\vec{r},t)}{\partial t} = \psi_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \omega\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi_i^{(p)}}{\partial x_i} = \frac{1}{3}\psi_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \omega\sin\omega t \tag{32.16}$$

de sorte que

$$\vec{\phi}^{(p)} = -\frac{1}{3}\psi_0\omega\sin\omega t \left(\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_3|}{\delta_3}} \right) \sum_i \left(\delta_i \vec{e}_i\right) \tag{32.17}$$

La densité d'énergie cinétique de la fluctuation vaut par conséquent

$$e^{cin}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}mn\left(\vec{\phi}^{(p)}\right)^2 = \frac{1}{18}mn\psi_0^2\left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right) \mathrm{e}^{-2\frac{|x_1|}{\delta_1}} \mathrm{e}^{-2\frac{|x_2|}{\delta_2}} \mathrm{e}^{-2\frac{|x_3|}{\delta_3}} \omega^2\sin^2\omega t \tag{32.18}$$

L'énergie cinétique totale de la fluctuation s'obtient en intégrant sur tout l'espace

$$E^{cin}(t) \cong \iiint_V e^{cin}(\vec{r},t)\,dV = \frac{1}{18} mn\psi_0^2 \left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)\delta_1\delta_2\delta_3\omega^2 \sin^2\omega t \qquad (32.19)$$

On en déduit que l'énergie totale de la fluctuation vaut

$$\begin{aligned} E^{fluctuation}(t) = E^{dist}(t) + E^{cin}(t) &= -\left[8\left(K_0 - 2K_1\tau_0\right)\psi_0\delta_1\delta_2\delta_3\right]\cos\omega t \\ &+ \left[K_1\psi_0^2\delta_1\delta_2\delta_3\right]\cos^2\omega t + \left[\frac{1}{18} mn\psi_0^2\delta_1\delta_2\delta_3\left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)\omega^2\right]\sin^2\omega t \end{aligned} \qquad (32.20)$$

32.2 – Fluctuations «gravitationnelles» microscopiques aléatoires et fluctuations quantiques du vide

Considérons maintenant des fluctuations longitudinales microscopiques, c'est-à dire des fluctuations «gravitationnelles» pour lesquelles l'amplitude ψ_0 est extrêmement faible.

N'abordons ici que le cas très simple d'une fluctuation «gravitationnelle» isotrope, c'est-à-dire telle que les portées dans les trois directions de l'espace soient égales. Dans le cas du réseau cosmologique parfait, pour $\tau_0 < \tau_{0cr}$, on a que $K_0 >> K_1$ et $K_0 / mn = c_t^2$, de sorte que

$$\begin{cases} \omega^2 \cong 3c_t^2 \dfrac{1}{\delta^2} \\ E^{fluctuation}(t) \cong K_0\psi_0\delta^3\left[-8\cos\omega t + \dfrac{K_1}{K_0}\psi_0\cos^2\omega t + \dfrac{1}{2}\psi_0\sin^2\omega t\right] \end{cases} \qquad (32.21)$$

On constate immédiatement que si cette fluctuation est d'amplitude telle que $\psi_0 << 1$, c'est *l'énergie de distorsion associée à* K_0 qui domine largement les autres, et donc que

$$E^{fluctuation}(t) \cong E^{dist}(t) \cong -8K_0\psi_0\delta^3\cos\omega t \qquad (32.22)$$

Ce résultat d'une énergie de fluctuation qui peut être positive ou négative est tout-à-fait intéressant et intriguant. Il signifie en effet qu'un réseau ne présentant pas d'ondes longitudinales pourrait être soumis à *une superposition de fluctuations locales* de diverses pulsations ω_k, de diverses phases φ_k et de diverses amplitudes ψ_{0k}, et dont les centres seraient situés aléatoirement aux positions $\vec{r}_k$, de sorte à prendre *de manière instantanée* l'allure suivante

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) = \sum_k \psi_{0k}\, e^{-\frac{|x_1-x_{1k}|}{\delta_{1k}}}\, e^{-\frac{|x_2-x_{2k}|}{\delta_{2k}}}\, e^{-\frac{|x_3-x_{3k}|}{\delta_{3k}}}\, e^{-i(\omega_k t+\varphi_k)} \qquad (32.23)$$

avec

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{mn}}\sqrt{\frac{1}{\delta_{1k}^2}+\frac{1}{\delta_{2k}^2}+\frac{1}{\delta_{3k}^2}} \qquad (32.24)$$

Et comme l'énergie de chacune de ces fluctuations peut être positive ou négative, l'énergie globale instantanée de ce champ $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ *présenterait toujours en moyenne une énergie nulle.*

On peut essayer de représenter schématiquement cette situation dans le réseau, comme on l'a fait dans la figure 32.1.

Ce *champ de fluctuations «gravitationnelles» microscopiques* n'est évidemment pas formé de fluctuations stables dans le temps puisque leur énergie n'est pas une constante. Il est en fait

constitué de fluctuations «*évanescentes*», qui apparaissent et disparaissent spontanément, tout en maintenant une énergie globale nulle du réseau cosmologique. A ce titre, ce champ de fluctuations «gravitationnelles» est l'analogue parfait du *champ de fluctuations quantiques du vide,* composé lui aussi de fluctuations quantiques à l'échelle microscopique, d'énergies positives et négatives, mais dont l'énergie moyenne reste nulle.

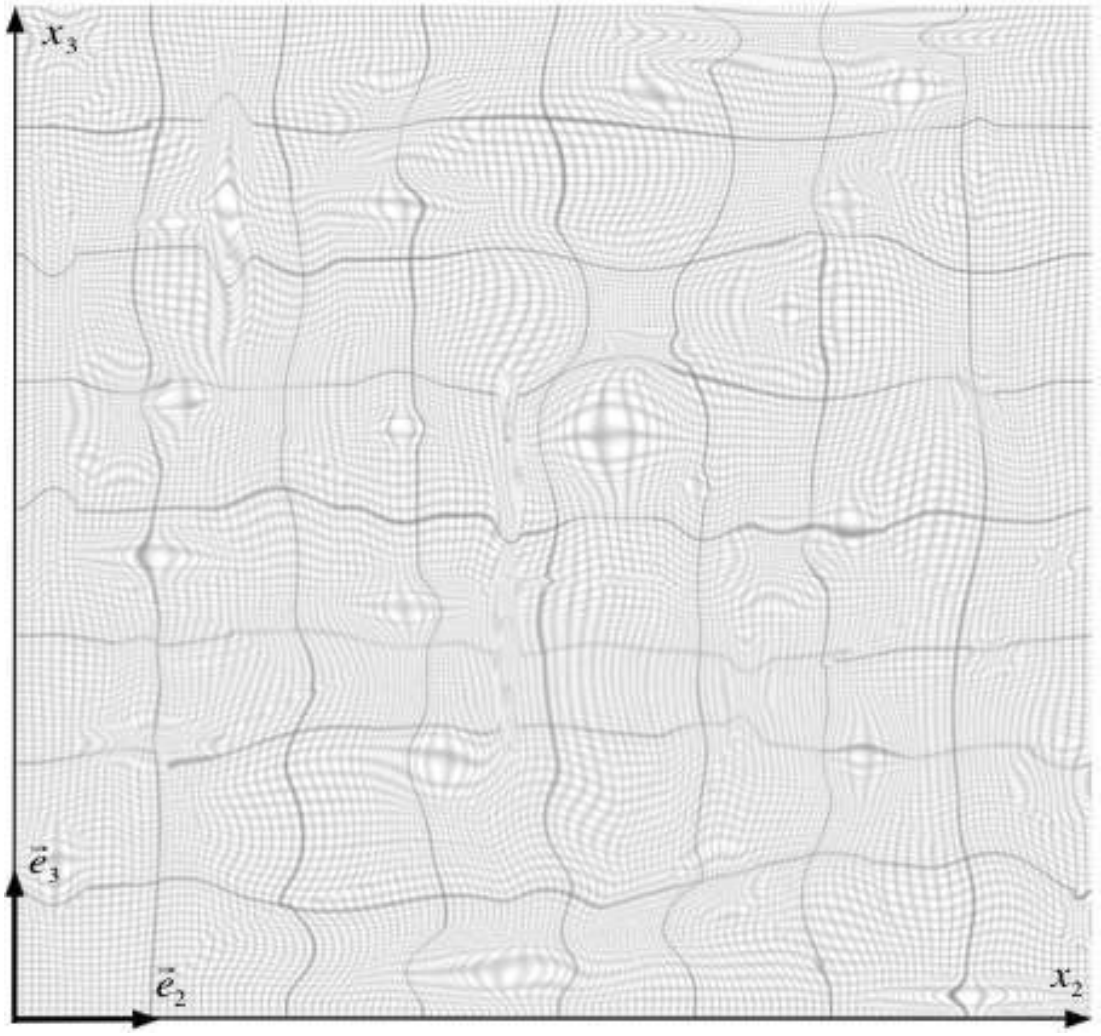


Figure 32.1 *- Représentation schématique du champ* $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$
de fluctuations «gravitationnelles» élémentaires

En présence des fluctuations *(32.23)*, calculons le produit de $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ par son complexe conjugué. Il vient

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t)\bullet\tau^{(p)*}(\vec{r},t)=\left(\sum_k \psi_{0k}\, e^{-\frac{|x_1-x_{1k}|}{\delta_{1k}}} e^{-\frac{|x_2-x_{2k}|}{\delta_{2k}}} e^{-\frac{|x_3-x_{3k}|}{\delta_{3k}}} e^{-i(\omega_k t+\varphi_k)}\right)\left(\sum_k \psi_{0k}\, e^{-\frac{|x_1-x_{1k}|}{\delta_{1k}}} e^{-\frac{|x_2-x_{2k}|}{\delta_{2k}}} e^{-\frac{|x_3-x_{3k}|}{\delta_{3k}}} e^{i(\omega_k t+\varphi_k)}\right) \quad (32.25)$$

Exprimons alors ce produit en séparant le groupe des termes du produit pour lesquels $m=n$ et le groupe des termes pour lesquels $m\neq n$

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t)\bullet\tau^{(p)*}(\vec{r},t)=\sum_{m=n}\left(\psi_{0m}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{1m}|}{\delta_{1m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{2m}|}{\delta_{2m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{3m}|}{\delta_{3m}}}\right)^2 \qquad (32.26)$$
$$+\sum_{m\neq n}\psi_{0m}\psi_{0n}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{1m}|}{\delta_{1m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{1n}|}{\delta_{1n}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{2m}|}{\delta_{2m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{1n}|}{\delta_{1n}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{3m}|}{\delta_{3m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{3n}|}{\delta_{3n}}}\,\mathrm{e}^{i(\omega_n-\omega_m)t}\,\mathrm{e}^{i(\varphi_n-\varphi_m)}$$

Le premier terme du produit a clairement une valeur non nulle puisque c'est une somme des carrés des amplitudes de chaque fluctuation aléatoire, alors que le deuxième terme ne peut avoir qu'une valeur nulle à cause des valeur aléatoires positives et négatives du produit $\mathrm{e}^{i(\omega_n-\omega_m)t}\mathrm{e}^{i(\varphi_n-\varphi_m)}$. On obtient ainsi un produit non nul qui n'est rien d'autre que le produit instantané de la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ par son complexe conjugué

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t)\bullet\tau^{(p)*}(\vec{r},t)=\sum_{m=n}\left(\psi_{0m}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{1m}|}{\delta_{1m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{2m}|}{\delta_{2m}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{3m}|}{\delta_{3m}}}\right)^2=\psi(\vec{r},t)\bullet\psi^*(\vec{r},t) \qquad (32.27)$$

Au chapitre 28, on a interprété le produit $\underline{\psi}(\vec{r},t)\bullet\underline{\psi}^*(\vec{r},t)$ comme la probabilité de présence de la singularité topologique responsable de la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$. On peut donc appliquer ici ce concept probabiliste et imaginer que la valeur instantanée non nulle de $\psi(\vec{r},t)\bullet\psi^*(\vec{r},t)$ correspond à *une probabilité de présence d'une singularité topologique virtuelle,* autrement dit une singularité topologique qui n'existe pas réellement, ce qui rejoint parfaitement l'interprétation usuelle des fluctuations quantiques du vide en physique quantique!

32.3 – Oscillations «gravitationnelles» stables

Est-il possible de former des fluctuations gravitationnelles oscillatoires stables?

Pour former des fluctuations gravitationnelles stables se présentant comme des oscillations longitudinales localisées et durables au sein du réseau cosmologique, l'énergie totale *(32.20)* de la fluctuation unique *(32.12)* pose un sérieux problème. En effet, si la fluctuation doit être une vibration localisée à la fréquence ω, elle devrait en principe posséder une énergie instantanée d'oscillation indépendante du temps, ce qui n'est manifestement pas le cas de l'expression *(32.20)*. Dans celle-ci, il apparaît en premier lieu un terme d'énergie de distorsion associé au module élastique $K_0-2K_1\tau_0$, qui présente une dépendance temporelle en $\cos\omega t$. Ce terme assez étonnant présente une valeur moyenne temporelle nulle. Pour que l'énergie de la fluctuation ne dépende pas de ce terme, il faut associer à la fluctuation *(32.12)* une deuxième fluctuation très proche et parfaitement similaire, telle qu'elle dépende de $-\cos\omega t$, et donc que

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t)\cong\psi_{0a}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{a1}(t)|}{\delta_{a1}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{a2}(t)|}{\delta_{a2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{a3}(t)|}{\delta_{a3}}}\cos\omega t-\psi_{0b}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{b1}(t)|}{\delta_{b1}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{b2}(t)|}{\delta_{b2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{b3}(t)|}{\delta_{b3}}}\cos\omega t \qquad (32.28)$$

L'énergie totale de cette fluctuation s'écrira alors

$$E^{fluctuation}(t)=\begin{bmatrix}-\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{a0}\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\right]\cos\omega t+\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{b0}\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\right]\cos\omega t\\ +K_1\left(\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}+\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\right)\cos^2\omega t\\ +(1/18)mn\left[\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\left(\delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2\right)\omega^2+\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\left(\delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2\right)\omega^2\right]\sin^2\omega t\end{bmatrix} \qquad (32.29)$$

Pour que le terme en $\cos\omega t$ disparaisse, il faut donc que

$$\psi_{a0}\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3} = \psi_{b0}\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3} \qquad (32.30)$$

Mais même si cette condition est satisfaite, il reste néanmoins le terme d'énergie de distorsion associé au module K_1 et le terme d'énergie cinétique qui ne sont pas indépendants du temps, et qui sont de moyenne non nulle, ce qui signifie que ce sont ces deux termes qui fournissent l'énergie d'oscillation de la fluctuation. Mais pour que l'énergie d'oscillation ait un sens, il faut que sa valeur instantanée soit indépendante du temps. Ces deux termes sont respectivement en $\cos^2\omega t$ et $\sin^2\omega t$. On pourrait par exemple imaginer que les coefficients de ces deux fonctions temporelles soient égaux, de sorte qu'ils puissent se combiner pour faire disparaître la dépendance temporelle. Il faudrait pour cela, en utilisant la relation *(32.11)* donnant la pulsation de la fluctuation, que

$$K_1\left[\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}+\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\right]=\frac{1}{18}\alpha\begin{bmatrix}+\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\left(\delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2\right)\left(\dfrac{1}{\delta_{a1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{a2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{a3}^2}\right)\\ +\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\left(\delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2\right)\left(\dfrac{1}{\delta_{b1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{b2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{b3}^2}\right)\end{bmatrix} \qquad (32.31)$$

En utilisant la condition *(32.26)*, et après quelques calculs, cette condition peut se réécrire

$$\begin{bmatrix}+\dfrac{\psi_{a0}}{\psi_{a0}+\psi_{b0}}\left(3+\dfrac{\delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2}{\delta_{a3}^2}+\dfrac{\delta_{a1}^2+\delta_{a3}^2}{\delta_{a2}^2}+\dfrac{\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2}{\delta_{a1}^2}\right)\\ +\dfrac{\psi_{b0}}{\psi_{a0}+\psi_{b0}}\left(3+\dfrac{\delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2}{\delta_{b3}^2}+\dfrac{\delta_{b1}^2+\delta_{b3}^2}{\delta_{b2}^2}+\dfrac{\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2}{\delta_{b1}^2}\right)\end{bmatrix}=\frac{18K_1}{K_0-4K_2/3-2K_1\left(1+\tau_0\right)}<1 \quad si \quad \tau_0<\tau_{0cr} \qquad (32.32)$$

Mais comme le terme au sein des crochets est supérieur à 3 et qu'il devrait être en même temps plus petit que 1 si $\tau_0<\tau_{0cr}$, il est impossible de faire disparaître les dépendances en $\cos^2\omega t$ et $\sin^2\omega t$ par addition du terme d'énergie potentiel associé au module K_1 et du terme d'énergie cinétique.

