Chapitre 2

Les charges de dislocation et de désinclinaison dans un réseau

La description des *défauts de structure,* ou *singularités topologiques,* qui peuvent apparaître au sein d'un solide, comme les dislocations et les désinclinaisons, est un domaine de la physique, initié principalement par l'idée des défauts macroscopiques de Volterra[1] en 1907, qui a connu un développement fulgurant au cours de son siècle d'histoire très riche, comme l'a très bien illustré Hirth[2] en 1985.

Dans ce chapitre, afin de décrire la plasticité des réseaux solides, on introduit un concept novateur *de densité de charges de dislocation et de désinclinaison* dans les réseaux eulériens, puis on présente une revue des *singularités topologiques macroscopiques et microscopiques* du réseau qui peuvent être associées aux charges de dislocation et de désinclinaison. On discute ensuite le mouvement des charges de dislocation au sein du réseau, en introduisant la notion de *flux de charges de dislocation,* et on déduit la force agisssant sur une charge de dislocation, appelée *la force de Peach et Koehler*. Finalement, on présente les potentialités inhérentes à cette approche originale en coordonnées d'Euler des singularités topologiques au sein des réseaux solides.

Le concept macroscopique de charges de distorsion plastique

Au chapitre précédent, on a introduit les comportements élastiques et anélastique d'un solide. Il existe encore un autre comportement dont on va s'occuper maintenant. Si on prend une barre d'aluminium et qu'on la plie légèrement, elle revient à son état initial si on relâche la sollicitation qu'on lui appliquait, et c'est là un comportement élastique. Par contre, si on la plie très fortement et qu'on relâche la sollicitation, elle ne revient plus à son état originel, mais reste définitivement pliée. On parle en ce cas de *comportement plastique* et de *plasticité* de la barre d'aluminium.

La description de la plasticité d'un réseau solide est parfois entreprise de manière phénoménologique en utilisant un tenseur de distorsion plastique $\vec{\beta}_i^{\,pl}$. Mais cette approche est extrêmement limitée, notamment par le fait qu'il n'existe pas de relation univoque entre l'état local $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ de déformation plastique et l'état microscopique du réseau de défauts de structure responsables de cette déformation plastique. C'est la raison pour laquelle la façon d'exprimer la présence de distorsions plastiques dans un réseau doit être abordée de sorte à ce qu'il soit possible de tenir compte de l'état microscopique du réseau des défauts de structure. Une façon très élégante de procéder à cette modification est d'introduire les concepts de *densités et flux de charges de dislocation,* responsables des *distorsions plastiques du solide,* ainsi que de *densités de charges de désinclinaison,* responsables des *contorsions plastiques du solide*.

---

[1] *V. Volterra, «L'équilibre des corps élastiques», Ann. Ec. Norm. (3), XXIV, Paris, 1907*

[2] *J.-P. Hirth, «A Brief History of Dislocation Theory», Metallurgical Transactions A, vol. 16A, p. 2085, 1985*


Vito Volterra
(1860-1940)

Le concept de *charges de distorsions plastiques du solide*, qui seront dorénavant appelées simplement *charges de dislocation* par raccourcis de langage, est intuitivement simple à saisir, si l'on s'aide de l'approche[1] développée en 1907 par le physicien italien Vito Volterra. Celui-ci a eu l'idée de considérer un tuyau de matière solide et d'imaginer, soit qu'on le découpe et qu'on lui fasse subir une certaine distorsion avant de le recoller, soit qu'on lui enlève une partie et qu'on procède à nouveau à un recollage comme représenté par les exemples de la figure 2.1. Dans ces deux exemples, les déformations subies par le solide après recollage sont irréversibles et irrécupérables, donc de nature plastique.

D'autre part, il est intuitivement clair que des forces internes se sont développées à l'intérieur du solide après recollage. Celles-ci sont apparues au cours de la déformation élastique qui a été imposée au reste du solide pour faire coïncider les deux mâchoires à recoller. En fait, tout se passe exactement comme si une discontinuité topologique localisée était apparue au centre du tuyau après recollage, discontinuité qui serait source d'un *champ de distorsion élastique* dans le milieu macroscopiquement continu qui compose le tuyau. Et ce champ de distorsion, de par sa présence, est lui-même source d'un champ de contraintes conjuguées, qui peut être appelé *champ de contraintes internes*.

Mathématiquement, la discontinuité due au recollage devrait pouvoir se traduire en terme d'une densité locale de «*charges plastiques*», source d'un champ de distorsion élastique, et donc d'un champ de contraintes internes, de façon tout à fait similaire qu'en électromagnétisme où la présence d'une densité locale ρ de charges électriques est responsable de l'apparition d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$, comme le montre l'équation de Maxwell $\rho = \mathrm{div}\,\vec{D}$, et par conséquent d'un champ électrique $\vec{E}$ conjugué, puisque $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Le but de ce chapitre sera donc de montrer comment il est possible de traduire mathématiquement les phénomènes de plasticité à l'intérieur d'un solide, non seulement en introduisant des densités de charges

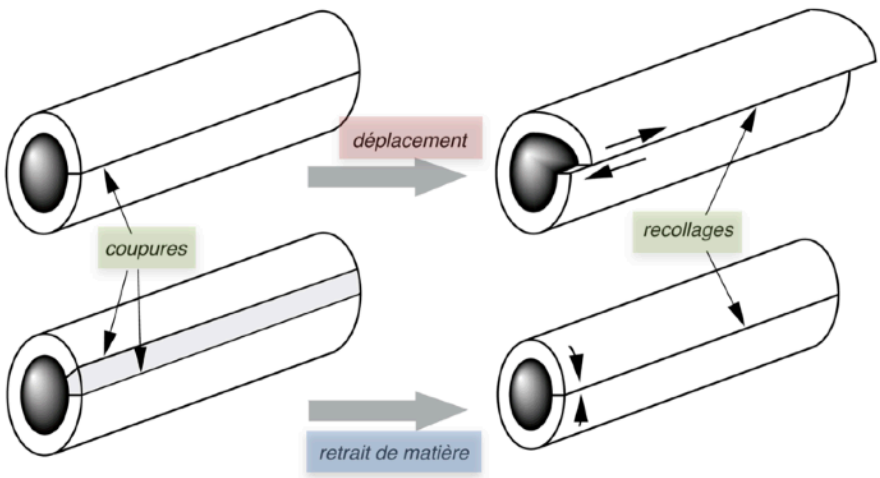


Figure 2.1 - *Les fameux «tuyaux de Volterra»*

plastiques, mais aussi des flux de charges plastiques, par analogie avec le flux de charges électriques $\vec{j}$ apparaissant dans l'équation suivante de l'électromagnétisme de Maxwell $\vec{j} = -\partial\vec{D}/\partial t + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H}$, dans laquelle $\vec{H}$ représente le champ magnétique.

Dans la figure 1.2, on a vu que la condition de compatibilité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = 0$ interdit la singularité par dislocation du champ de déplacement $\vec{u}_E$. Par conséquent, *si la condition de compatibilité n'était plus nulle*, donc si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\beta}_i = \vec{\lambda}_i \neq \vec{0}$, le parcours sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$ aura comme résultat l'existence d'une grandeur $\vec{\boldsymbol{B}}$, qu'on appelle *vecteur de Burgers macroscopique*, défini sur le contour $\boldsymbol{C}$ et qui correspond à la translation macroscopique nécessaire à accommoder le milieu à la présence des *charges de densité* $\vec{\lambda}_i$, afin d'assurer la compatibilité des déformations et rotations totales (l'absence de vides et de recouvrements de matière au sein du solide).