Il faut par conséquent imaginer un autre mécanisme ad hoc qui puisse assurer l'indépendance en le temps de l'énergie associée aux deux termes en $\cos^2\omega t$ et $\sin^2\omega t$. En fait, il est possible d'associer à la fluctuation représentée par *(32.28)* une autre fluctuation similaire, mais qui dépende de $\sin\omega t$ au lieu de $\cos\omega t$, et de telle sorte que la fluctuation totale soit composée de quatre fluctuations individuelles élémentaires *a*, *b, c* et *d* situées en des endroits différents du réseau, respectivement en $\vec{r}_a(t)$, $\vec{r}_b(t)$, $\vec{r}_c(t)$ *et* $\vec{r}_d(t)$, de telle sorte que

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t)\cong\begin{bmatrix}+\psi_{0a}\,e^{-\frac{|x_1-x_{a1}(t)|}{\delta_{a1}}}e^{-\frac{|x_2-x_{a2}(t)|}{\delta_{a2}}}e^{-\frac{|x_3-x_{a3}(t)|}{\delta_{a3}}}\cos\omega t-\psi_{0b}\,e^{-\frac{|x_1-x_{b1}(t)|}{\delta_{b1}}}e^{-\frac{|x_2-x_{b2}(t)|}{\delta_{b2}}}e^{-\frac{|x_3-x_{b3}(t)|}{\delta_{b3}}}\cos\omega t\\ \pm\psi_{0c}\,e^{-\frac{|x_1-x_{c1}(t)|}{\delta_{c1}}}e^{-\frac{|x_2-x_{c2}(t)|}{\delta_{c2}}}e^{-\frac{|x_3-x_{c3}(t)|}{\delta_{c3}}}\sin\omega t\ \mp\psi_{0d}\,e^{-\frac{|x_1-x_{d1}(t)|}{\delta_{d1}}}e^{-\frac{|x_2-x_{d2}(t)|}{\delta_{d2}}}e^{-\frac{|x_3-x_{d3}(t)|}{\delta_{d3}}}\sin\omega t\end{bmatrix} \qquad (32.33)$$

L'énergie de cette fluctuation s'écrit alors

$$E^{fluctuation}(t)=\begin{bmatrix}-\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{a0}\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\right]\cos\omega t+\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{b0}\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\right]\cos\omega t\\ \mp\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{c0}\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3}\right]\sin\omega t\ \pm\left[8\left(K_0-2K_1\tau_0\right)\psi_{d0}\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3}\right]\sin\omega t\\ +K_1\left[\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}+\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\right]\cos^2\omega t+K_1\left[\psi_{c0}^2\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3}+\psi_{d0}^2\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3}\right]\sin^2\omega t\\ +(1/18)mn\left[\psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\left(\delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2\right)\omega^2+\psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\left(\delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2\right)\omega^2\right]\sin^2\omega t\\ +(1/18)mn\left[\psi_{c0}^2\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3}\left(\delta_{c1}^2+\delta_{c2}^2+\delta_{c3}^2\right)\omega^2+\psi_{d0}^2\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3}\left(\delta_{d1}^2+\delta_{d2}^2+\delta_{d3}^2\right)\omega^2\right]\cos^2\omega t\end{bmatrix} \qquad (32.34)$$

Pour que tous les termes dépendants du temps disparaissent, il faut que toutes les équations suivantes soient satisfaites

$$\begin{cases} \psi_{a0}\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3} = \psi_{b0}\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3} \\ \psi_{c0}\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3} = \psi_{d0}\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3} \\ \psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3} + \psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3} = \psi_{c0}^2\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3} + \psi_{d0}^2\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3} \\ \psi_{a0}^2\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3}\left(\delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2\right) + \psi_{b0}^2\delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3}\left(\delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2\right) \\ \quad = \psi_{c0}^2\delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3}\left(\delta_{c1}^2+\delta_{c2}^2+\delta_{c3}^2\right) + \psi_{d0}^2\delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3}\left(\delta_{d1}^2+\delta_{d2}^2+\delta_{d3}^2\right) \end{cases} \quad (32.35)$$

$$\left\{ \frac{mn}{\alpha}\omega^2 = \left(\frac{1}{\delta_{a1}^2}+\frac{1}{\delta_{a2}^2}+\frac{1}{\delta_{a3}^2}\right) = \left(\frac{1}{\delta_{b1}^2}+\frac{1}{\delta_{b2}^2}+\frac{1}{\delta_{b3}^2}\right) = \left(\frac{1}{\delta_{c1}^2}+\frac{1}{\delta_{c2}^2}+\frac{1}{\delta_{c3}^2}\right) = \left(\frac{1}{\delta_{d1}^2}+\frac{1}{\delta_{d2}^2}+\frac{1}{\delta_{d3}^2}\right) \right.$$

En supposant alors que les amplitudes des quatre fluctuations soient égales

Hypothèse: $\psi_{a0} = \psi_{b0} = \psi_{c0} = \psi_{d0} = \psi_0$ (32.36)

il faut que les conditions suivantes sur les portées des quatre fluctuations soient satisfaites

$$\begin{cases} \delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3} = \delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3} = \delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3} = \delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3} = ABC \\ \dfrac{1}{\delta_{a1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{a2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{a3}^2} = \dfrac{1}{\delta_{b1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{b2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{b3}^2} = \dfrac{1}{\delta_{c1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{c2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{c3}^2} = \dfrac{1}{\delta_{d1}^2}+\dfrac{1}{\delta_{d2}^2}+\dfrac{1}{\delta_{d3}^2} = \dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1}{B^2}+\dfrac{1}{C^2} \\ \delta_{a1}^2+\delta_{a2}^2+\delta_{a3}^2 = \delta_{b1}^2+\delta_{b2}^2+\delta_{b3}^2 = \delta_{c1}^2+\delta_{c2}^2+\delta_{c3}^2 = A^2+B^2+C^2 \end{cases} \quad (32.37)$$

où le produit ABC est en fait proportionnel au *«volume»* occupé par la fluctuation au sein du réseau.

En ce cas, l'énergie globale de la fluctuation devient indépendante du temps et s'écrit

$$E^{\,fluctuation} = 2\psi_0^2 ABC\left[K_1 + \frac{\alpha}{18}\left(A^2+B^2+C^2\right)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)\right] \quad (32.38)$$

Mais comme $K_1 << \alpha \cong K_0$ pour $\tau_0 << \tau_{0cr}$, on déduit que l'énergie de la fluctuation est quasiment exclusivement de *l'énergie cinétique* si $\tau_0 << \tau_{0cr}$, de sorte que l'énergie globale et la fréquence de la fluctuation valent alors

$$\begin{cases} E^{\,fluctuation} \cong E^{cin} \cong \dfrac{K_0}{9}\psi_0^2 ABC\left(A^2+B^2+C^2\right)\left(\dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1}{B^2}+\dfrac{1}{C^2}\right) \\ \omega \cong c_t\sqrt{\dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1}{B^2}+\dfrac{1}{C^2}} \end{cases} \quad \text{si} \quad \tau_0 << \tau_{0cr} \quad (32.39)$$

La fluctuation s'écrit en ce cas

$$\tau^{(p)}(\vec{r},t) \cong \psi_0 \left[\begin{array}{l} +\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{a1}(t)|}{\delta_{a1}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{a2}(t)|}{\delta_{a2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{a3}(t)|}{\delta_{a3}}}\cos\omega t - \mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{b1}(t)|}{\delta_{b1}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{b2}(t)|}{\delta_{b2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{b3}(t)|}{\delta_{b3}}}\cos\omega t \\ \pm\mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{c1}(t)|}{\delta_{c1}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{c2}(t)|}{\delta_{c2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{c3}(t)|}{\delta_{c3}}}\sin\omega t \mp \mathrm{e}^{-\frac{|x_1-x_{d1}(t)|}{\delta_{d1}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_2-x_{d2}(t)|}{\delta_{d2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_3-x_{d3}(t)|}{\delta_{d3}}}\sin\omega t \end{array} \right] \quad (32.40)$$

dans laquelle les portées des fluctuations partielles doivent satisfaire les relations suivantes

$$\delta_{a1}\delta_{a2}\delta_{a3} = \delta_{b1}\delta_{b2}\delta_{b3} = \delta_{c1}\delta_{c2}\delta_{c3} = \delta_{d1}\delta_{d2}\delta_{d3} = ABC \quad (32.41)$$

Une telle fluctuation est représentée schématiquement à la figure 32.2.

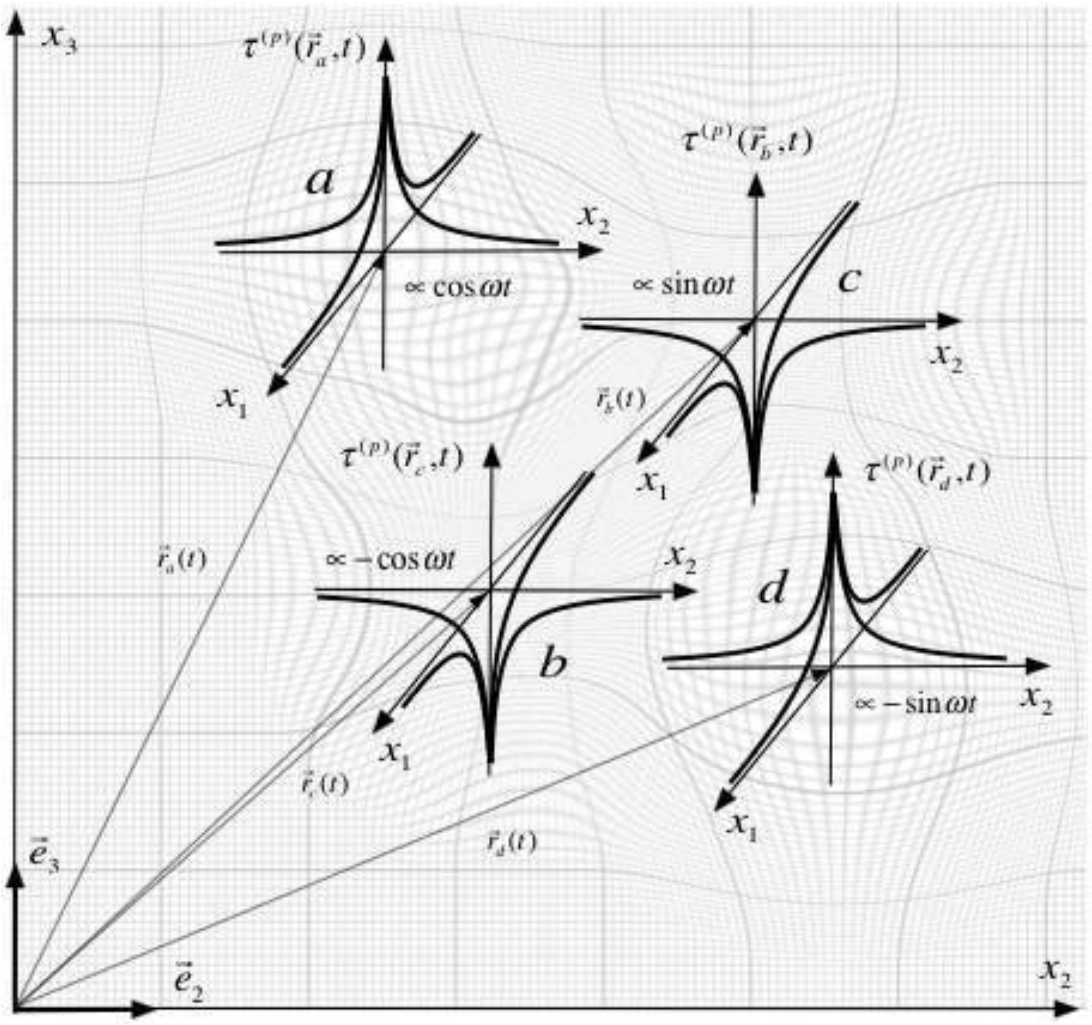


Figure 32.2 *- Représentation schématique des quatre fluctuations élémentaires composant la fluctuation* $\tau^{(p)}(\vec{r},t)$ *(32.40) d'énergie cinétique constante*

32.4 – Oscillations «gravitationnelles» macroscopiques stables dans un réseau cosmologique infini et multi-Univers

Dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$ du réseau cosmologique dans lequel il n'existe pas d'ondes longitudinales, il y a ainsi la possibilité de voir apparaître une *fluctuation macroscopique stable* formée d'un quadruplet de fluctuations élémentaires *(32.33)* qui représentent des vibrations locales longitudinales à une fréquence ω donnée, et de telle sorte à ce que l'énergie totale de la fluctuation globale *(32.39)*, essentiellement de nature cinétique, ne dépende pas du temps.
Considérons alors le cas d'une fluctuation macroscopique composée d'un quadruplet de fluctuations élémentaires telles qu'elles soient quasi-isotropes, c'est-à-dire que $\delta_{x1} \cong \delta_{x2} \cong \delta_{x3} \cong \delta$.
De la relation *(32.39)* on déduit la fréquence de pulsation ω de cette fluctuation macroscopique, qui est inversement proportionnelle à la portée δ , ainsi que l'énergie de la fluctuation qui est essentiellement de nature cinétique

$$\begin{cases} E^{fluctuation} \cong E^{cin} \cong K_0 \psi_0^2 \delta^3 \\ \omega \cong \sqrt{3}\dfrac{c_t}{\delta} \end{cases} \quad \text{si} \quad \tau_0 << \tau_{0cr} \qquad (32.42)$$

On en déduit que des fluctuations gravitationnelles macroscopiques de fortes amplitudes ψ_0 dans le domaine $\tau_0 < \tau_{0cr}$ auraient une fréquence de pulsation ω proportionnelle à l'inverse de leur portée δ et que leur énergie globale serait proportionnelle au produit du carré ψ_0^2 de leur amplitude et de leur volume δ^3, et indépendante de leur pulsation ω.

De l'existence possible de multi-Univers imbriqués en expansion et en contraction dans un réseau cosmologique parfait infini

Dans un réseau cosmologique parfait *qui serait de taille infinie*, il n'est pas possible d'envisager une expansion cosmologique comme celle que nous avons décrite au chapitre 16 (fig. 16.8 et 16.11a) dans le cas d'un réseau cosmologique parfait *fini* ! Par contre, on pourrait imaginer l'apparition d'une fluctuation macroscopique comme celle que nous venons de décrire (fig. 32.2), qui serait de volume δ^3 gigantesque, de sorte que sa fréquence d'oscillation *(32.42)* serait extrêmement basse. Et si son amplitude ψ_0 était aussi assez élevée, pour de minuscules observateurs ***HS*** qui seraient placés au sein de l'une de ces fluctuations élémentaires, celle-ci présenterait toutes les caractéristiques d'un Univers qui oscillerait entre une expansion maximum et une contraction maximum avec la pulsation ω. Ainsi, l'ensemble des quatre fluctuations élémentaires pourrait représenter un *multi-univers*. Et au sein de chacune de ces fluctuations élémentaires, c'est-à-dire de chacun des multi-univers, les observations des ***HS*** seraient très similaires à celles faites par des ***HS*** qui seraient placés au sein d'un Univers tel que celui décrit au chapitre 16 (fig. 16.8 et 16.11a) dans le cas d'un réseau cosmologique parfait fini!
Mais pour cela, il existe des conditions nécessaires qui peuvent être déduites de la figure 32.3 et qui seraient essentiellement les suivantes:
- *(i)* que le réseau cosmologique infini possède une expansion de fond τ_0 telle que $\tau_0 >> 1$ afin d'assurer que la formation de trous noirs lacunaires intervienne bien dans le domaine (grisé dans la figure 32.3) où l'expansion de cet Univers se fait à vitesse croissante,
- *(ii)* que l'amplitude ψ_0 de l'oscillation autour de $\tau = \tau_0$ soit suffisante pour que l'oscillation passe par le domaine des valeurs situées autour de $\tau \approx 0$ pour que le scénario de cosmologie présenté à la section 27.2 soit aussi applicable à ces multi-Univers!
Sous ces deux conditions, chacun de ces multi-Univers présente alors une expansion démarrant par une sorte de «big-bounce», mais qui n'implique plus que l'expansion volumique passe par une singularité telle que $\tau \to -\infty$, avec, au voisinage de son centre, une évolution cosmologique similaire à celle décrite à la section 27.2, présentant une phase avec une expansion à vitesse croissante pendant laquelle il se forment les trous noirs lacunaires, puis une phase à expansion à vitesse décroissante conduisant à l'expansion maximum, qui peut ou non passer par un domaine d'expansion situé au-delà de la valeur critique d'expansion τ_{0cr} où il apparaît des ondes longitudinales au détriment des fluctuations longitudinales localisées. Puis cet Univers passerait par une phase de contraction le conduisant vers un nouveau «big-bounce»!
Cependant, il est clair que le calcul complet du comportement de tels multi-Univers, n'est pas aussi simple que le calcul que nous venons de présenter, ne serait-ce que par le fait que nous

avons adopté l'hypothèse que $\tau_0 << \tau_{0cr}$ dans nos calculs, ce qui ne serait manifestement pas une hypothèse appropriée dans le cas des fluctuations gravitationnelles gigantesques pouvant former de tels multi-univers!

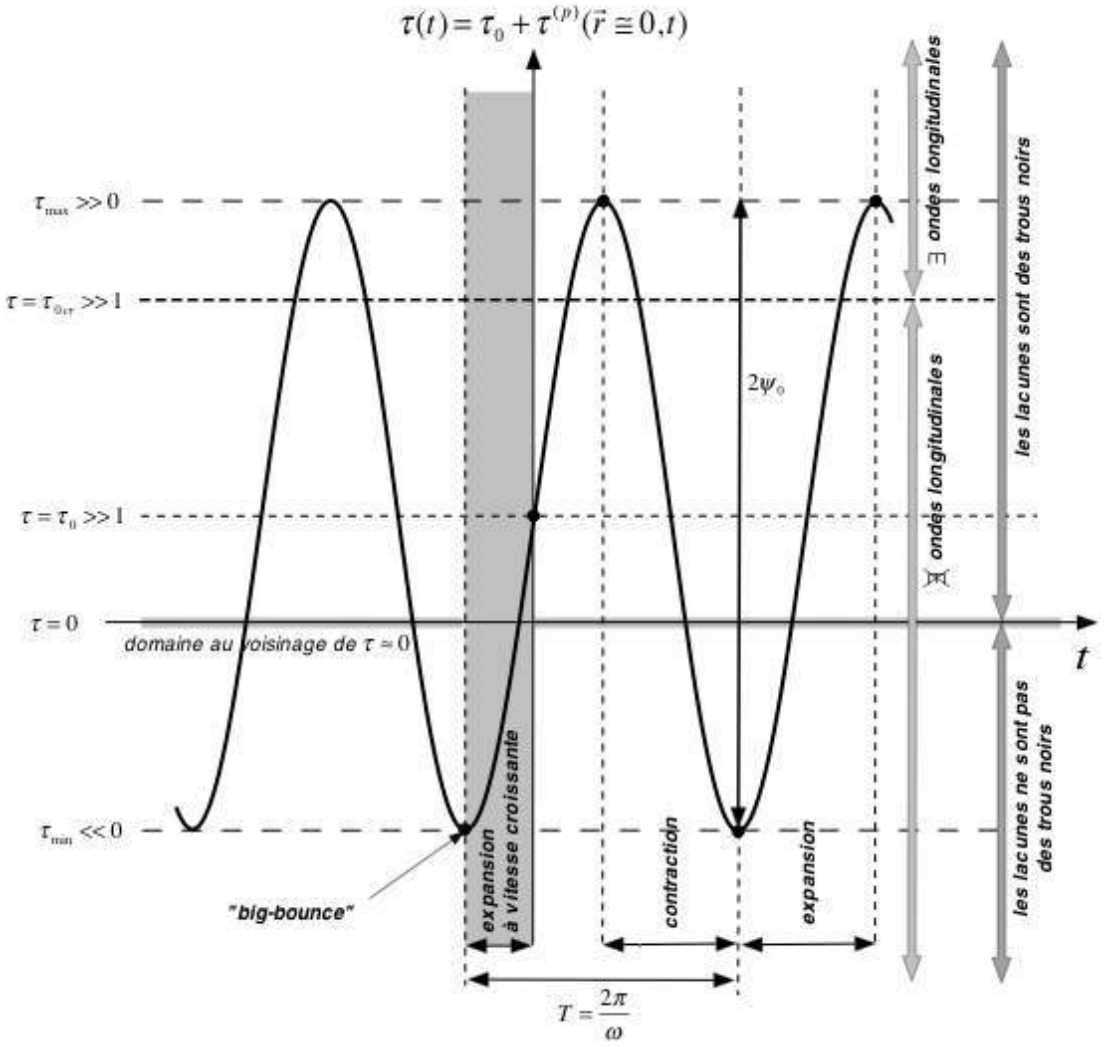


Figure 32.3 *- Expansions-contractions d'un des multi-Univers. Les comportements des forces gravitationnelles d'interaction entre les singularités topologiques y correspondent à ceux reportés à la figure 27.1*

32.5 – Oscillations «gravitationnelles» microscopiques quantifiées: d'hypothétiques quasi-particules «gravitons»

Considérons maintenant des *fluctuations longitudinales microscopiques stables*, c'est-à-dire des fluctuations «gravitationnelles» du type de celles décrites par la relation *(32.40),* d'énergie constante, mais pour lesquelles l'amplitude ψ_0 serait extrêmement faible.

D'une hypothétique quantification des fluctuations gravitationnelles stables

N'abordons ici que le cas très simple d'une fluctuation «gravitationnelle» stable *isotrope*, c'est-

à-dire telle que les portées dans les trois directions de l'espace soient égales, et supposons très hypothétiquement que l'énergie constante de celle-ci soit *quantifiée* de la même façon qu'étaient quantifiées les photons, fluctuations transversales «électromagnétiques», en utilisant la conjecture 11 introduite précédemment. En reprenant alors les relations *(32.42)* et en introduisant *l'énergie quantifiée* $2\hbar\omega$ correspondant aux quatre degrés de liberté d'oscillations de la fluctuation, on obtient une fluctuation isotrope stable, localisée et quantifiée, de portée δ, de pulsation ω, d'énergie cinétique $E^{fluctuation}$ et d'amplitude ψ_0 telles que

$$\begin{cases} \omega \cong \sqrt{3}\dfrac{c_t}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta \cong \sqrt{3}\dfrac{c_t}{\omega} \\ E^{fluctuation} \cong E^{cin} \cong K_0 \psi_0^2 \delta^3 = 2\hbar\omega \qquad \text{si} \qquad \tau_0 << \tau_{0cr} \\ \psi_0 \cong \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\hbar c_t}{K_0}}\dfrac{1}{\delta^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\hbar c_t}{K_0}}\left(\dfrac{\omega}{c_t}\right)^2 \end{cases} \qquad (32.43)$$

Cette fluctuation stable quantifiée présenterait donc une extension spatiale δ proportionnelle à l'inverse de sa pulsation, ainsi qu'une énergie et une amplitude proportionnelles à sa pulsation ω. Cette fluctuation n'aurait pas besoin de se déplacer au sein du réseau, quant bien même elle pourrait se balader au sein du réseau. Il s'agit donc là d'une quasi-particule au même titre que le photon dans le cas des ondes transversales «électromagnétiques» de rotation, mais c'est une quasi-particule qui est associée aux vibrations longitudinales «gravitationnelles» d'expansion du réseau. On pourrait donc parler en ce cas de quasi-particules stables de type *«gravitons»*.

En fait, ces gravitons n'ont rien à voir avec les gravitons recherchés dans le cadre des essais de quantification de la relativité générale. Les gravitons postulés dans notre théorie sont des quasi-particules énergétiques stables, qui peuvent voyager au sein du réseau, mais qui ne sont pas astreintes à se déplacer à la vitesse des ondes transversales, au contraire des gravitons de la relativité générale qui sont supposés se déplacer à la vitesse de la lumière. De plus, nos gravitons ne sont pas des porteurs de l'interaction gravitationnelle entre deux singularités, mais uniquement des fluctuations énergétiques localisées et quantifiées du champ d'expansion, au contraire des gravitons de la relativité générale, qui sont considérés comme les particules médiatrices de l'interaction gravitationnelle!

La configuration des quatre fluctuations élémentaires composant la quasi-particule «graviton» peut être très complexe. La seule condition étant évidemment que les quatre fluctuations élémentaires puissent échanger de l'énergie entre elles afin de maintenir l'énergie cinétique totale constante. On pourrait par exemple imaginer des «gravitons» axiaux, c'est-à-dire des quasi-particules pour lesquelles les quatre fluctuations élémentaires seraient alignées selon un axe préférentiel. En ce cas, on peut donner deux exemples extrêmes de telles quasi-particules, suivant qu'elles sont condensées ou étalées selon l'axe préférentiel:

«Graviton» axial condensé selon l'axe $\boldsymbol{Ox_2}$

Supposons une fluctuation gravitationnelle condensée selon l'axe $\boldsymbol{Ox_2}$, avec des portées de la fluctuation telles que les portées δ selon les axes $\boldsymbol{Ox_1}$ et $\boldsymbol{Ox_3}$ soient égales et nettement su-

périeures à la portée δ_2 selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. On déduit alors que

$$\delta >> \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega \cong \dfrac{c_t}{\delta_2} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 \cong \dfrac{c_t}{\omega} \\ E^{fluctuation} \cong E^{cin} \cong \dfrac{2K_0}{9}\psi_0^2\delta^4 = 2\hbar\omega \\ \psi_0 = 3\sqrt{\dfrac{\hbar}{K_0}}\dfrac{\sqrt{\omega}}{\delta^2} = 3\sqrt{\dfrac{\hbar c_t}{K_0}}\dfrac{1}{\delta^2\sqrt{\delta_2}} \end{cases} \qquad (32.44)$$

On constate que c'est l'étalement δ_2 de la fluctuation selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ qui est fixe et dépend de la pulsation ω de la quasi-particule, et que l'amplitude ψ_0 et l'étalement δ selon les axes perpendiculaires à $\boldsymbol{O}x_2$ sont liés, mais pas fixés, de sorte que cette quasi-particule peut se déformer en s'étalant ou se retrécissant selon les axes perpendiculaires à $\boldsymbol{O}x_2$! Cet effet est à nouveau clairement un aspect de la fameuse *non-localité de la physique quantique*, telle qu'on l'a décrite dans le cas des photons!

«Graviton» axial étalé selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$

Supposons maintenant une fluctuation gravitationnelle étalée selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$, avec des portées de la fluctuation telles que les portées δ selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$ soient égales et nettement inférieures à la portée δ_2 selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. On déduit alors que

$$\delta_2 >> \delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega \cong \sqrt{2}c_t\dfrac{1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta \cong \sqrt{2}c_t\dfrac{1}{\omega} \\ E^{fluctuation} \cong E^{cin} \cong \dfrac{2K_0}{9}\psi_0^2\delta_2^4 = 2\hbar\omega \\ \psi_0 = 3\sqrt{\dfrac{\hbar}{K_0}}\dfrac{\sqrt{\omega}}{\delta_2^2} = 3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\hbar c_t}{K_0}}\dfrac{1}{\delta_2^2\sqrt{\delta}} \end{cases} \qquad (32.45)$$

On constate cette fois que ce sont les étalements δ de la fluctuation selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$ qui sont fixes et dépendent de la pulsation ω de la quasi-particule, et que l'amplitude ψ_0 et l'étalement δ_2 selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ sont liés, mais pas fixés, de sorte que cette quasi-particule peut se déformer en s'étalant ou se retrécissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$! Cet effet est aussi un aspect de la fameuse *non-localité de la physique quantique*!

On en déduit qu'un «graviton» axiale de pulsation ω, et donc d'énergie cinétique $\hbar\omega$, peut très bien osciller entre une forme très condensée selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ et très étendue selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$, et une forme opposée, très étendue selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$ et très condensée selon les axes $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_3$.

Dans la figure 32.4, on a représenté schématiquement le cas d'un hypothétique «graviton» axiale dans le cas où celui-ci est très étalé selon l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. Dans cette représentation, on a reporté graphiquement l'expansion volumique locale instantanée du «graviton», en spécifiant les oscillations des quatre composantes en $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$.

Remarquons pour terminer que ces hypothétiques quasi-particules «gravitons» sont très différentes des hypothétiques fluctuations gravitationnelles évanescentes analogues aux fluctua-

tions quantiques du vide décrites précédemment (fig. 32.1). En effet, dans le cas des fluctuations gravitationnelles évanescentes, l'énergie de la fluctuation est essentiellement une *énergie de distorsion élastique* associée au module K_0 du réseau cosmologique, oscillant entre une valeur positive et négative, et de valeur moyenne nulle, alors que l'énergie des hypothétiques quasi-particules «gravitons» est essentiellement *de nature cinétique* et possède une valeur constante, ce qui assure leur stabilité à long terme. Et pour obtenir cette stabilité, la quasi-particule doit être composée de quatre fluctuations fortement corrélées et indissociables qui assurent la constance de l'énergie, de la même façon que les quasi-particules «photons» doivent être composées de deux fluctuations de rotation perpendiculaires et déphasées, leur donnant leur hélicité et assurant ainsi la constance de leur énergie. Il y a donc une analogie forte entre les quasi-particules «photons» et «gravitons», non seulement de par leur constitution assurant la constance de leur énergie, mais aussi de par leur *non-localité*, à savoir leur aptitude à s'étaler dans l'espace en conservant leur identité et leur énergie, propriété qui est l'apanage typique de la physique quantique!

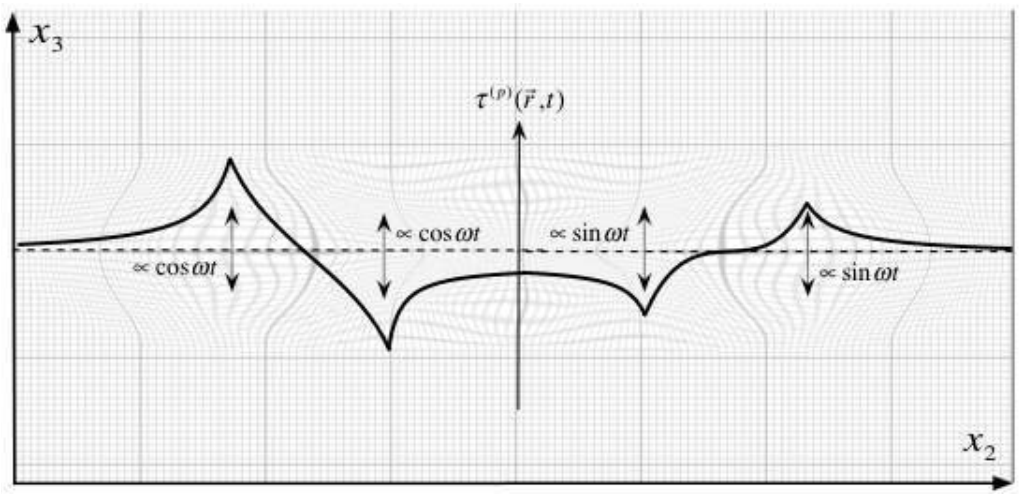


Figure 32.4 *- Représentation très schématique d'un «graviton» axial étendu selon l'axe* $\mathbf{O}x_2$

Conclusion

Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, cet essai n'a pas la prétention de présenter une *Théorie du Tout* parfaitement élaborée, mais bien de montrer qu'une approche rigoureuse des réseaux solides élastiques par un système de coordonnées d'Euler, telle que nous l'avons développée dans cet essai, fournit un *cadre d'investigation* beaucoup plus simple que les géométries différentielles telles que celles utilisées par exemple en relativité générale, mais potentiellement très riche et fertile puisqu'on a pu montrer *assez simplement* qu'il est possible *(i)* d'y faire apparaître des analogies très fortes et souvent parfaites avec toutes les grandes théories physiques du macrocosme et du microcosme, comme les équations de Maxwell, la relativité restreinte, la relativité générale, la gravitation newtonienne, la cosmologie moderne, la physique quantique et le modèle standard des particules élémentaires, et *(ii)* d'y faire apparaître des ponts unificateurs forts entre ces diverses théories.

Du rôle central de l'équation de Newton du réseau cosmologique

Depuis le début de la seconde partie de cet essai, on constate que *l'équation de Newton (13.14)* que nous avons établie au chapitre 13 pour un *réseau cosmologique isotrope imaginaire* a partout joué un rôle central et capital, et que c'est elle qui est à la base de la plupart des propriétés étonnantes du *«réseau cosmologique parfait»*, parmi lesquelles:

- la *propagation d'ondes transversales couplées à des ondelettes longitudinales*, gérée par l'équation de Newton *(13.14)*, qui implique que des ondes transversales pures ne peuvent exister qu'avec une polarisation circulaire (ce qui est une propriété fondamentale des photons),
- l'existence de domaines d'expansion ($\tau_0 < \tau_{0cr}$) dans lesquels *il n'existe pas de solutions d'ondes longitudinales* à l'équation de Newton *(13.14)*, mais uniquement *des solutions quasi-statiques* qui sont à la base des phénomènes d'interaction gravitationnelle entre singularités topologiques, ou *des modes de vibration longitudinales localisées*, qui sont à la base *de la dynamique quantique et du spin des singularités topologiques* localisées,
- la *courbure des rayons d'onde* dans des gradients de l'expansion volumique, qui est aussi une conséquence directe de l'équation *(13.14)* de Newton, et qui prédit la possibilité d'existence de trous noirs qui capturent irrémédiablement les perturbations transversales,
- les *équations de Maxwell complètes* (tableau 17.1) pour le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ lorsque le champ d'expansion volumique est homogène, qui montrent que l'équation $\partial \vec{B} / \partial t = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}$ de l'électromagnétisme n'est rien d'autre que l'expression de l'équation de Newton *(13.14)* du réseau cosmologique appliquée à ce cas particulier,
- la r*elativité restreinte*, la contraction des règles et la dilatation du temps pour un observateur en mouvement au sein et par rapport au réseau, qui est une conséquence directe de la première équation partielle *(18.7)* de Newton,
- la *gravitation newtonienne* et la *relativité générale*, qui sont des conséquences directes de la

solution quasi-statique de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton,

- la *courbure spatiale de l'espace* pour l'observateur ***GO*** extérieur au réseau et la *courbure de l'espace-temps pour les observateurs locaux* ***HS*** au sein même du réseau, qui implique une analogie directe entre la divergence de l'équation de Newton *(24.64)* et la fameuse équation d'Einstein de *divergence nulle* $\vec{\nabla} \bullet \boldsymbol{T} = 0$ *du tenseur d'énergie-impulsion (24.67)* qui assure que les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique sont respectées,

- les *trous noirs*, solutions statiques de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton en présence de lacunes macroscopiques du réseau lorsque $\tau_0 > 1$,

- les *étoiles à neutrons ou pulsars*, solutions statiques de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton en présence d'amas interstitiels macroscopiques dans le réseau,

- la *force d'interaction faible* entre les boucles de dislocation coin et les boucles de désinclinaison vis, qui est aussi une conséquence de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton,

- la *physique quantique*, les *fonctions d'onde*, l'*équation d'onde de Schrödinger*, et la *notion de spin*, qui sont des conséquences de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton dans le cas dynamique des perturbations gravitationnelles associées aux singularités topologiques localisées du réseau cosmologique,

- les *photons*, quanta de la solution transversale de polarisation circulaire de l'équation de Newton *(13.14)*

- et finalement des concepts quantiques purs et durs, tels que *les bosons, les fermions* et *l'indiscernabilité des singularités topologiques,* ainsi que *le principe d'exclusion de Pauli*, qui se déduisent tous directement de l'application de la deuxième équation partielle *(18.9)* de Newton à plusieurs singularités topologiques localisées.

De l'importance de la structure microscopique du réseau cosmologique

La structure du réseau cosmologique joue aussi un rôle prépondérant dans les analogies que nous avons développées, mais c'est surtout au niveau des structures des singularités topologiques microscopiques en boucles qu'elle joue un rôle crucial. Il a fallu en effet imaginé un réseau cubique avec des *plans (imaginairement «colorés» en rouge, vert et bleu) satisfaisant à certaines règles simples concernant leur arrangement* pour retrouver des boucles topologiques étonnamment analogues à toutes les particules, leptons, quarks, bosons intermédiaires et gluons de la première famille de particules élémentaires du Modèle Standard, ainsi qu'une force à comportement asymptotique entre les singularités analogues aux quarks, tout-à-fait similaire à la force forte du Modèle Standard, et qui oblige la formation de doublets ou de triplets de boucles de singularité analogues aux mésons et aux baryons du Modèle Standard!
Et il a aussi fallu imaginer une structure plus complexe des boucles de dislocation coin dans ce réseau cosmologique particulier, basée sur des *doublets de boucles de désinclinaison coin*, pour essayer d'expliquer les trois familles du Modèle Standard des particules élémentaires.
De cette énumération des rôles importants de l'équation de Newton et de la structure du réseau cosmologique, on peut conclure que *l'inertie newtonienne du réseau dans l'espace absolu, son élasticité par cisaillement, par rotation et par expansion volumique*, *et sa structure microscopique* sont les trois principaux ingrédients de la théorie du réseau cosmologique et sont les clefs d'explication de toutes les propriétés de ce réseau particulier, et donc, par analogie, de

l'univers réel, même s'il reste encore de nombreux points obscurs dans cette analogie !

Des points encore obscurs concernant le réseau cosmologique

Il est clair que le réseau cosmologique que nous avons développé tout au long de ce livre, malgré les succès indéniables auxquelles il nous a amené, n'est de loin pas parfait. Il subsiste encore de nombreux points obscurs qui mériteraient d'être étudiés, et si possible élucidés, parmi lesquels on citera les plus importants, dans l'ordre d'apparition au cours de l'exposé, et sous forme de questionnements:

- existe-t-il réellement des «corpuscules» du réseau cosmologique qui possèderaient une masse d'inertie purement newtonienne dans l'espace absolu, et quelles sont les relations existant entre ces «corpuscules» et le boson de Higgs du Modèle Standard?
- quelle est la nature physique de l'élasticité du réseau cosmologique, conduisant aux modules $K_0 = K_3 > 0,\ 0 < K_1 << K_0,\ 0 \le K_2 << K_3$ permettant d'exprimer l'énergie libre élastique du réseau par unité de volume?
- d'où provient l'énergie cinétique du réseau nécessaire aux comportements de l'expansion cosmologique du réseau?
- quelle rôle pourraient jouer les «corpuscules» du réseau cosmologique dans d'hypothétiques phénomènes de diffusion au sein du réseau cosmologique (qui pourraient très bien expliquer certaines propriétés du magnétisme)?
- existe-t-il réellement des charges électriques vectorielles?
- que valent exactement les paramètres $\zeta_{BV},\ \zeta_{BC},\ \zeta_{BM}$ introduits pour calculer l'énergie des boucles, et sont-ils vraiment indépendants de l'expansion de fond du réseau?
- quel pourrait être le rôle des boucles de dislocation mixte de glissement dans notre analogie avec les particules élémentaires?
- quel est la pertinence de l'analogie entre amas de lacunes et trous noirs, ainsi qu'entre amas d'interstitiels et étoiles à neutrons?
- quelle explication physique et quelles valeurs numériques faut-il donner aux paramètres $\alpha_{BV},\ \beta_{BV},\ \alpha_{BC},\ \beta_{BC},\ \alpha_{BM},\ \beta_{BM}$ utilisés pour le calcul de la dépendance de l'énergie des boucles en l'expansion de fond du réseau?
- comment expliquer physiquement le fait que les paramètres a et b utilisés pour retrouver l'horloge et les règles de l'observateur ***HS*** doivent valoir exactement 1/4?
- quelle est la dépendance thermique de l'énergie libre du réseau cosmologique, et celle-ci pourrait-elle justifier une sorte de «liquéfaction» du réseau pour des valeurs extrêmement petites de l'expansion volumique, au voisinage du «big-bang»?
- comment, d'un point de vue topologique, une boucle de dislocation ou une boucle de désinclinaison peut-elle tourner sur elle-même?
- qu'est-ce qui fait qu'une certaine boucle topologique possède un spin 1/2 ou un spin 1?
- que sont exactement la structure du réseau cosmologique et la nature des plans colorés de ce réseau, et quel est le lien entre ces plans colorés et les «corpuscules» composant le réseau?
- comment les singularités topologiques analogiques aux quarks peuvent-elles posséder un spin alors qu'elles sont liées aux autres par le tube d'énergie de faute?
- et bien d'autres questions encore, de nature purement physique, ou même philosophique!