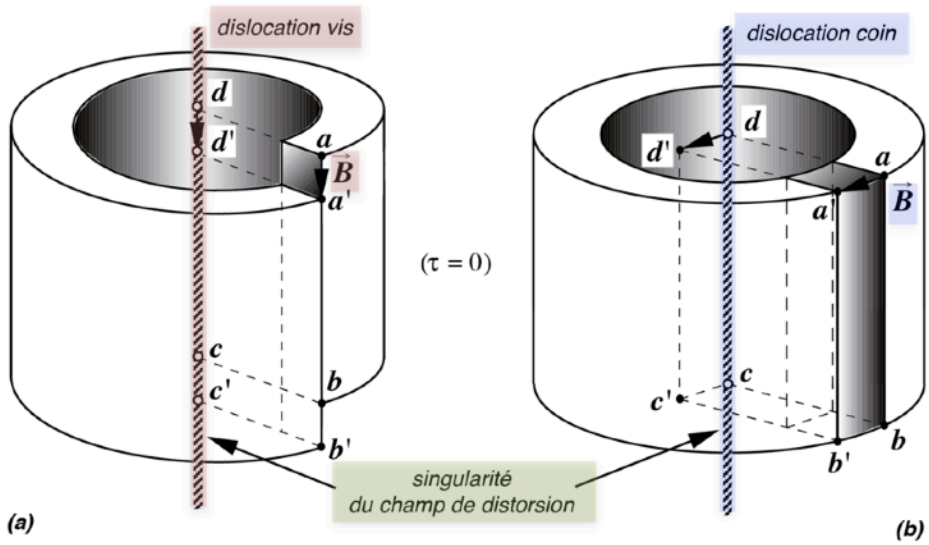


Figure 2.2 - *Réalisation de dislocations vis* ***(a)*** *et coin* ***(b)*** *par découpage et recollage*

La discontinuité $\vec{\boldsymbol{B}}$ est appelée une *dislocation macroscopique* du solide, au sens de Volterra, et on nommera par conséquent *densité de charges de dislocation* la densité tensorielle de charges $\vec{\lambda}_i$ responsables des distorsions plastiques.

On réalise une telle dislocation macroscopique dans un solide continu en coupant localement ce solide et en déplaçant parallèlement l'une par rapport à l'autre les deux mâchoires de la coupure, avant de les recoller. Ce processus est illustré schématiquement à la figure 2.2a à l'aide d'un tuyau de matière qu'on coupe selon le plan $\boldsymbol{abcd}$ et qu'on recolle après glissement parallèle des interfaces dans la direction de la coupure. Il apparaît alors une *singularité topologique unidimensionnelle* du champ de distorsion localisée sur l'axe $\boldsymbol{cd}$. Cette singularité macroscopique, caractérisée par un vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ de translation parallèle à la ligne de singularité, est appelée *dislocation vis*.

Par contre, si on recolle les deux mâchoires par translation parallèle des mâchoires, perpendiculairement au plan de la coupure, et avec addition ou soustraction d'un parallélépipède de matière (figure 8.2b), il apparaît une autre singularité topologique unidimensionnelle du champ de distorsion, localisée sur l'axe $\boldsymbol{cd}$. Cette singularité macroscopique, caractérisée par

un vecteur $\vec{B}$ de translation perpendiculaire à la ligne de singularité, est appelée *dislocation coin*. Une autre façon de procéder pour réaliser une dislocation de type coin, mais sans addition ou soustraction de matière, est de recoller les deux mâchoires après translation parallèle des mâchoires dans le plan de la coupure, perpendiculairement à la direction de la coupure, comme le montre la figure 2.3. Sous la condition *sine qua non* que l'expansion volumique élastique τ du milieu soit restée nulle au cours du processus de déformation plastique, le vecteur de Burgers $\vec{B}$, obtenu par le parcours sur un contour C entourant la singularité correspond exactement à la translation macroscopique qu'a subie la mâchoire $abcd$.

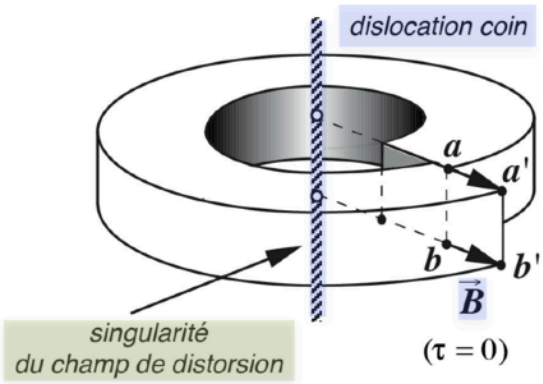


Figure 2.3 - *Autre réalisation d'une dislocation coin par découpage et recollage*