Du pouvoir unificateur de notre théorie du réseau cosmologique

En fait, même s'il y reste encore de nombreux points obscurs, il apparaît que notre théorie du réseau cosmologique eulérien contient bien des analogies fortes avec toutes les grandes théories de la physique moderne, et qu'en cela elle a une *puissance unificatrice* énorme. Et cette théorie du réseau cosmologique est *très simple*, au contraire des théories de supercordes ou de la théorie M que proposent les théoriciens pour unifier «de force» les théories physiques en *quantifiant la gravité* et en y introduisant indépendamment les quatre interactions élémentaires, ce qui conduit à des théories mathématiques *extrêmement compliquées*, dans des espaces très complexes à n dimensions (n=11 pour la théorie M!), et qui n'ont jusqu'à ce jour fait preuve d'aucun pouvoir prédictif!
Il est intéressant de constater ici que les théories de supercordes font appel à des cordes et des branes dans des espaces multidimensionnels compliqués pour quantifier la gravité, alors que notre théorie fait aussi appel à des cordes, des boucles et des membranes, mais qui sont alors de simples singularités topologiques d'un réseau purement tridimensionnel, avec une dimension supplémentaire de temps absolu complètement découplée des dimensions d'espace, puisque le temps peut y être mesuré par l'horloge universelle d'un ***GO*** dans l'espace absolu.
Et si l'expansion volumique quasi-statique de ce réseau à l'échelle macroscopique est l'expression des phénomènes attribués à la gravitation, les fluctuations dynamiques de l'expansion de ce réseau à l'échelle microscopique ne sont rien d'autre que l'expression des phénomènes attribués à la physique quantique! Il est par conséquent erroné de chercher à quantifier la théorie de la gravitation, puisque la physique quantique, c'est précisément l'expression des fluctuations dynamiques de la gravitation à l'échelle microscopique!

De l'épistémologie et des conséquences de cet essai

Il est vrai que, dans cet essai, rien ne vient encore donner une explication définitive à l'existence de l'univers, à la raison d'être du big-bang, et pourquoi l'univers pourrait se comporter comme un réseau solide. Ces points restent, du moins pour l'instant, du ressort de la philosophie ou des croyances individuelles de chacun. Mais, d'un point de vue épistémologique, cet essai montre qu'il est possible de trouver *un cadre très intéressant pour unifier les diverses théories physiques actuelles*, cadre dans lequel il n'existerait plus beaucoup de phénomènes mystérieux autres que *la raison d'être de l'univers*. Et cette approche est basée en fait sur un seul concept absolument essentiel, mais d'une simplicité désarmante, qu'on pourrait énoncer de la manière suivante, en s'inspirant d'une citation célèbre du grand physicien que fut Richard P. Feynman:

> *«Il est possible d'observer et de mesurer depuis l'extérieur, avec un référentiel eulérien absolu nanti de règles fixes et immuables et d'une horloge universelle, les évolutions spatio-temporelles d'un réseau solide possédant à la fois une certaine structure microscopique, des propriétés élastiques particulières et des propriétés d'inertie newtonienne. Cette seule phrase contient, comme vous le verrez, une quantité énorme d'informations sur l'univers, pour peu que l'on y mette un peu d'imagination et de réflexion.»*

ANNEXES

A) Eléments de mécanique analytique

B) Eléments de physique quantique

C) Modèle standard des particules élémentaires

D) Les conjectures du réseau cosmologique

E) Formulaire mathématique

Annexe A

Eléments de mécanique analytique

La mécanique analytique est un formalisme qui permet de résoudre de manière très élégante les problèmes de mécanique, mais qui intervient aussi dans le formalisme de la physique quantique.

A.1 - Les bases de la mécanique analytique

Pour décrire un système mécanique composé de N éléments et soumis à des liaisons, c'est-à-dire à des conditions qui limitent les mouvements possibles du système, il est toujours possible d'introduire les liaisons sous forme de forces de liaison, de sorte que les équations de Newton de chaque élément a du système s'écrivent

$$m_{(\alpha)}\vec{a}_{(\alpha)} = \vec{F}_{(\alpha)} + \vec{R}_{(\alpha)} \quad \text{où} \quad \alpha = 1, \ldots, N \tag{A.1}$$

dans lesquelles $\vec{F}_{(\alpha)}$ représente la résultante des forces appliquées et $\vec{R}_{(\alpha)}$ représente la résultante des forces de liaisons.

Les coordonnées généralisées

On peut aussi introduire un ensemble de k *coordonnées généralisées* q_i, afin que la position $P_{(\alpha)}$ de chacun des N éléments du sytème soit univoquement déterminée par les relations

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = \vec{\xi}_{(\alpha)}\left(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, t\right) \tag{A.2}$$

On appelle alors *déplacement virtuel compatible* $\delta\vec{\xi}_{(\alpha)}$ tout déplacement de la position $P_{(\alpha)}$ de l'élément α, tel qu'il satisfait des variations δq_i des coordonnées généralisées q_i et on parle de *système holonôme* à k degrés de liberté si le choix des coordonnées q_i et des forces de liaisons est tel qu'il ne subsiste aucune condition sur les variables $\left\{q_i, \dot{q}_i\right\}$, et

$$\delta\vec{\xi}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\, \delta q_i \tag{A.3}$$

Pour tout déplacement virtuel compatible $\delta\vec{\xi}_{(\alpha)}$, on parle de liaisons parfaites si celles-ci satisfont, la condition des travaux virtuels nuls

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_{(\alpha)}\delta\vec{\xi}_{(\alpha)} = 0 \tag{A.4}$$

qui implique que la somme des travaux effectués par les forces de liaison est nulle, autrement dit que les forces de liaison impliquées ne sont pas des forces de frottement dissipatives.
Pour un système mécanique soumis à des liaisons parfaites, les relations *(A.1)* et *(A.4)* permettent de déduire les *équations de D'Alembert* du système pour tout déplacement virtuel compatible

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(m_{(\alpha)}\vec{a}_{(\alpha)}-\vec{F}_{(\alpha)}\right)\delta\vec{\xi}_{(\alpha)}=0 \qquad (A.5)$$

On parle finalement de *système holonôme à liaisons indépendantes du temps* si les relations *(A.2)* ne font pas apparaître explicitement le temps

$$\vec{\xi}_{(\alpha)}=\vec{\xi}_{(\alpha)}\left(q_1,q_2,q_3,\ \ldots\ ,q_k\right) \qquad (A.6)$$

A.2 - Le formalisme du lagrangien

L'énergie cinétique T d'un système mécanique représenté par ses coordonnées généralisées *(A.2)* s'écrit

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_{(\alpha)}\left(\frac{d\vec{\xi}_{(\alpha)}}{dt}\right)^2=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_{(\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\ \dot{q}_i+\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial t}\right)^2 \qquad (A.7)$$

qui se transforme finalement en

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}m_{(\alpha)}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_j}\ \dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{i}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial t}\ \dot{q}_i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial t}\right)^2\right] \qquad (A.8)$$

On constate que si les liaisons sont indépendantes du temps *(A.6)*, l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive en les $\dot{q}_i$, ne dépendant pas du temps t. A partir de l'énergie cinétique, on calcule facilement la relation suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}m_{(\alpha)}\vec{v}_{(\alpha)}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\right)=\sum_{\alpha=1}^{N}m_{(\alpha)}\vec{a}_{(\alpha)}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}+\frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (A.9)$$

dont on déduit que, pour tout déplacement virtuel compatible, on a

$$\sum_{\alpha=1}^{N}m_{(\alpha)}\vec{a}_{(\alpha)}\delta\vec{\xi}_{(\alpha)}=\sum_{\alpha,i}m_{(\alpha)}\vec{a}_{(\alpha)}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\ \delta q_i=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i \qquad (A.10)$$

D'autre part, si le système est soumis à des forces $\vec{F}_{(\alpha)}$ dérivant d'un potentiel V, on a

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_{(\alpha)}\delta\vec{\xi}_{(\alpha)}=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_{(\alpha)}\frac{\partial\vec{\xi}_{(\alpha)}}{\partial q_i}\delta q_i=-\sum_{\alpha,n,i}\frac{\partial V}{\partial\xi_{(\alpha)n}}\frac{\partial\xi_{(\alpha)n}}{\partial q_i}\ \delta q_i=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial q_i}\ \delta q_i \qquad (A.11)$$

où $\xi_{(\alpha)n}$ sont les composantes du vecteur $\vec{\xi}_{(\alpha)}$. Les deux dernières relations permettent alors de réécrire les équations de D'Alembert *(A.5)* sous la forme suivante

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i=0 \qquad (A.12)$$

Comme on considère un système holonôme, les δq_i sont indépendants, et si on admet encore que le potentiel V est indépendant des vitesses $\dot{q}_i$, on peut introduire *le lagrangien* L du système et écrire *les équations de Lagrange* du système sous la forme

$$L\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)=T\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)-V\left(q_i,t\right) \qquad (A.13)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,3,\ \ldots\ ,k\} \qquad (A.14)$$

On peut encore définir une grandeur p_i, appelée *impulsion généralisée* ou *moment conjugué à* q_i, par la relation suivante

$$p_i\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{A.15}$$

Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de q_i, l'impulsion conjuguée p_i est une constante du mouvement. En effet, d'après les équations de Lagrange *(A.14),* on a

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{A.16}$$

A.3 - Le formalisme de l'hamiltonien

Grâce à la définition des impulsions conjuguées p_i, on peut introduire une nouvelle grandeur H telle que

$$H\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)\dot{q}_i-L\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) \tag{A.17}$$

En utilisant la *transformation de Legendre*, par inversion des relations *(A.15),* c'est-à-dire en extrayant $\dot{q}_i=\dot{q}_i\left(q_j,p_j,t\right)$, on fait apparaître *l'hamiltonien* H du système

$$H\left(q_i,p_i,t\right)=\sum_{i=1}^{k}p_i\dot{q}_i-L=H\left(q_i,\dot{q}_i\left(q_j,p_j,t\right),t\right) \tag{A.18}$$

L'hamiltonien d'un système satisfait un ensemble de relations qu'on déduit de sa définition, des équations de Lagrange et de la définition des impulsions généralisées

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=\displaystyle\sum_j p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{dp_i}{dt}=-\dot{p}_i\\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i+\displaystyle\sum_j p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}-\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}=\dot{q}_i\end{cases} \tag{A.19}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dH}{dt}=\displaystyle\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}\\ \dfrac{dH}{dt}=\displaystyle\sum_j\left(\dot{p}_j\dot{q}_j+p_j\ddot{q}_j\right)-\frac{\partial L}{\partial t}-\sum_j\left(\frac{\partial l}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}\end{cases} \tag{A.20}$$

On en déduit *les équations de Hamilton* du système

$$\begin{cases}\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}\qquad(i=1,2,3,\ldots,k) \tag{A.21}$$

ainsi que la propriété suivante

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{A.22}$$

Si l'hamiltonien ne dépend pas explicitement de q_i, alors l'impulsion p_i est une constante du mouvement. En effet, d'après *(A.21)*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad (A.23)$$

Si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, alors l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et il est une constante du mouvement. En effet, d'après *(A.22)*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (A.24)$$

Si l'énergie cinétique T ne dépend pas explicitement du temps (liaisons indépendantes du temps), et comme l'énergie potentielle V ne dépend pas des vitesses $\dot{q}_i$ par hypothèse, alors l'hamiltonien H représente l'énergie mécanique du système. En effet, grâce à la relation *(A. 13),* on vérifie que, si $\partial \vec{\xi}_{(\alpha)} / \partial t = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (A.25)$$

de sorte que

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \qquad (A.26)$$

Annexe B

Eléments de physique quantique

La physique quantique est le formalisme qui permet de calculer le comportement des systèmes physiques microscopiques.

B.1 - La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger

La fonction d'onde d'un système

En mécanique quantique, c'est une *fonction d'onde complexe* $\Psi(\vec{\xi},t)$ qui décrit un système de une ou plusieurs particules. Une des interprétations possibles de la fonction d'onde est d'attribuer au carré de la norme de la fonction d'onde une densité de probabilité de présence de la ou des particules dans l'espace. La probabilité P de trouver la ou les particules dans un certain volume V est donc égale à l'expression suivante

$$P = \iiint_V \Psi(\vec{\xi},t)\ \Psi^*(\vec{\xi},t)\ dv \qquad (B.1)$$

où $\Psi^*(\vec{\xi},t)$ représente le complexe conjugué de la fonction d'onde $\Psi(\vec{\xi},t)$.
Toute grandeur réelle observable A sur ce système de particules est associée à *un opérateur* $\hat{A}$ agissant sur la fonction d'onde, tel que

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n \qquad (B.2)$$

où les a_n sont les *valeurs propres* et les ψ_n sont les *états propres* du système. Les états propres ψ_n forment *un ensemble complet orthogonal*, c'est-à-dire que, sur le volume totale V_t du système, on a

$$\iiint_{V_t} \psi_n\ \psi_m^*\ dv = 1 \quad (n=m) \quad \text{et} \quad \iiint_{V_t} \psi_n\ \psi_m^*\ dv = 0 \quad (n\neq m) \qquad (B.3)$$

La fonction d'onde complète Ψ du système peut toujours être représentée comme une superposition linéaire des états propres ψ_n, pondérés par des coefficients c_n

$$\Psi = \sum_n c_n\psi_n \qquad (B.4)$$

Aux composantes de la quantité de mouvement $\vec{p}$ et de la position $\vec{\xi}$ d'une particule correspondent les opérateurs

$$\hat{p}_k \quad \rightarrow \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_k} \quad \text{et} \quad \hat{\xi}_k \quad \rightarrow \quad \xi_k \qquad (B.5)$$

où i est est le nombre complexe $\sqrt{-1}$ et $h = 2\pi\hbar$ est la *constante de Planck*.
Quant à l'énergie totale E d'un système et au temps t, ils deviennent en mécanique quantique les opérateurs suivants

$$\hat{E} \quad \rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \hat{t} \quad \rightarrow \quad t \tag{B.6}$$

Les opérateurs représentant un acte de mesure ne commutent pas nécessairement, ce qui correspond au fait que l'ordre dans lequel sont faites les mesures peut jouer un rôle en mécanique quantique. On définit *le commutateur* des opérateurs associés aux observables A et B comme

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\bullet\hat{B} - \hat{B}\bullet\hat{A} \tag{B.7}$$

Par exemple, les opérateurs de quantité de mouvement et de position d'une particule, ainsi que ceux d'énergie et de temps, ne commutent pas

$$\left[\hat{p}_k,\hat{\xi}_k\right] = \hat{p}_k\bullet\hat{\xi}_k - \hat{\xi}_k\bullet\hat{p}_k = -i\hbar \quad \text{et} \quad \left[\hat{E},\hat{t}\right] = \hat{E}\bullet\hat{t} - \hat{t}\bullet\hat{E} = i\hbar \tag{B.8}$$

Ceci est l'expression du *principe d'incertitude d'Heisenberg*, qui dit que les mesures de certaines paires d'observables se perturbent mutuellement, de sorte que les incertitudes de mesure $\Delta\xi_k$, Δp_k , Δt , ΔE , … sont liées entre elles par des relations d'incertitude, telles que

$$\Delta\xi_k\bullet\Delta p_k \geq \hbar \quad \text{ou} \quad \Delta t\bullet\Delta E \geq \hbar \tag{B.9}$$

L'équation de Schrödinger d'un système

Les relations entre opérateurs quantiques sont les mêmes que celles intervenant entre observables classiques. Pour une seule particule soumise à un potentiel V l'expression classique de l'hamiltonien s'écrit

$$H = T + V = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{\xi}) \tag{B.10}$$

Comme l'hamiltonien de la particule représente l'énergie totale de celle-ci, en remplaçant les observables par leurs opérateurs associés agissant sur la fonction d'onde Ψ , on obtient *l'équation de Schrödinger* de la particule

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(\vec{\xi})\right)\Psi \tag{B.11}$$

B.2 - Le états propres stationnaires d'une particule

Pour un mouvement stationnaire, ne dépendant pas du temps, l'hamiltonien H d'une particule représente l'énergie constante E de la particule, et l'équation de Schrödinger indépendante du temps peut s'écrire symboliquement

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{B.12}$$

de sorte que les états propres ψ_n de la fonction d'onde se déduisent de l'équation suivante

$$\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(\vec{\xi})\right)\psi_n = \varepsilon_n\psi_n \tag{B.13}$$

dans laquelle les ε_n sont *les valeurs propres de l'énergie*, donc les niveaux quantifiés d'énergie que peut prendre la particule. A titre d'exemples, nous allons donner quelques solutions de cette équation stationnaire pour différents types de potentiels.

L'oscillateur harmonique

Soit une particule soumise au potentiel $V(\xi) = k\xi^2 / 2$ d'un *oscillateur harmonique.* Cette particule satisfait alors l'hamiltonien classique suivant

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + 2\pi^2 m\nu^2\xi^2 \qquad \text{avec} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{B.14}$$

où k représente la constante de rappel, m la masse de la particule et ν la fréquence propre de vibration de l'oscillateur.
La résolution de l'équation de Schrödinger *(B.13)* conduit aux valeurs propres ε_n suivantes de l'énergie

$$\varepsilon_n = h\nu\left(n + 1/2\right) \qquad (n = 0,1,2,3, \ldots) \tag{B.15}$$

L'oscillateur anharmonique

Soit une particule soumise au potentiel $V(\xi) = k\xi^2 / 2 - b\xi^3$ d'un *oscillateur anharmonique*, avec un coefficient b satisfaisant la relation $b << k / 2$. Un tel potentiel présente un maximum en $\xi = k / 3b$, valant $k^3 / (54b^2)$. Si la particule acquiert une énergie potentielle supérieure à cette valeur maximum, elle peut s'échapper définitivement du potentiel.
La résolution de l'équation de Schrödinger *(B.13)* conduit aux valeurs propres ε_n suivantes, données par un développement en série de la forme

$$\varepsilon_n = h\nu\left(n + 1/2\right) - h\nu x_e\left(n + 1/2\right)^2 + h\nu y_e\left(n + 1/2\right)^3 + \ldots \qquad (n = 0,1,2,3, \ldots) \tag{B.16}$$

dans lequel les constantes sans dimension x_e, y_e et suivantes sont petites vis-à-vis de l'unité, et très rapidement décroissantes.

La particule dans une boîte

Soit une particule libre ($V = 0$), mais soumise aux conditions aux limites d'une *boîte parallélépipédique* de côtés L_1, L_2, L_3. La résolution de l'équation de Schrödinger *(B.13)* conduit aux énergies ε_{ijk} permises suivantes

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{i^2}{L_1^2} + \frac{j^2}{L_2^2} + \frac{k^2}{L_3^2}\right) \qquad (i, j, k = 0,1,2, \ldots) \tag{B.17}$$

La rotation de deux particules liées

Soit une paire de particules ponctuelles liées, séparées d'une distance r, soumises à *une rotation autour de leur centre de masse*. L'hamiltonien classique s'écrit

$$H = \frac{1}{2I}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\,p_\varphi^2\right) \quad \textit{avec} \quad I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \tag{B.18}$$

où I est le moment d'inertie des deux particules de masse m_1 et m_2.
La résolution de l'équation de Schrödinger *(B.13)* conduit aux valeurs propres ε_j suivantes de l'énergie

$$\varepsilon_j = \frac{h^2}{8\pi^2 I} j(j+1) \qquad (j = 0,1,2,...) \tag{B.19}$$

Pour chaque valeur d'énergie ε_j correspondant classiquement à une vitesse angulaire différente, il y a $2j+1$ états propres différents, correspondants classiquement à des orientations différentes de l'axe de rotation. L'état d'énergie ε_j est dit $2j+1$ fois *dégénéré*.

La particule dans un potentiel central

Soit une particule de masse m soumise à un potentiel central, de type

$$V(\vec{\xi}) = -\frac{e^2}{|\vec{\xi}|} \tag{B.20}$$

où e est une constante.
La résolution de l'équation de Schrödinger *(B.13)* conduit aux valeurs propres ε_n suivantes de l'énergie

$$\varepsilon_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \qquad (n = 1,2,3,\ ...\ ) \tag{B.21}$$

où n est un nombre entier positif appelé *le nombre quantique principal*, caractérisant le niveau énergétique de la particule. La résolution détaillée de ce problème en coordonnées polaires r,θ,φ conduit à écrire les états propres de la fonction d'onde comme le produit d'une fonction de r et d'une fonction de θ,φ

$$\psi_{n,l,m_l} = R_{n,l}(r)Y_{l,m_l}(\theta,\varphi) \quad (0 \le l \le n-1) \quad \textit{et} \quad (-l \le m_l \le +l) \tag{B.22}$$

Ces deux fonctions sont paramétrées par les nombres quantiques n,l,m_l. Le nombre l est un entier compris entre 0 et $n-1$, appelé *le nombre quantique azimutal*, qui caratérise la quantification du moment cinétique angulaire orbital $\vec{L}$ de la particule, la norme de celui-ci valant $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, alors que m_l est *le nombre quantique magnétique*, valant $-l \le m_l \le +l$, et qui caractérise la quantification de la projection du moment cinétique angulaire selon un certain axe z, celle-ci valant $L_z = \hbar m_l$. En fait, pour chaque valeur d'énergie ε_n correspondent

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2 \tag{B.23}$$

états propres différents de la fonction d'onde. On dit que l'état d'énergie ε_n est n^2 fois dégénéré. Par convention, au nombre quantique azimutal l sont associées les lettres $s,p,d,f,g,...$ suivant que celui-ci vaut 0, 1, 2, 3, 4, ... et les différents états de la particule sont désignés par les symboles $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, ...$ etc., dans lesquels le nombre et la lettre représentent le nombre quantique principal et le nombre quantique azimutal respectivement.

La densité des états dans l'espace de phase

Reprenons le cas d'une particule piégée dans une boîte de volume $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$. Nous avons vu que les conditions aux limites imposées à l'équation de Schrödinger *(B.13)* impliquent un spectre discret d'énergies ε_{ijk} permises *(B.17).* Il est alors intéressant de calculer le volume d'espace de phase Γ occupé par chaque état énergétique possible de la particule. Commençons par dénombrer le nombre N d'états dont l'énergie est inférieure ou égale à une valeur E

donnée. Pour cela, calculons dans un espace tridimensionnel le nombre de points, distants de $1/L_1, 1/L_2, 1/L_3$ selon les axes $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$, contenus dans le premier octant d'une sphère de rayon R

$$N = \frac{1}{8}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{\frac{1}{L_1}\bullet\frac{1}{L_2}\bullet\frac{1}{L_3}} = \frac{\pi R^3 V}{6} \qquad (B.24)$$

dans laquelle le rayon R est calculé à partir de l'expression *(B.17)* des niveaux d'énergie, pour l'énergie maximum $\varepsilon_{ijk} = E$

$$R = \sqrt{\frac{i^2}{L_1^2} + \frac{j^2}{L_2^2} + \frac{k^2}{L_3^2}} = \sqrt{\frac{8mE}{h^2}} \qquad (B.25)$$

Quant au *volume d'espace de phase* V_Γ occupé par une particule dont l'énergie est inférieure ou égale à la valeur E, et par conséquent dont la quantité de mouvement est inférieure ou égale à $|\vec{p}| = \sqrt{2mE}$, il est donné par

$$V_\Gamma = \iiint\iiint dp_1 dp_2 dp_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{4\pi|\vec{p}|^3}{3}V = \frac{4\pi(2mE)^{3/2}}{3}\underbrace{\frac{6Nh^3}{8\pi(2mE)^{3/2}}}_{V} = Nh^3 \qquad (B.26)$$

On en déduit que le volume d'espace de phase v_Γ occupé par chaque état énergétique est donné par V_Γ / N et vaut par conséquent

$$v_\Gamma = V_\Gamma / N = h^3 \qquad (B.27)$$

Ce résultat, à savoir que le volume d'espace de phase v_Γ occupé par chaque état propre d'une particule possédant z degrés de liberté vaut h^z, est tout à fait général en mécanique quantique et il est appelé à jouer un rôle très important en physique statistique.

B.3 - Les bosons et les fermions

Considérons un système de deux particules indépendantes contenues dans une boîte. L'énergie E de ce système sera donnée par

$$E = \varepsilon_n + \varepsilon_m \qquad (B.28)$$

où ε_n et ε_m représentent les énergies discrètes des deux particules, données par la relation *(B.17),* et où n et m représentent deux combinaisons particulières des trois nombres quantiques i, j, k.

L'équation de Schrödinger de ce système s'écrit

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2)\Psi = (\varepsilon_n + \varepsilon_m)\Psi \qquad (B.29)$$

Il est facile de vérifier qu'une solution de cette équation est donnée par le produit des fonctions d'onde des particules 1 et 2, en supposant que la particule 1 possède l'énergie $\varepsilon_n^{(1)}$ et que la particule 2 possède l'énergie $\varepsilon_m^{(2)}$

$$\Psi = \psi_n(\vec{\xi}_1)\psi_m(\vec{\xi}_2) \qquad (B.30)$$

Mais pour une même valeur de l'énergie E du système, il existe une autre solution, qui correspond à l'échange des deux particules identiques, à savoir que la particule 1 possède l'énergie

$\varepsilon_m^{(1)}$ et que la particule 2 possède l'énergie $\varepsilon_n^{(2)}$

$$\Psi = \psi_n(\vec{\xi}_2)\psi_m(\vec{\xi}_1) \qquad (B.31)$$

Or, une des propriétés fondamentales des équations différentielles linéaires et homogènes est que toute combinaison linéaire de solutions particulières est aussi une solution, de sorte que la solution la plus générale de l'équation de Schrödinger précédente peut s'écrire sous la forme suivante

$$\Psi = \alpha\psi_n(\vec{\xi}_1)\psi_m(\vec{\xi}_2) + \beta\psi_n(\vec{\xi}_2)\psi_m(\vec{\xi}_1) \qquad (B.32)$$

Cette expression semblerait indiquer qu'il existe un grand nombre d'états stationnaires pour un système de deux particules. Cependant, il faut maintenant tenir compte du fait que, à cause du principe d'incertitude en physique quantique, les particules identiques perdent leur individualité. On dit que des particules quantiques identiques sont *indiscernables*, ce qui signifie qu'il n'est pas possible de suivre la trajectoire d'une particule donnée au cours du temps. Si on considère la fonction d'onde Ψ du système, nous savons que Ψ^2 détermine la probabilité de trouver les deux particules dans une certaine portion d'espace. Si on échange les deux particules, il est clair que Ψ^2 doit rester inchangée. Par contre, la phase de Ψ peut être modifiée par cet échange, de sorte que $\Psi \to \Psi e^{i\eta}$. Si on procède à un deuxième échange des particules, on a évidemment $\Psi \to \Psi e^{2i\eta}$ et on se retrouve dans l'état initial Ψ, de sorte que $e^{2i\eta} = 1$. Pour satisfaire cette dernière condition, il suffit en fait que $e^{2i\eta} = +1$ ou $e^{2i\eta} = -1$.

Dans le cas où la fonction d'onde Ψ se transforme en $\Psi \to +\Psi$ au cours de l'échange des deux particules, la fonction d'onde est dite *symétrique*, et les particules sont appelées des *bosons*. La fonction d'onde Ψ s'écrit avec un facteur de normalisation α

$$\Psi = \alpha\left(\psi_n(\vec{\xi}_1)\psi_m(\vec{\xi}_2) + \psi_n(\vec{\xi}_2)\psi_m(\vec{\xi}_1)\right) \qquad (B.33)$$

Si la fonction d'onde Ψ se transforme en $\Psi \to -\Psi$, la fonction d'onde est dite *antisymétrique*, et les particules sont appelées des *fermions*. La fonction d'onde Ψ s'écrit avec un facteur de normalisation β comme

$$\Psi = \beta\left(\psi_n(\vec{\xi}_1)\psi_m(\vec{\xi}_2) - \psi_n(\vec{\xi}_2)\psi_m(\vec{\xi}_1)\right) \qquad (B.34)$$

L'indiscernabilité des deux particules ressort alors clairement des deux expressions précédentes de la fonction d'onde Ψ. On constate aussi que, pour la fonction d'onde antisymétrique, il n'est pas possible que les deux particules soient dans le même état quantique puisque Ψ serait alors nulle: ceci est l'expression mathématique du *principe d'exclusion de Pauli*, qui dit que deux fermions ne peuvent occuper le même état simultanément.

Dans le cas d'un système de N particules identiques, les concepts précédents se généralisent facilement. Dans le cas de bosons, la fonction d'onde symétrique Ψ_{sym} du système s'écrit sous la forme

$$\Psi_{sym} = \alpha\sum_P \psi_n(\vec{\xi}_1)\psi_m(\vec{\xi}_2)\ldots\psi_k(\vec{\xi}_N) \qquad (B.35)$$

où la somme porte sur les permutations possibles de tous les états différents du système. Si le système possède n_1 particules à l'état d'énergie n, n_2 particules à l'état d'énergie m, n_3 particules à l'état d'énergie k, etc., le nombre de termes composant la fonction d'onde Ψ_{sym} est donné par

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\ ...} \qquad (B.36)$$

Dans le cas de fermions, la fonction d'onde antisymétrique Ψ_{anti} du système peut s'écrire sous la forme d'un déterminant

$$\Psi_{anti} = \beta \begin{vmatrix} \psi_n(\vec{\xi}_1) & \psi_n(\vec{\xi}_2) & ... \\ \psi_m(\vec{\xi}_1) & \psi_m(\vec{\xi}_2) & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} \qquad (B.37)$$

En effet, la permutation de deux colonnes d'un déterminant change le signe du déterminant, ce qui assure l'anti-symétrie de la fonctions d'onde Ψ_{anti} sous l'échange de deux des particules. D'autre part, on sait aussi qu'un déterminant est nul si deux lignes sont identiques, ce qui correspond ici à l'expression du principe d'exclusion de Pauli, à savoir qu'un état quantique donné ne peut être occupé par plus d'un fermion.

B.4 - Le spin des particules

En général, la fonction d'onde Ψ d'un système est composée de deux parties: *une composante spatiale* et *une composante de spin*. La notion de *spin* est une caractéristique purement quantique des particules, associée à la notion classique de moment cinétique angulaire propre de la particule. Si le moment angulaire de spin d'une particule est $\vec{S}$ et que son moment angulaire orbital est $\vec{L}$, le moment angulaire total $\vec{J}$ de la particule correspond à la somme vectorielle des deux: $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$.
La norme de $\vec{S}$ vaut $\hbar\sqrt{s(s+1)}$ et la projection de $\vec{S}$ sur l'axe z vaut $S_z = \hbar m_z$, où s est le nombre quantique de spin correspondant à un entier dans le cas des bosons ou à un demi-entier dans le cas des fermions, et m_z est un nombre quantique pouvant aller de $-s$ à $+s$ par pas entiers. On ne peut connaître simultanément que la norme de $\vec{S}$ et une de ces projections, par exemple S_z. L'angle azimutal est toujours indéterminé, car les opérateurs associés à S_x et S_y ne commutent pas avec l'opérateur associé à S_z.
La composante de spin de la fonction d'onde Ψ de deux particules est symétrique lorsque les spins des deux particules sont parallèles, et antisymétrique si les spins sont anti-parallèles. On a donc les possibilités suivantes pour la fonction d'onde Ψ de deux particules:
• *Fermions:* fonction d'onde antisymétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale antisymétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale symétrique.
• *Bosons:* fonction d'onde symétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale symétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale antisymétrique.

B.5 - L'équation de Dirac

L'équation de Dirac, formulée en 1928, naît d'une tentative d'incorporer la relativité restreinte à une formulation quantique dans le cadre d'une mécanique quantique relativiste des particules élémentaires de spins demi-entiers, comme les électrons. Pour cela, Dirac a cherché à transformer l'équation de Schrödinger afin de la rendre invariante par l'action de la transformation de Lorentz, autrement dit à la rendre compatible avec les principes de la relativité restreinte.

Pour assurer la compatibilité d'une équation d'onde quantique avec la transformation de Lorentz, il faut que les dérivations en fonction du temps et de l'espace entre de manière symétrique dans l'équation d'onde, ce qui n'est manifestement pas le cas de l'équation de Schrödinger. Une façon de procéder est d'utiliser la relation relativiste

$$E^2 / c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \qquad (B.38)$$

et d'utiliser les opérateurs définis en *(B.5)* et *(B.6)* pour obtenir l'équation d'onde

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \qquad (B.39)$$

Cette équation est bien symétrique en les dérivés de temps et d'espace, mais c'est une équation de second ordre, ce qui rend très difficile sa résolution puisqu'il faut alors spécifié les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivés premières pour trouver une solution!
Dirac a alors eu l'idée d'écrire la relation *(B.39)* sous la forme suivante

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2} + C\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{i}{c}D\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2} + C\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{i}{c}D\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad (B.40)$$

et de chercher quelles valeurs octroyer aux éléments A, B, C, D pour faire disparaître les termes croisés en $\partial x_i \partial x_j$. Pour cela, il faut nécessairement introduire des matrices 4x4 qui satisfont une série de relations comme $AB + BA = 0, ...$ et $A^2 = B^2 = ... = 1$.
Cette factorisation permet alors d'écrire que

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2} + C\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{i}{c}D\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi \qquad (B.41)$$

où $\psi(\vec{r}, t)$ est maintenant une fonction d'onde ***à quatre composantes***.
La formulation donnée par Dirac à cette équation est la suivante

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left(\alpha_0 mc^2 - i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(\vec{r}, t) \qquad (B.42)$$

où m est la masse de la particule, c est la vitesse de la lumière, $\hbar$ la constante de Planck réduite, x_i et t les coordonnées d'espace et de temps, et $\psi(\vec{r}, t)$ la fonction d'onde à quatre composantes. Le fait que la fonction d'onde doit maintenant être formulée par un spineur à quatre composantes plutôt que par un simple scalaire est dû aux exigences de la relativité restreinte. Dans cette formulation, les matrices A, B, C, D deviennent les matrices de Dirac α_i, avec $i = 1, ..., 4$, de dimension 4x4, qui agissent sur le spineur $\psi(\vec{r}, t)$. On peut écrire ces matrices dans la représentation de Dirac, en termes des matrices de Pauli, sous la forme

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \qquad (B.43)$$

dans laquelle les matrices complexes 2x2 de Pauli s'écrivent

$$\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\sigma}_3 = \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (B.44)$$

Il est commun en mécanique quantique de considérer l'opérateur de quantité de mouvement $\hat{\vec{p}}$ et dans ce cas l'équation de Dirac se ré-écrit de façon condensée sous la forme suivante

$$\hat{\vec{p}} = -\sum_j \vec{e}_j i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r},t) = \left(mc^2 \alpha_0 + c\vec{\alpha} \bullet \hat{\vec{p}} \right) \psi(\vec{r},t) \qquad (B.45)$$

L'équation de Dirac *(B.42)* prend en compte de manière naturelle la notion de spin et permet de prédire l'existence des antiparticules. En effet, outre la solution correspondant à l'électron, il existe une autre solution correspondant à une particule d'énergie négative et de charge opposée à celle de l'électron, le positron, qui fut identifié plus tard, en 1932, par Carl Anderson en se servant d'une chambre à brouillard.

Annexe C

Modèle Standard des particules élémentaires

A l'heure actuelle, la physique des particules explique la structure intime de la matière à l'aide d'un modèle appelé Modèle Standard des particules élémentaires. Ce modèle fait apparaître des *fermions,* des particules de matière qui présentent deux familles assez différentes, la famille des *leptons* et la famille des *quarks*, ainsi que trois types d'interactions qui peuvent intervenir entre ces fermions: l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte.

Les interactions entre les *fermions* de matière interviennent par l'échange de particules appelées *bosons de jauge*, correspondant aux quanta des champs quantiques d'interaction concernés. L'interaction électromagnétique fait appel au *photon* γ, l'interaction faible à trois bosons de jauge Z^0, W^+ et W^-, et l'interaction forte à 8 bosons de jauge appelés *gluons*.

Quant à la masse des particules, elle est introduite dans le Modèle Standard par une nouvelle interaction associée au champ quantique de Higgs, dont la particule médiatrice est appelée *boson de Higgs*.

Le Modèle Standard des particules, malgré ses succès indéniables, laisse de nombreuses questions non résolues parmi lesquelles le problème de l'interaction gravitationnelle qui n'y apparaît pas. Nous citerons à la fin de cette annexe une série d'autres problèmes non résolus par le Modèle Standard.