Sous la condition que l'expansion volumique élastique τ du milieu soit restée nulle au cours du processus de déformation plastique, de Burgers $\vec{B}$, obtenu par le parcours sur le contour C entourant la singularité, correspond alors exactement à la translation macroscopique qu'a subie la mâchoire $a'b'cd$. Comme le vecteur $\vec{B}$ doit rester constant si on varie le diamètre du contour d'intégration C ou si on déplace ce contour verticalement, on déduit que *les charges de dislocation doivent se trouver confiner au voisinage immédiat de l'axe* cd *du tuyau, et que leur densité tensorielle doit être une constante le long de cet axe.*

On peut aussi imaginer qu'au sein d'un continu solide on découpe un vide au sein de la matière en forme de tore, comme illustré par la coupe représentée à la figure 2.4a, puis qu'on coupe le plan médian situé au centre du tore. Les deux mâchoires ab et $a'b'$ ainsi formées peuvent alors être déplacées l'une par rapport à l'autre, puis recollées.

Le premier cas possible est de déplacer les deux mâchoires parallèlement au plan de coupure d'une distance $\vec{B}$ comme illustré à la figure 2.4b. Après recollage, le milieu se trouve déformé par des cisaillements et le tore contient une *dislocation macroscopique de type boucle de glissement*, composée de portions de dislocation coin, vis et mixte.

On peut aussi insérer de la matière additionnelle sous forme d'un disque mince d'épaisseur $\vec{B}$ entre les deux mâchoires et souder ce disque aux deux mâchoires (figure 2.4c). On obtient alors une déformation du milieu responsable de toute évidence d'une courbure du milieu de part et d'autre du tore. Quant au tore, il est le siège d'une *dislocation macroscopique, de type boucle prismatique*. Dans ce cas, la boucle prismatique est dite *interstitielle*, car elle contient de la matière additionnelle, et elle est composée d'une seule dislocation coin qui se referme sur elle-

même. Un cas très similaire est obtenu si, au lieu d'ajouter un disque de matière, on soustrait un disque de matière d'épaisseur $\vec{B}$, comme illustré à la figure 2.4d. On obtient aussi une *dislocation macroscopique, de type boucle prismatique*, mais cette boucle est dite *lacunaire*, car il y manque une certaine quantité de matière. Au sein du tore, on retrouve aussi une seule dislo-

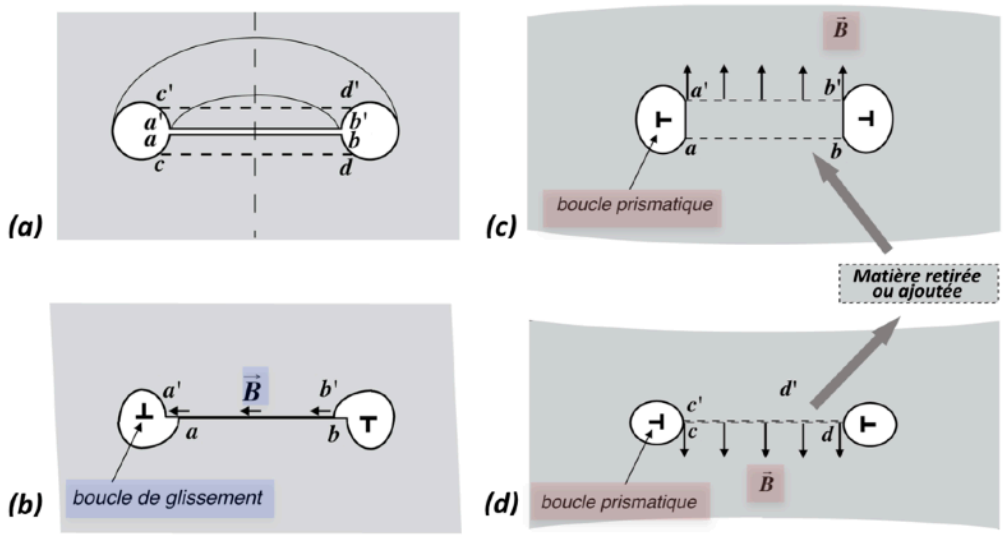


Figure 2.4 - *Découpage initial d'un tore et de son plan médian pour former des boucles* ***(a)*** *et réalisation d'une boucle de dislocation par glissement des mâchoires* ***(b)*** *et de boucles prismatiques de dislocation par addition* ***(c)*** *ou soustraction* ***(d)*** *de milieu.*

cation coin qui se referme sur elle-même.

Toutes les singularités ainsi obtenues sont évidemment responsables d'un champ de distorsion au sein du solide. Par conséquent, elles nécessitent une énergie de formation non nulle. Elles sont stabilisées au sein du solide par le recollage des deux mâchoires de la coupure, donc par les liaisons au sein du solide.

Définition de tenseurs de densité et de flux de charges plastiques

Dans la figure 1.12, on avait représenté les équations géométrocinétiques du milieu, qui relient en fait les *variations temporelles des distorsions du solide*, calculées le long de la trajectoire des particules du milieu à l'aide de *la dérivé particulaire,* aux *variations spatiales du champ de vitesse* $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ du milieu, calculées à l'aide du *gradient* des composantes du champ de vitesse dans le cas du tenseur de distorsion. Et dans les figures 1.13 à 1.15, on avait introduit les équations de géométrocompatibilité, qui assuraient la continuité du champ de déplacement eulérien au sein du solide, donc l'absence de discontinuités des déplacements comme des dislocations. En présence de discontinuités des déplacements comme celles que nous venons de décrire à l'échelle macroscopique il devient nécessaire de redéfinir les équations géométrocinétiques et les équations de géométrocompatibilité du milieu, afin de tenir compte de la présence de ces singularités topologiques de distorsion.

En reprenant la définition du tenseur de distorsion, telle qu'elle avait été obtenue au chapitre

précédent, en présence de déformation plastique, les distorsions totales $\vec{\beta}_i^{\,tot}$ sont la somme de distorsions élastiques, anélastiques et plastiques, telles que $\vec{\beta}_i^{\,tot} = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an} + \vec{\beta}_i^{\,pl}$ Une autre notation de ces distorsions peut être introduite, qui permet de séparer les contributions de déformation plastique des contributions de déformation élastique et anélastique, en écrivant simplement que $\vec{\beta}_i^{\,tot} \rightarrow \vec{\beta}_i + \vec{\beta}_i^{\,pl}$ avec $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an}$, comme illustré dans la figure 2.5(a).

Ce simple changement de dénomination permet d'introduire, par analogie avec les équations de l'électromagnétisme, le concept de *densité tensorielle* $\vec{\lambda}_i$ *de charges,* responsable des distorsions plastiques, en supposant *à priori* la relation $\vec{\lambda}_i = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\beta}_i^{\,pl}$ de définition de $\vec{\lambda}_i$ à partir du tenseur de distorsion plastique $\vec{\beta}_i^{\,pl}$, ainsi que le concept de *flux tensoriel* $\vec{J}_i$ *de charges,* responsable de la variation temporelle des distorsions plastiques, en supposant *à priori* la relation $\vec{J}_i = d\vec{\beta}_i^{\,pl} / dt$ de définition de $\vec{J}_i$ à partir de la dérivé temporelle $d\vec{\beta}_i^{\,pl} / dt$ du tenseur de distorsion plastique $\vec{\beta}_i^{\,pl}$. Il faut encore noter ici que le concept de flux de charges est défini comme *un flux par rapport au réseau*, car $\vec{J}_i$ est déduit de la dérivé particulaire de $\vec{\beta}_i^{\,pl}$, c'est-à-dire de la dérivé temporelle de $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ prise *le long de la trajectoire du réseau solide*.