C.1 – Les leptons et les quarks

La famille des *leptons* (fig. C.1) est composée de trois générations de deux types de particules: trois particules électriquement neutres appelées *neutrino électronique* (ν_e), *neutrino muonique* (ν_μ) et *neutrino tauique* (ν_τ), et trois particules électriquement chargées, appelées *électron* (e^-), *muon* (μ^-) *et tau* (τ^-). Chacune de ces six particules possède en principe une anti-particule ($\overline{\nu}_e$, $\overline{\nu}_\mu$, $\overline{\nu}_\tau$, e^+, μ^+ et τ^+) qui se caractérise essentiellement par une charge électrique opposée, ce qui fait déjà apparaître une question en ce qui concerne l'existence des anti-particules des neutrinos! Les leptons sont des particules quasi-ponctuelles qui sont sensibles à l'interaction électromagnétique et à l'interaction faible, mais pas à l'interaction forte. On a longtemps pensé que les neutrinos ne possédaient pas de masse, mais des mesures récentes montrent que ce n'est pas le cas.

La famille des *quarks* (fig. C.1) est elle aussi composée de trois générations de deux types de particules électriquement chargées: une première génération est formée des quarks *down (d)* et *up (u)*, respectivement de charges électriques -1/3 et +2/3 de la charge électrique de l'électron, une deuxième génération composée des quarks *strange (s)* et *charm (c)*, respectivement de charges électriques -1/3 et +2/3 de la charge électrique de l'électron, et une troisième génération composée des quarks *bottom (b)* et *top (t)*, respectivement de charges électriques -1/3 et

+2/3 de la charge électrique de l'électron. Chaque quark possède son anti-particule de charge électrique de signe opposé ($\overline{d}$, $\overline{u}$, $\overline{s}$, $\overline{c}$, $\overline{b}$ et $\overline{t}$). les quarks sont sensibles à la fois à l'interaction électromagnétique, à l'interaction faible et à l'interaction forte. Les quarks ne sont pas des particules libres, mais ils existent sous la forme d'assemblage de quarks appelés *hadrons.* Les quarks sont liés au sein des hadrons par la force forte.

Les hadrons se présentent sous deux formes: les *mésons* composés d'un quark et d'un anti-quark, comme les particules $\Pi^+(u\overline{d})$, $\Pi^-(d\overline{u})$ ou $\Pi^0(u\overline{u})$, et les *baryons* composés de trois quarks, comme le *proton* (uud) et le *neutron* (ddu), ou de trois anti-quarks.

Chaque particule de matière, que ce soit un lepton ou un quark, possède une masse non nulle et un spin 1/2, ce qui lui confère le statut de *fermion*.

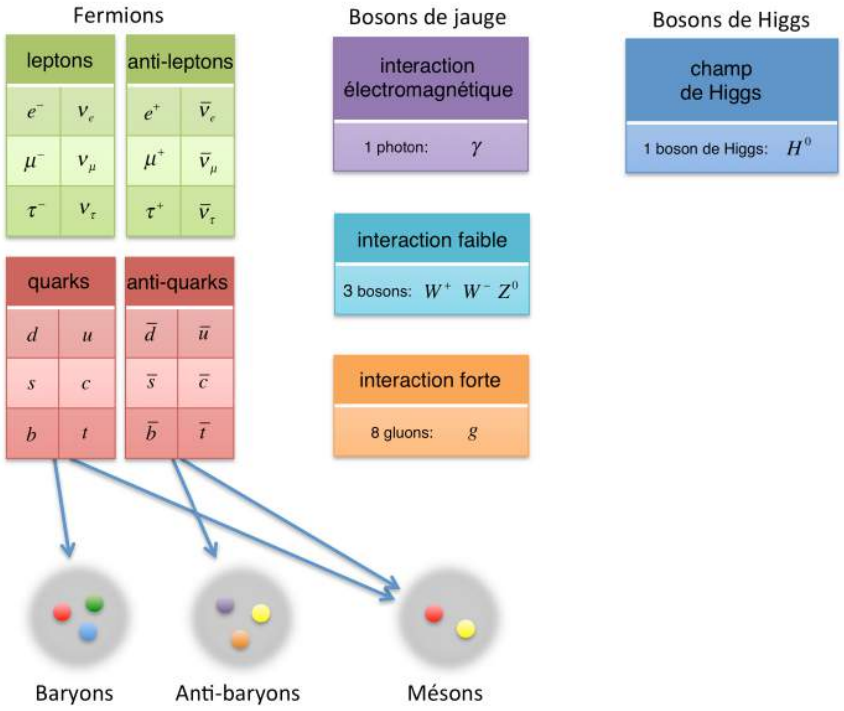


Figure C.1 - *les particules du Modèle Standard*

C.2 - Les interactions fondamentales et les bosons de jauge

Dans le Modèle Standard, on considère les trois interactions possibles suivantes entre particules: *l'interaction électromagnétique*, *l'interaction faible* et *l'interaction forte*. Ces interactions sont décrites par des théories quantiques de champ (sauf l'interaction gravitationnelle qui n'a jamais pu être introduite dans le Modèle Standard, malgré une recherche intensive du boson de jauge *graviton* qui lui serait associé). Chaque interaction fait donc appel à un champ qui lui est propre, et se fait alors par l'échange d'une particule appelée *boson de jauge* (fig. C.1), correspondant au quantum du champ concerné. L'interaction électromagnétique fait appel au *photon (* γ *),* boson de jauge de masse nulle. L'interaction faible fait appel aux trois bosons de jauge Z^0, W^+ et W^-, particules de masse non nulle et de charge électrique respectivement nulle,

positive et négative. Quant à l'interaction forte, elle fait appel à 8 bosons de jauge appelés *gluons*, en fait des particules de masse nulle.
Les bosons de jauge associés à ces interactions sont des particules de spin 1, ce qui explique leur dénomination de *bosons*.

C3 - L'interaction électromagnétique et l'électrodynamique quantique

La théorie quantique qui décrit l'interaction électromagnétique s'appelle *l'électrodynamique quantique*. Il s'agit d'une quantification du champ électromagnétique: les particules chargées y interagissent par l'échange de quanta du champ, les *photons*. C'est une théorie relativiste, car elle prend en compte le temps de propagation de l'interaction, à savoir la célérité du boson vecteur, le photon. Dans cette théorie, on peut représenter une interaction de manière simple et commode, grâce aux *diagrammes de Feynman*. Dans la figure C.2, on a représenté l'exemple de l'interaction entre deux électrons par l'échange d'un *photon virtuel,* qualifié ici de virtuel car il ne peut pas être détecté expérimentalement.

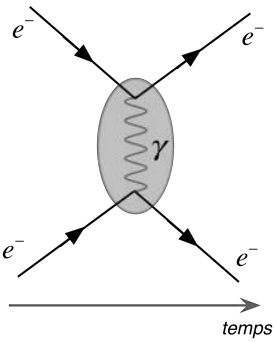


Figure C.2 - *digramme de Feynman de l'interaction entre deux électrons via un photon*

C4 - L'interaction faible et la théorie électrofaible

L'interaction faible agit entre tous les fermions élémentaires, qu'ils soient des leptons ou quarks. C'est d'ailleurs la seule interaction qui agit sur les neutrinos. Elle est responsable des *désintégrations nucléaires*. Cette interaction présente deux aspects: l'interaction faible *par courants chargés*, dont les vecteurs sont les bosons de jauge W^+ et W^-, et l'interaction faible *par courant neutre*, dont le vecteur est le boson de jauge Z^0. Les bosons de jauge sont les seuls qui présentent des masses, et celles-ci sont très élevées, ce qui impose, en combinant la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta E \bullet \Delta t \approx \hbar$ et la relation d'Einstein $\Delta E = mc^2$, une durée de vie Δt très courte pour les bosons de jauge de l'interaction faible, et par conséquent, puisque la vitesse de lumière est une limite infranchissable, une portée de l'interaction faible via ces bosons extrêmement petite (de l'ordre de $10^{-15}[m]$), ce qui explique que cette interaction ne se manifeste qu'à l'échelle du noyau atomique.
Comme les bosons de jauge W^+ et W^- ont une charge électrique non nulle, les fermions peuvent changer de charge électrique lors d'une interaction par échange de W^+ ou W^-. ce qui change leur *saveur* (on appelle saveur d'un fermion sa nature: électron, neutrino, quark *u*,

quark *d*, etc.). Par exemple, la radio-activité beta est expliquée par l'émission d'un W^- par un quark *d* du neutron, qui change alors de saveur et devient quark u. Ensuite, le W^- se matérialise sous la forme d'un électron et d'un anti-neutrino électronique (figure C.1,b).

Le boson de jauge Z^0 ne possède pas de charge électrique, et ne peut donc pas induire de changement de saveur lors d'une interaction faible. L'interaction faible par courant neutre est assez similaire à l'échange d'un photon. Deux fermions qui peuvent échanger un photon peuvent aussi échanger un Z^0, à l'exception du neutrino qui peut échanger un Z^0 mais ne peut pas échanger un photon puisque c'est une particule neutre.

Il existe plusieurs types d'interaction faible suivant les fermions qui interagissent: les interactions leptoniques, les interactions semi-leptoniques et les interactions hadroniques, dont des exemples de diagrammes de Feynman sont reportés dans la figure C.3.

L'interaction électromagnétique et l'interaction faible ont été unifiées dans une théorie quantique appelée *théorie électrofaible*.

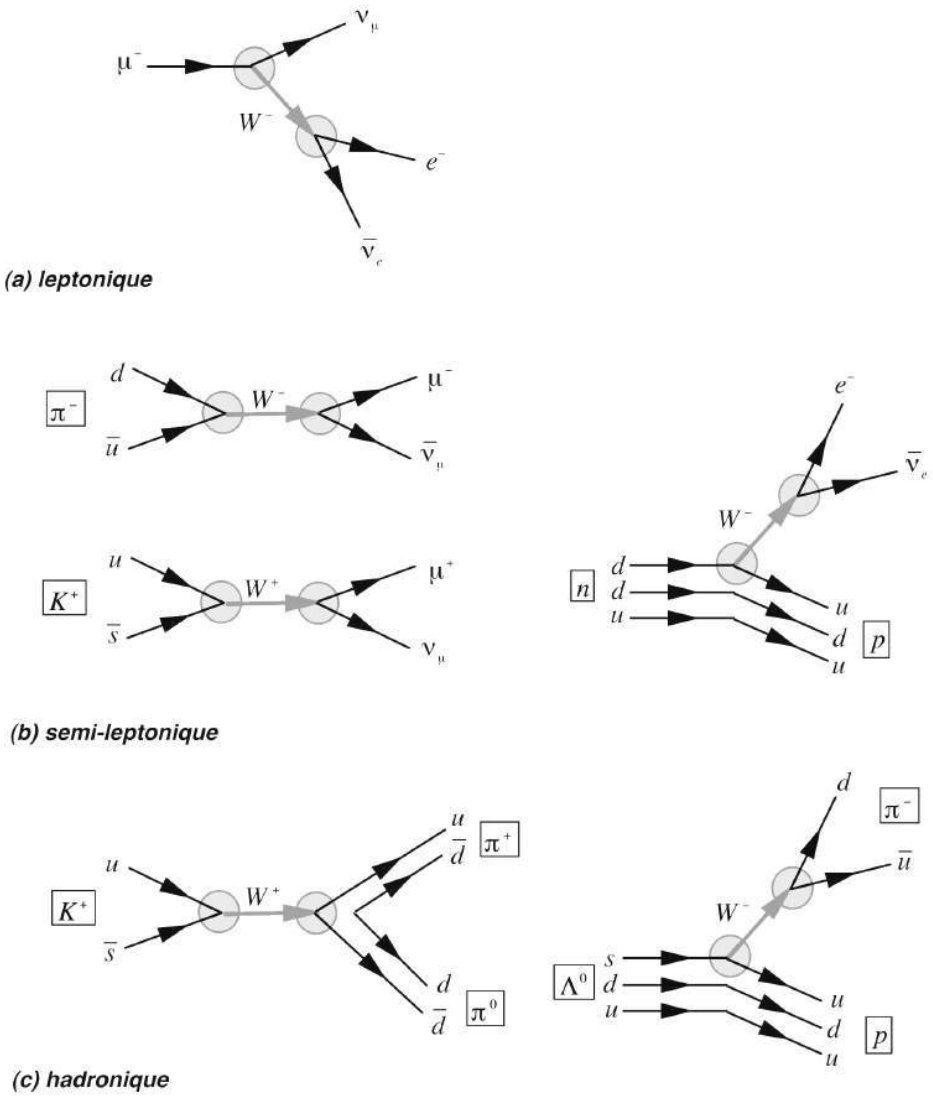


Figure C.3 - *exemples de diagrammes de Feynman d'interactions faibles leptoniques, semi-leptoniques et hadroniques*

C5 - L'interaction forte et la théorie de chromodynamique quantique

L'interaction forte est une interaction à courte portée entre les quarks par l'intermédiaire des gluons, bosons de jauge vecteurs de cette interaction. C'est cette interaction qui permet d'expliquer non seulement les *mésons* composés d'un quark et d'un anti-quark et les *baryons* composés de trois quarks, mais aussi comment les neutrons et les protons peuvent se lier pour former les noyaux atomiques.

Pour élaborer une théorie quantique de l'interaction forte, il a fallu faire appel à un nouveau type de charges, appelées *charges de couleur*, d'où le nom de *théorie de chromodynamique quantique.* Chaque quark possède une charge de couleur, rouge (R), vert (V) ou bleu (B), et les anti-quarks possèdent une charge d'une des couleurs complémentaires ($\overline{R}$), ($\overline{V}$) ou ($\overline{B}$).

L'interaction forte est alors expliquée par l'échange de gluons «colorés» entre les fermions élémentaires possédant une charge de couleur, ce qui permet d'échanger les charges de couleur entre fermions. Il existe 8 gluons de couleurs différentes, correspondant aux 8 combinaisons différentes d'une couleur et d'une anti-couleur. Ainsi, lors de l'échange d'un gluon entre deux quarks, ceux-ci échangent leur couleur respective. De plus, comme les gluons portent une charge de couleur, ils peuvent aussi interagir entre eux, ce qui n'est pas le cas des autres bosons de jauge! Les leptons ne possèdant pas de charge de couleur, ils ne subissent pas l'interaction forte.

Bien que la masse des gluons soit nulle, l'interaction forte est de très courte portée, de l'ordre de $10^{-15}\left[m\right]$, et elle possède une caractéristique assez étrange: plus des quarks sont éloignés l'un de l'autre, plus la force d'interaction entre eux est forte! Et si ils sont infiniment proches, ils n'interagissent plus du tout. Cette propriété porte le nom de *liberté asymptotique*, et elle est responsable de ce qu'on appelle *le confinement des quarks* à l'intérieur des hadrons: ceci implique que *les quarks ne peuvent pas exister à l'état libre*!

Les particules formées de quarks sont donc des hadrons, c'est-à-dire des états liés de plusieurs quarks via les gluons. Les hadrons doivent nécessairement être «blancs», c'est-à-dire posséder une combinaison de couleur nulle. On peut donc considérer

- des *baryons*, combinaisons de trois quarks respectivement rouge, vert et bleu, ou bien des *anti-baryons*, combinaisons de trois anti-quarks respectivement anti-rouge anti-vert, et anti-bleu. Les triplets formés de trois quarks (parmi les quarks *u, d, s* ou *c*) sont représentés dans les diagrammes de la figure C.4, dans les cas de spin global de $1/2$ et de $3/2$, avec le nom donné à la particule correspondant à ce triplet,
- des *mésons*, qui contiennent un quark de couleur (rouge, vert ou bleu) et un anti-quark de l'anti-couleur correspondante (anti-rouge, anti-vert ou anti-bleu). Les doublets formés d'un quark et d'un anti-quark (parmi les quarks *u, d, s* ou *c*) sont représentés dans le diagramme de la figure C.5, dans le cas de spin global de 1 et de 0, avec le nom donné à la particule correspondant à ce doublet.

C6 - La masse des particules et le boson de Higgs

Dans une première version du Modèle Standard, toutes les particules décrites (leptons et quarks) devaient être de masse nulle, ce qui est évidemment faux. Pour palier à cette lacune du Modèle Standard initial, les théoriciens ont imaginé une cinquième interaction, différente des

quatre autres (électromagnétique, faible, forte et gravitationnelle), et faisant appel à un champ dont le quantum est une particule de spin 0: le *boson de Higgs* H^0 (fig. 29.1). Ce sont alors les interactions entre les fermions élémentaires de masse nulle et le champ de Higgs via les bosons de Higgs qui fournissent une masse aux fermions du Modèle Standard! L'existence du boson de Higgs a été vérifiée expérimentalement au CERN, tout récemment.