L'équation géométrocinétique pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$ dans la figure 1.12 contenait déjà une source de sites de réseau S_n, qui représentait en fait une source de plasticité liée à l'expansion volumique du réseau. L'équation géométrocinétique pour le tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i$ obtenu dans la figure 2.5(a) généralise ce fait, en englobant la source de sites de réseau S_n dans le concept de *flux tensoriel* $\vec{J}_i$ *de charges plastiques.*

L'introduction de ces nouveaux tenseurs de densité et de flux de charges n'est pas gratuite, car ceux-ci répondent au mieux à l'exigence de trouver une façon d'exprimer la présence de distorsions plastiques dans un solide de sorte à ce qu'il soit possible de tenir compte de l'état

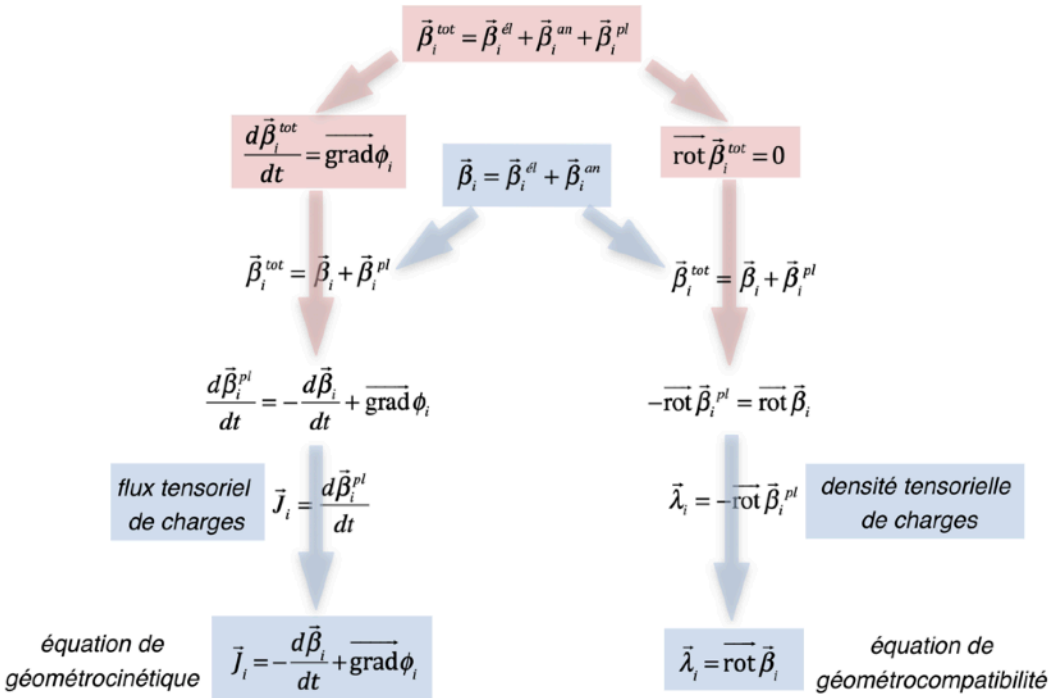


Figure 2.5(a) - *Introduction de la densité et du flux tensoriels de charges plastiques en présence d'élasticité, d'anélasticité et de plasticité*

microscopique du réseau des défauts de structure du solide. Il se vérifiera d'ailleurs *à posteriori*, lors de l'interprétation de ces tenseurs dans la suite de ce chapitre, que cette manière de procéder est effectivement judicieuse. Avec cette approche des phénomènes de plasticité par les tenseurs $\vec{J}_i$ et $\vec{\lambda}_i$, les équations topologiques décrivant la géométrocinétique et la géométrocompatibilité du tenseur de distorsion $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_i^{\,él} + \vec{\beta}_i^{\,an}$ d'un solide élastique, anélastique et plastique s'écrivent maintenant de façon beaucoup plus générale, comme illustrée dans la figure 2.5(a).

Cette nouvelle version des tenseurs topologiques de distorsion et des équations géométrocinétiques n'est en fait rien d'autre qu'un simple changement de terminologie pour les distorsions plastiques, basé sur une analogie avec les deux équations de Maxwell de l'électromagnétisme $\rho = \mathrm{div}\,\vec{D}$ et $\vec{j} = -\partial\vec{D}/\partial t + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H}$. Trouver toutes les potentialités que contient cette formulation des équations topologiques fera donc l'objet de la suite de ce chapitre.