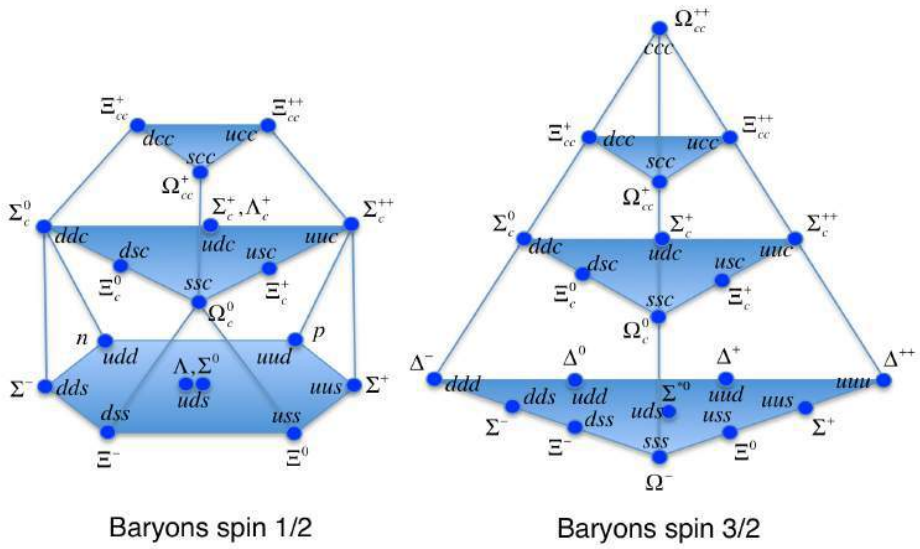


Figure C.4 - *les baryons composés de triplets de quarks (u, d, s ou c)*

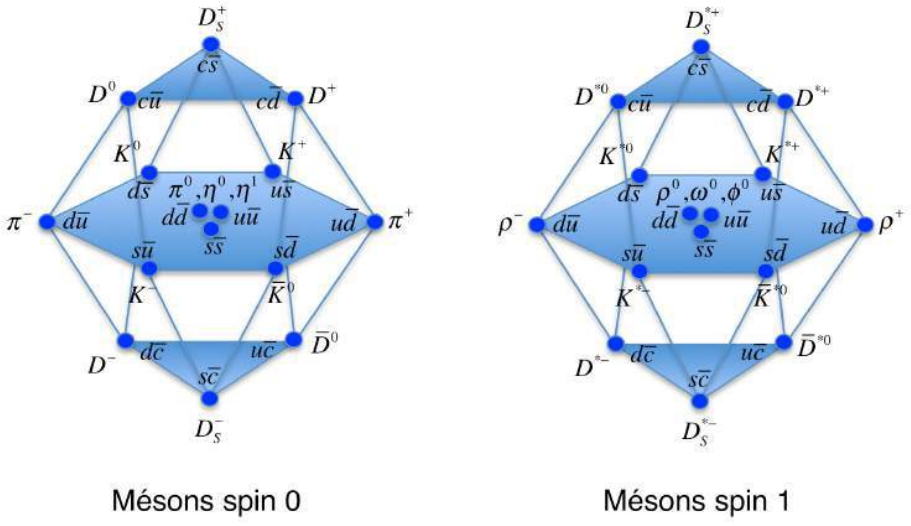


Figure C.5 - *les mésons composés de doublets quark-antiquark (u, d, s ou c)*

C7 - Les problèmes et les questions du Modèle Standard

Malgré les succès enregistrés par le Modèle Standard des particules élémentaires, il reste de nombreuses questions non résolues dans ce modèle, parmi lesquelles on peut citer très succintement les problèmes suivants:

- l'absence de l'interaction gravitationnelle dans cette théorie,
- l'existence de 12 fermions (leptons et de quarks) et de 4 forces fondamentales dans la théorie,
- l'existence de trois générations de fermions (leptons et quarks), qui permet de rendre compte de la violation de l'invariance ***CP*** (charge/parité), qu'on estime être la cause probable de l'asymétrie matière /anti-matière et du déséquilibre matière/anti-matière dans l'univers actuel,
- la prédiction des masses des divers fermions et bosons,
- la nécessité d'ajuster expérimentalement un grand nombre de paramètres (26 paramètres sont requis dans le cas où les neutrinos sont massifs!) pour obtenir une théorie fonctionnelle, telles que les masses des particules (tableau C.1) et les intensités des diverses forces (tableau C.2), qui doivent obligatoirement être «calées» sur les résultats expérimentaux,
- l'existence de trois bosons de jauge massifs dans l'interaction faible,
- le mécanisme de confinement de la force forte,
- les charges électriques quantifiées, de valeurs 1, 1/3 et 2/3,
- l'absence d'une explication de l'énergie noire et de la masse noire dans ce modèle.

Fermions *(spin 1/2)*		**Charge électrique (q_e)**	**Masse (MeV/c²)**
lepton électron	e^-	-1	0,51
lepton muon	μ^-	-1	106
lepton tau	τ^-	-1	1777
lepton neutrino électronique	ν_e	0	< 0,0000022
lepton neutrino muonique	ν_μ	0	< 0,17
lepton neutrino tauique	ν_τ	0	< 15,5
quark Up	*u*	+2/3	2,55
quark Down	*d*	-1/3	5,04
quark Charm	*c*	+2/3	1270
quark Strange	*s*	-1/3	105
quark Top	*t*	+2/3	173100
quark Bottom	*b*	-1/3	4200

Tableau C.1 - *les charges et les masses des leptons et des quarks*

Bosons de jauge *(spin 1)*		**Charge électrique (q_e)**	**Masse (MeV/c²)**
photon	γ	0	0
boson intermédiaire	W^+	-1	80398
boson intermédiaire	W^-	+1	80398
boson intermédiaire	Z^0	0	90187
8 gluons	*g*	0	0

Bosons de jauge *(spin 0)*		**Charge électrique (q_e)**	**Masse (MeV/c²)**
boson de Higgs	H^0	0	125000

Tableau C.2 - *les charges et les masses des bosons de jauge*

Annexe D

Les conjectures du réseau cosmologique

Les conjectures représentent les différents axiomes émis *à priori* dans notre théorie du réseau cosmologique, et qui sont choisies de telle sorte à retrouver *à posteriori* des analogies fortes avec toutes les autre théories de la physique.

Conjecture 0: *l'énergie libre du «réseau cosmologique» s'exprime par unité de volume de réseau:* $F^{déf} = F^{déf}\left[\tau, \tau^2, (\vec{\alpha}_i^{\,él})^2, (\vec{\omega}^{\,él})^2, (\vec{\alpha}_i^{\,an})^2, (\vec{\omega}^{\,an})^2\right]$ *(13.5)*

Conjecture 1: *pour que le «réseau cosmologique» présente des analogies avec la Gravitation Générale d'Einstein, avec l'électromagnétisme et avec les photons de la physique quantique, il faut que:*

- $\exists$ *des ondes transversales pures de polarisation circulaire* $\Leftrightarrow K_2 + K_3 > 0$
- $\nexists$ *d'ondes longitudinales* $\Leftrightarrow \begin{cases} \tau_0 < \tau_{0cr} = \dfrac{K_0}{2K_1} - \dfrac{2K_2}{3K_1} - 1 \quad (K_1 > 0) \\ \tau_0 > \tau_{0cr} = \dfrac{K_0}{2K_1} - \dfrac{2K_2}{3K_1} - 1 \quad (K_1 < 0) \end{cases}$ *(14.30)*

Conjecture 2: *les singularités usuelles du champ d'expansion devraient être «négatives» pour correspondre au champs de gravitation usuels* *(15.5)*

Conjecture 3: *il est plus «raisonnable» pour l'esprit d'imaginer que* K_1 *satisfasse* $K_1 > 0$ *de sorte que l'expansion du réseau ne soit pas infinie* *(16.19)*

Conjecture 4: *les modules* K_2 *et* K_3 *devraient satisfaire la relation* $|K_2| << |K_3|$, *<u>ou bien</u> le module* K_2 *pourrait même être nul* $(K_2 = 0)$ *(17.41)*

Conjecture 5: *le module* K_1 *devrait satisfaire la relation* $|K_1| << |K_3|$ *(19.52)*

Conjecture 6: *le module* K_0 *devrait satisfaire la relation* $K_0 > 0$ *(19.56)*

Conjectures 0 à 6: *le «réseau cosmologique parfait»:* $\begin{cases} K_0 = K_3 > 0, \\ 0 < K_1 << K_0 = K_3 \\ 0 \le K_2 << K_3 = K_0 \end{cases}$ *(19.58)*

Conjecture 7: *le rayon d'une boucle de désinclinaison vis est beaucoup plus grand que le pas du réseau cosmologique:*

$\ln\left(A_{BV} R_{BV} / a\right) >> 1$ *(19.92)*

Conjecture 8: *les singularités de nature lacunaire correspondent par analogie à l'anti-matière et les singularités de nature interstitielle à la matière* *(22.115)*

Conjecture 9: *la métrique de notre théorie dans un champ gravitationnel faible doit être la même que la métrique de Schwarzschild en Relativité Générale* *(24.49)*

Conjecture 10: *il existe deux opérateurs qui, appliqués à la fonction d'onde* $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ *d'une singularité mobile dans le réseau, permettent de mesurer l'énergie et la quantité de mouvement relativistes de celle-ci, à savoir*

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\underline{\psi} \rightarrow E_{\boldsymbol{v}}\underline{\psi} \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}\underline{\psi} \rightarrow \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{v}i}\underline{\psi} \end{cases} \qquad (28.15)$$

Conjecture 11: K_1 *satisfait la relation suivante dans le réseau cosmologique parfait:*

$$K_1 \geq K_{1\,cr} = K_0\, 2\pi^4\, R_{BV}^2 / \boldsymbol{q}_{\lambda\,BV}^2 \qquad (29.9)$$

Conjecture 12: l'angle $\boldsymbol{\Omega}_{BV}$ prend des valeurs discrètes liées à la symétrie du réseau et indépendantes de l'expansion volumique $(\beta_{BV} = cste)$ *(31.1)*

Conjecture 13: l'empilement des plans ***R***, ***V***, ***B*** suit trois règles élémentaires: *(31.2)*

Règle 1: l'alternance des plans ***R***, ***V***, ***B*** *ne peut pas être rompue* (soit par impossibilité, soit par pénalité d'une énergie surfacique de faute γ_1 extrêmement élevée),

Règle 2: dans une direction donnée de l'espace, il peut apparaître un décalage de la succession des plans ***R***, ***V***, ***B*** selon un plan de faute d'empilement, et ce décalage possède *une énergie surfacique de faute* γ_0 *non nulle* (fig. 31.1, image 4).

Règle 3: si un plan de couleur donnée subit une rotation d'un angle $\pm\pi/2$, $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi/2$, *il change de couleur* selon le tableau 31.1, ce qui correspond à l'existence d'une certaine propriété axiale des plans du réseau.

Annexe E

Formulaire mathématique

Les bases mathématiques nécessaires à la compréhension de ce livre sont résumées très succinctement dans cette annexe, sous la forme de rappels de calcul différentiel, de calcul vectoriel et d'analyse vectorielle. On établit aussi dans cette annexe les formules de dérivés d'intégrales sur des domaines mobiles.

E.1 - Calcul vectoriel

Le produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fournit un scalaire a. Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule comme la somme des produits des composantes des deux vecteurs

$$a = \vec{u}\,\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_i u_i v_i \qquad (E.1)$$

Les *propriétés intrinsèques* du produit scalaire sont les suivantes

$$\begin{cases} a = \vec{u}\,\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \\ a = \vec{u}\,\vec{v} = \vec{v}\,\vec{u} \\ \vec{u} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\,\vec{v} = 0 \\ |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\,\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2} = L_u \quad (norme) \end{cases} \qquad (E.2)$$

Le produit vectoriel

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fournit un vecteur $\vec{w}$. Dans un repère orthonormé, le *produit vectoriel* de deux vecteurs peut se calculer en utilisant le formalisme de calcul d'un déterminant, de la manière suivante

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \sum_i \vec{e}_i \left(u_j v_k - u_k v_j \right) \qquad (E.3)$$

Les *propriétés intrinsèques* du produit vectoriel sont les suivantes

$$\begin{cases} |\vec{w}| = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha = S \quad (aire) \\ \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \vec{w} \perp \vec{u} \quad et \quad \vec{w} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \,||\, \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \end{cases} \qquad (E.4)$$

Le produit mixte

Le *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une composition du produit scalaire et du produit vectoriel qui fournit un scalaire b.

Dans un repère orthonormé, le *produit mixte* de trois vecteurs est égal au déterminant des composantes des trois vecteurs

$$b = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \sum_i u_i \left(v_j w_k - v_k w_j \right) \qquad (E.5)$$

Les *propriétés intrinsèques* du produit mixte sont les suivantes:

$$\begin{cases} b = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}(\vec{v}\wedge\vec{w}) = V \quad (volume) \\ b = \vec{u}(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \vec{v}(\vec{w}\wedge\vec{u}) = \vec{w}(\vec{u}\wedge\vec{v}) \end{cases} \qquad (E.6)$$

Les compositions de produit

Les trois produits de vecteurs, produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte, peuvent se composer entre eux. Ces compositions satisfont alors les quatre importantes relations suivantes

$$\begin{cases} \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\,\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\,\vec{v})\vec{w} \\ (\vec{u}\wedge\vec{t})(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\,\vec{v})(\vec{t}\,\vec{w}) - (\vec{u}\,\vec{w})(\vec{t}\,\vec{v}) \\ (\vec{u}\wedge\vec{t})\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = [\vec{u},\vec{t},\vec{w}]\vec{v} - [\vec{u},\vec{t},\vec{v}]\vec{w} \\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{t} = [\vec{t},\vec{v},\vec{w}]\vec{u} + [\vec{u},\vec{t},\vec{w}]\vec{v} + [\vec{u},\vec{v},\vec{t}]\vec{w} \end{cases} \qquad (E.7)$$

E.2 - Analyse vectorielle

L'opérateur gradient

Le *gradient d'un champ scalaire* f est un champ vectoriel $\vec{u}$ défini en chaque point A de l'espace par la limite suivante prise sur la surface S limitant un volume d'espace V pris autour du point A (figure E.1)

$$\vec{u}\big|_A = \overrightarrow{\text{grad}}\, f\big|_A = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S f\, d\vec{S} \qquad (E.8)$$

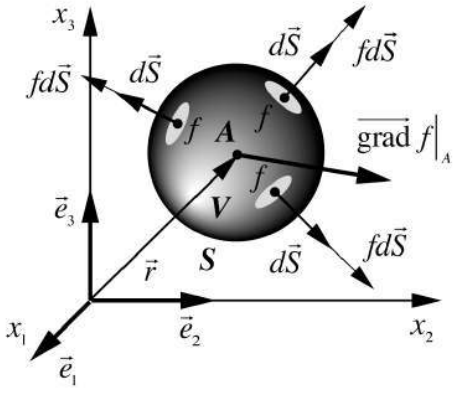


Figure E.1 *- opérateur gradient*

La direction du vecteur $\vec{u}$ est par conséquent perpendiculaire aux surfaces de niveau de la

fonction f dans l'espace et sa norme est proportionnelle à la vitesse de variation de la fonction f dans cette direction. Cette *définition intrinsèque* montre que le gradient est un *invariant* du champ f, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Dans un repère orthonormé, le gradient peut se calculer grâce à la relation suivante

$$\vec{u}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i \qquad (E.9)$$

Les *propriétés intrinsèques* de l'opérateur gradient sont les suivantes:

- la dérivée de f dans une direction $\vec{s}$ donnée de l'espace s'obtient par le produit scalaire suivant

$$\frac{df}{ds} = \vec{s}\,\overrightarrow{\text{grad}} f \qquad (E.10)$$

- si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{\text{grad}}\, g$, alors $f = g + constante$ (E.11)

- si $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, $\vec{u}$ est dit *champ vectoriel conservatif* et il dérive du *potentiel scalaire* f. Dans ce cas, si le champ $\vec{u}$ est connu, le champ f peut être retrouvé simplement, par résolution de $df = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$, à une constante additive près. Si $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, il vient aussi

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{u}\, d\vec{r} = f(\boldsymbol{P}_2) - f(\boldsymbol{P}_1) \qquad (E.12)$$

$$\oint_{\boldsymbol{C}} \vec{u}\, d\vec{r} = 0 \quad ; \quad \forall contour\ \boldsymbol{C}\ fermé \qquad (E.13)$$

- les *théorèmes du gradient*

$$\oiint_{\boldsymbol{S}} f\, d\vec{S} = \iiint_{\boldsymbol{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, dV \qquad (E.14)$$

$$\oint_{\boldsymbol{C}} f\, d\vec{r} = -\iint_{\boldsymbol{S}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge d\vec{S} \qquad (E.15)$$

L'opérateur rotationnel

Le *rotationnel d'un champ vectoriel* $\vec{u}$ est un autre champ vectoriel $\vec{v}$ satisfaisant en chaque point $\boldsymbol{A}$ de l'espace la limite suivante prise sur un contour $\boldsymbol{C}$ entourant le point $\boldsymbol{A}$ et perpendiculaire à n'importe quelle direction $\vec{\boldsymbol{n}}$ dans l'espace (figure E.2)

$$\vec{\boldsymbol{n}}\,\vec{v}\big|_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}\big|_{\boldsymbol{A}} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{\boldsymbol{S}} \oint_{\boldsymbol{C}} \vec{u}\, d\vec{r} \qquad (E.16)$$

La direction du vecteur $\vec{v}$ est par conséquent perpendiculaire à la surface de circulation maximum du vecteur $\vec{u}$ autour de $\boldsymbol{A}$ et sa norme est proportionnelle à la vitesse de circulation de $\vec{u}$ autour de $\boldsymbol{A}$ dans cette direction.

Cette *définition intrinsèque* montre que le rotationnel est un *invariant* du champ $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Dans un repère orthonormé, le rotationnel peut se calculer grâce au formalisme du déterminant, de la manière suivante

$$\vec{v}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \qquad (E.17)$$

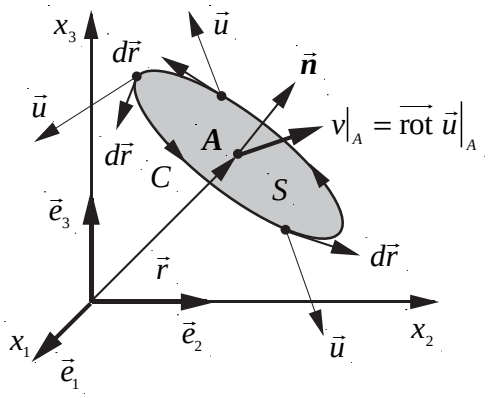


Figure E.2 *- opérateur rotationnel*

Les *propriétés intrinsèques* de l'opérateur rotationnel sont les suivantes:

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \equiv 0$ *(E.18)*

- si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} \equiv 0$, $\vec{u}$ est dit *champ vectoriel irrotationnel*. En ce cas, la propriété précédente implique que $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$

- si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$, alors $\vec{u} = \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *(E.19)*

- si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}$, $\vec{v}$ est dit *champ vectoriel rotationnel* et il dérive du *potentiel vecteur* $\vec{u}$. En ce cas, si le champ vectoriel $\vec{v}$ est connu, le champ vectoriel $\vec{u}$ peut être trouvé au gradient d'un champ scalaire près

- les *théorèmes du rotationnel*

$$\oiint_S d\vec{S} \wedge \vec{v} = \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\, dV \qquad \textit{(E.20)}$$

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\, d\vec{S} \qquad \textit{(E.21)}$$

L'opérateur divergence

La *divergence d'un champ vectoriel* $\vec{u}$ est un champ scalaire g satisfaisant en chaque point $\boldsymbol{A}$ de l'espace la limite suivante prise sur la surface $\boldsymbol{S}$ limitant un volume d'espace $\boldsymbol{V}$ pris autour du point $\boldsymbol{A}$ (figure E.3)

$$g|_A = \text{div}\,\vec{u}\big|_A = \lim_{V \to 0} \frac{1}{\boldsymbol{V}} \oiint_S \vec{u}\, d\vec{S} \qquad \textit{(E.22)}$$

Le scalaire g représente par conséquent la limite du flux du champ $\vec{u}$ à travers la surface $\boldsymbol{S}$ et ne peut être différent de zéro que si le champ $\vec{u}$ diverge localement autour du point $\boldsymbol{A}$. Cette *définition intrinsèque* montre que la divergence est un *invariant* du champ $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

Dans un repère orthonormé, la divergence peut se calculer grâce à la relation suivante

$$g(\vec{r}) = \text{div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad \textit{(E.23)}$$

Les *propriétés intrinsèques* de l'opérateur divergence sont les suivantes:

- $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} \equiv 0$ *(E.24)*

- si $\text{div}\,\vec{v} \equiv 0$, $\vec{v}$ est dit *champ vectoriel à flux conservatif ou solénoïdal* et la propriété précédente implique que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}$

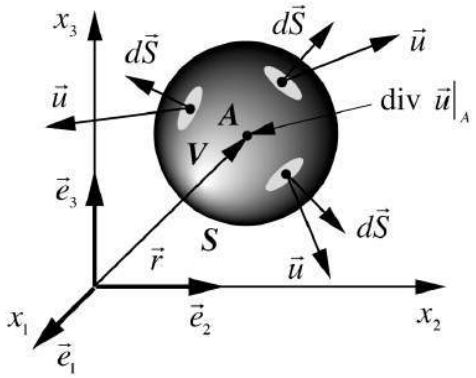


Figure E.3 *- opérateur divergence*

- si $\operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}\vec{v}$, alors $\vec{u} = \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{w}$ *(E.25)*
- si $g = \operatorname{div}\vec{u}$, $\vec{u}$ est dit *champ vectoriel divergent*. En ce cas, si le champ scalaire g est connu, le champ vectoriel $\vec{u}$ peut être trouvé au rotationnel d'un champ vectoriel près
- le *théorème de la divergence*

$$\oiint_S \vec{v}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\, dV \qquad (E.26)$$

L'opérateur laplacien

Le *laplacien d'un champ scalaire* f , ou le *laplacien d'un champ vectoriel* $\vec{u}$, est un champ scalaire g , ou un champ vectoriel $\vec{v}$, définis intrinsèquement à partir d'une double application des opérateurs vectoriels div , $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ ou $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ par les relations suivantes

$$\begin{cases} g(\vec{\xi}) = \Delta f = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \\ \vec{v}(\vec{\xi}) = \Delta\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{u} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u} \end{cases} \qquad (E.27)$$

Ces *définitions intrinsèques* montrent que le laplacien est un *invariant* du champ f ou $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du système de coordonnées choisi, puisqu'il est défini à partir des opérateurs div , $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ ou $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$. Dans un repère orthonormé, le laplacien peut se calculer grâce aux relations suivantes

$$\begin{cases} g(\vec{r}) = \Delta f = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \sum_i \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ \vec{v}(\vec{r}) = \Delta\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{u} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u} = \dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_3^2} = \sum_i \dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_i^2} \end{cases} \qquad (E.28)$$

Les *propriétés intrinsèques* de l'opérateur laplacien sont les suivantes:

$$- \begin{cases} \Delta\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{u} \quad si \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u} = 0 \\ \Delta\vec{u} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u} \quad si \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \end{cases} \qquad (E.29)$$

- $\Delta\vec{u} = \vec{e}_1\Delta u_1 + \vec{e}_2\Delta u_2 + \vec{e}_3\Delta u_3$ *(E.30)*
- les *formules de Green*

$$\iiint_V f\,\Delta g\, dV = \oiint_S f\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g\, d\vec{S} - \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g\, dV \qquad (E.31)$$

$$\iiint_V \left(f\Delta g - g\Delta f \right) dV = \oiint_S \left(f\,\overrightarrow{\text{grad}}\, g - g\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \right) d\vec{S} \qquad (E.32)$$

L'opérateur « del »

L'*opérateur formel "del"* $\vec{\nabla}$ est un opérateur défini par la relation

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (E.33)$$

Pour utiliser cet opérateur, quelques règles simples doivent être respectées, dont les suivantes:
- *"del"* se comporte comme un vecteur,
- si *"del"* agit sur un produit, le résultat est la somme des expressions obtenues en considérant successivement la dérivation de chacun des termes (règle de dérivation d'un produit),
- *"del"* doit précéder les termes sur lesquels il agit. Si, après transformation, *"del"* agit sur un terme sur lequel il n'agissait pas auparavant, il convient de considérer ce terme comme constant à l'égard de *"del"*,
- les opérateurs classiques de l'analyse vectoriel s'expriment alors sous la forme:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f \\ \text{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\vec{u} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta f = (\vec{\nabla}\vec{\nabla}) f = \vec{\nabla}^2 f \\ \Delta \vec{u} = (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}^2 \vec{u} \end{cases} \qquad (E.34)$$

Les propriétés de linéarité, de distributivité et d'itération des opérateurs vectoriels

Les opérateurs vectoriels satisfont un ensemble de propriétés très utiles, associées à la *linéarité*, à la *distributivité* et à l'*itération* de ces divers opérateurs, comme le montrent les formules suivantes, où α et β sont des constantes

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f + \beta\,\overrightarrow{\text{grad}}\, g \\ \text{div}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\,\text{div}\,\vec{u} + \beta\,\text{div}\,\vec{v} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \beta\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \\ \Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha\Delta f + \beta\Delta g \\ \Delta(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\Delta\vec{u} + \beta\Delta\vec{v} \end{cases} \qquad (E.35)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}\vec{v}) = \vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} \\ \text{div}(f\vec{v}) = f\,\text{div}\,\vec{v} + \vec{v}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \\ \text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} - \vec{u}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{v}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \vec{v} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u}\,\text{div}\,\vec{v} - \vec{v}\,\text{div}\,\vec{u} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} \\ \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,\overrightarrow{\text{grad}}\, g \end{cases} \qquad (E.36)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \equiv 0 \\ \text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \equiv 0 \\ \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \Delta f \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v} - \Delta\vec{v} \end{cases} \qquad (E.37)$$

E.3 - Dérivés d'intégrales sur volumes, surfaces et contours mobiles

La dérivée d'une intégrale sur un volume mobile

Soit l'intégrale d'une fonction $f(\vec{r},t)$ sur un volume $\boldsymbol{V}_m$ mobile à vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ dans l'espace et le problème du calcul de la variation temporelle de cette intégrale. Pour effectuer ce calcul, il faut considérer le volume $\boldsymbol{V}_m$ à l'instant t, qui devient le volume $\boldsymbol{V}'_m$ à l'instant $t+\Delta t$ (figure E.4). Par définition, la dérivée temporelle de l'intégrale est égale à la limite suivante, calculée pour Δt tendant vers zéro

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\boldsymbol{V}_m} f(\vec{r},t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iiint_{\boldsymbol{V}'_m} f(\vec{r},t+\Delta t)\,dV - \iiint_{\boldsymbol{V}_m} f(\vec{r},t)\,dV\right)$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iiint_{\boldsymbol{V}_m}\left[f(\vec{r},t+\Delta t)-f(\vec{r},t)\right]dV + \iiint_{\boldsymbol{V}'_m-\boldsymbol{V}_m} f(\vec{r},t+\Delta t)\,dV\right) \qquad (E.38)$$

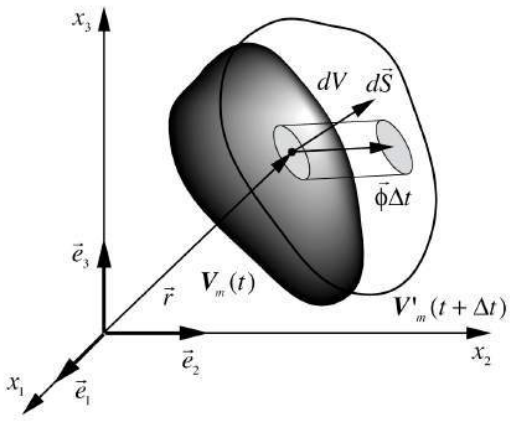


Figure E.4 *- dérivé d'une intégrale sur un volume mobile*

Les deux limites de cette dernière expression se calcule en introduisant le volume $dV = \vec{\phi}\Delta t d\vec{s}$ défini dans la figure par une forme "cylindrique", et il vient

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iiint_{\boldsymbol{V}_m}\left[f(\vec{r},t+\Delta t)-f(\vec{r},t)\right]dV = \iiint_{\boldsymbol{V}_m}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\,dV \qquad (E.39)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\iiint_{\boldsymbol{V}'_m-\boldsymbol{V}_m} f(\vec{r},t+\Delta t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\oiint_{S_m} f(\vec{r},t+\Delta t)\vec{\phi}\Delta t\,d\vec{S} = \oiint_{\boldsymbol{S}_m}\vec{\phi}\,f(\vec{r},t)\,d\vec{S} = \iiint_{\boldsymbol{V}_m}\mathrm{div}\left(f(\vec{r},t)\vec{\phi}\right)dV \qquad (E.40)$$

de sorte que la formule recherchée s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\boldsymbol{V}_m} f\,dV = \iiint_{\boldsymbol{V}_m}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(f\vec{\phi}\right)\right]dV \qquad (E.41)$$

Comme l'argument de l'intégrale peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(f\vec{\phi}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\phi}\vec{\nabla})f + f\,\mathrm{div}\vec{\phi} \qquad (E.42)$$

la formule pour le calcul de la dérivée de l'intégrale d'un champ $\vec{g}$ se déduit de *(E.68)*

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_m}\vec{g}\,dV=\iiint_{V_m}\left[\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+(\vec{\phi}\vec{\nabla})\vec{g}+\vec{g}\,\mathrm{div}\vec{\phi}\right]dV \qquad (E.43)$$

La dérivée d'une intégrale sur une surface mobile

Soit l'intégrale d'un champ $\vec{g}(\vec{r},t)$ sur une surface $\boldsymbol{S}_m$ mobile à vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ et le problème du calcul de la variation temporelle de cette intégrale. Pour effectuer ce calcul, il faut considérer la surface $\boldsymbol{S}_m$ à l'instant t, qui devient la surface $\boldsymbol{S}'_m$ à l'instant $t+\Delta t$ (figure E.5). Par définition, la dérivée temporelle de l'intégrale est égale à la limite suivante, calculée pour Δt tendant vers zéro

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_m}\vec{g}(\vec{r},t)\,d\vec{S}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iint_{S'_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{S}'-\iint_{S_m}\vec{g}(\vec{r},t)\,d\vec{S}\right) \qquad (E.44)$$

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_m}\vec{g}(\vec{r},t)\,d\vec{S}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iint_{S_m}[\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)-\vec{g}(\vec{r},t)]\,d\vec{S}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iint_{S'_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{S}'-\iint_{S_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{S}\right) \qquad (E.45)$$

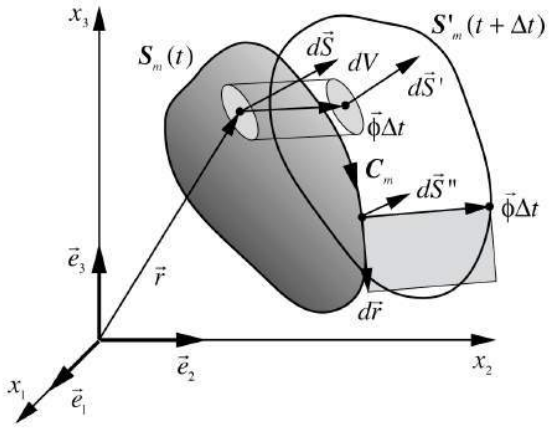


Figure E.5 *- dérivé d'une intégrale sur une surface mobile*

La première limite se déduit immédiatement

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iint_{S_m}[\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)-\vec{g}(\vec{r},t)]\,d\vec{S}\right)=\iint_{S_m}\frac{\partial\vec{g}(\vec{r},t)}{\partial t}\,d\vec{S} \qquad (E.46)$$

Pour calculer la deuxième limite, il faut définir $\boldsymbol{S}''_m$ comme la surface latérale reliant les contours des surfaces $\boldsymbol{S}_m$ et $\boldsymbol{S}'_m$, $\boldsymbol{S}_t$ comme la surface fermée constituée de la somme des surfaces $\boldsymbol{S}_m$, $\boldsymbol{S}'_m$ et $\boldsymbol{S}''_m$, V_m comme le volume compris à l'intérieur de la surface fermée $\boldsymbol{S}_t$ et $\boldsymbol{C}_m$ comme le contour entourant la surface $\boldsymbol{S}_m$, puis effectuer les transformations suivantes, en appliquant le théorème de la divergence et le théorème du rotationnel

$$\begin{aligned}\iint_{S'_m}\vec{g}\,d\vec{S}'-\iint_{S_m}\vec{g}\,d\vec{S}&=\iint_{S_t}\vec{g}\,d\vec{S}-\iint_{S''_m}\vec{g}\,d\vec{S}''=\iiint_{V_m}\mathrm{div}\,\vec{g}\,dV-\oint_{C_m}\vec{g}\left(d\vec{r}\wedge\vec{\phi}\Delta t\right)\\&=\iint_{S_m}\mathrm{div}\,\vec{g}\left(\vec{\phi}\Delta t\,d\vec{S}\right)-\Delta t\oint_{C_m}d\vec{r}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)=\Delta t\iint_{S_m}\vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g}\;d\vec{S}-\Delta t\iint_{S_m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)d\vec{S}\end{aligned} \qquad (E.47)$$

Il vient pour la deuxième limite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\iint_{S'_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{S}\,' - \iint_{S_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{S}\right) = \iint_{S_m}\left[\vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)\right]d\vec{S} \qquad (E.48)$$

de sorte que la formule recherchée s'écrit

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_m}\vec{g}\,d\vec{S} = \iint_{S_m}\left[\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)\right]d\vec{S} \qquad (E.49)$$

Si l'intégrale est effectuée sur une surface fermée, la relation précédente s'écrit

$$\oiint_{S_m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)d\vec{S} = \iiint_{V_m}\mathrm{div}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\phi}\wedge\vec{g}\right)\right]dV \equiv 0 \qquad (E.50)$$

de sorte que la formule de dérivation devient

$$\frac{d}{dt}\oiint_{S_m}\vec{g}\,d\vec{S} = \oiint_{S_m}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g}\right)d\vec{S} \qquad (E.51)$$

Cette dernière relation aurait aussi pu être déduite directement de la formule *(E.43)* en utilisant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\oiint_{S_m}\vec{g}\,d\vec{S} &= \frac{d}{dt}\iiint_{V_m}\mathrm{div}\,\vec{g}\,dV = \iiint_{V_m}\left[\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{g}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g}\right)\right]dV \\ &= \iiint_{V_m}\mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g}\right)dV = \oiint_{S_m}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\phi}\,\mathrm{div}\,\vec{g}\right)d\vec{S}\end{aligned} \qquad (E.52)$$

La dérivée d'une intégrale sur un contour mobile

Soit l'intégrale d'un champ $\vec{g}(\vec{r},t)$ sur un contour $\boldsymbol{C}_m$ mobile à vitesse $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ et le problème du calcul de la variation temporelle de cette intégrale. Pour effectuer ce calcul, il faut considérer le contour $\boldsymbol{C}_m$ à l'instant t, qui devient le contour $\boldsymbol{C'}_m$ à l'instant $t+\Delta t$ (figure E.6). Par définition, la dérivée temporelle de l'intégrale est égale à la limite suivante, calculée pour Δt tendant vers zéro

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{C_m}\vec{g}(\vec{r},t)\,d\vec{r} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{C'_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{r}\,' - \int_{C_m}\vec{g}(\vec{r},t)\,d\vec{r}\right) \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{C_m}\left[\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t) - \vec{g}(\vec{r},t)\right]d\vec{r}\right\} \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{C'_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{r}\,' - \int_{C_m}\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t)\,d\vec{r}\right]\end{aligned} \qquad (E.53)$$

Le premier terme de la limite se transforme en faisant apparaître une dérivée partielle

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{C_m}\left[\vec{g}(\vec{r},t+\Delta t) - \vec{g}(\vec{r},t)\right]d\vec{r}\right\} = \int_{C_m}\frac{\partial\vec{g}(\vec{r},t)}{\partial t}\,d\vec{r} \qquad (E.54)$$

Pour calculer le deuxième terme de la limite, il faut définir $\boldsymbol{C}_t$ comme le contour fermé $\boldsymbol{A_1A_2B_2B_1A_1}$ et $\boldsymbol{S}$ comme la surface entourée par ce contour $\boldsymbol{C}_t$, puis effectuer les transformations suivantes, en appliquant le théorème de Stockes du rotationnel

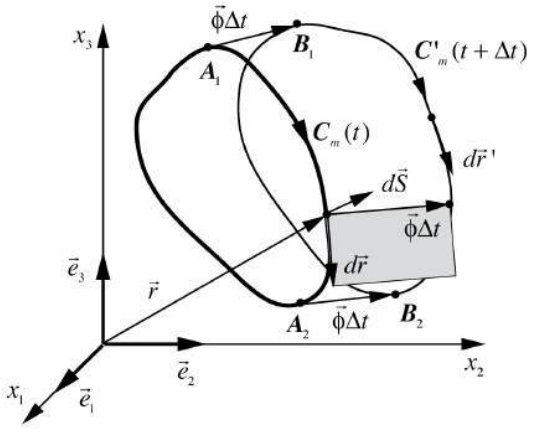


Figure E.6 *- dérivé d'une intégrale sur un contour mobile*

$$\begin{aligned}\int_{C'_m}\vec{g}\,d\vec{r}\,' - \int_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r} &= -\oint_{C_t}\vec{g}\,d\vec{r} - \int_{A_1}^{B_1}\vec{g}\,d\vec{r} + \int_{A_2}^{B_2}\vec{g}\,d\vec{r} \\ &= -\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\,d\vec{s} - \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_1}\Delta t + \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_2}\Delta t\end{aligned} \tag{E.55}$$

$$\begin{aligned}\int_{C'_m}\vec{g}\,d\vec{r}\,' - \int_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r} &= -\int_{C_m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\left(d\vec{r}\wedge\vec{\phi}\Delta t\right) - \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_1}\Delta t + \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_2}\Delta t \\ &= -\Delta t\int_{C_m}\left(\vec{\phi}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\right)d\vec{r} - \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_1}\Delta t + \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_2}\Delta t\end{aligned} \tag{E.56}$$

Le deuxième terme de la limite devient donc

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{C'_m}\vec{g}\,d\vec{r}\,' - \int_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r}\right] = \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_2} - \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_1} - \int_{C_m}\left(\vec{\phi}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\right)d\vec{r} \tag{E.57}$$

de sorte que la formule de dérivation recherchée s'écrit

$$\frac{d}{dt}\int_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r} = \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_2} - \left[\vec{g}\vec{\phi}\right]_{A_1} + \int_{C_m}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} - \vec{\phi}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\right)d\vec{r} \tag{E.58}$$

Sur un contour fermé, les points A_1 et A_2 s'identifient, de sorte qu'il vient en ce cas

$$\frac{d}{dt}\oint_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r} = \oint_{C_m}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} - \vec{\phi}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\right)d\vec{r} \tag{E.59}$$

D'ailleurs, cette dernière formule aurait pu être établie directement à partir de la relation *(E.52)*. En effet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\oint_{C_m}\vec{g}\,d\vec{r} = \frac{d}{dt}\iint_S\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\,d\vec{S} &= \iint_{S_m}\left[\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}}{\partial t} + \vec{\phi}\,\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\wedge\vec{\phi}\right)\right]d\vec{S} \\ &= \iint_{S_m}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\wedge\vec{\phi}\right]d\vec{S} = \oint_{C_m}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} - \vec{\phi}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\right)d\vec{r}\end{aligned} \tag{E.60}$$