La *densité de charges de dislocation* $\vec{\lambda}_i$ et le *flux de charges de dislocation* $\vec{J}_i$ sont des grandeurs tensorielles, sur lesquelles il est possible d'appliquer des opérations de symétrie pour

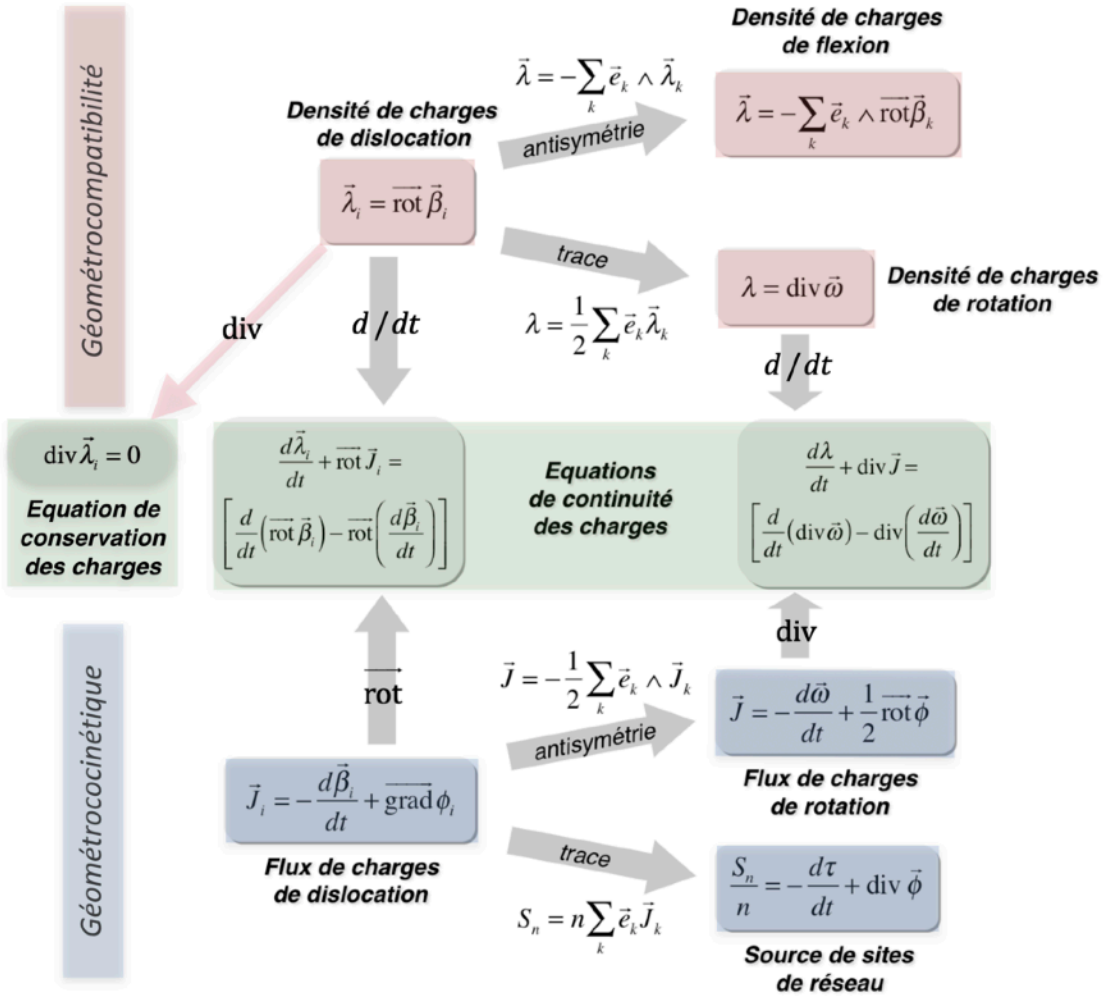


Figure 2.5(b) - *Décompositions des densités et des flux de charges et équations de continuité et de conservation des charges*

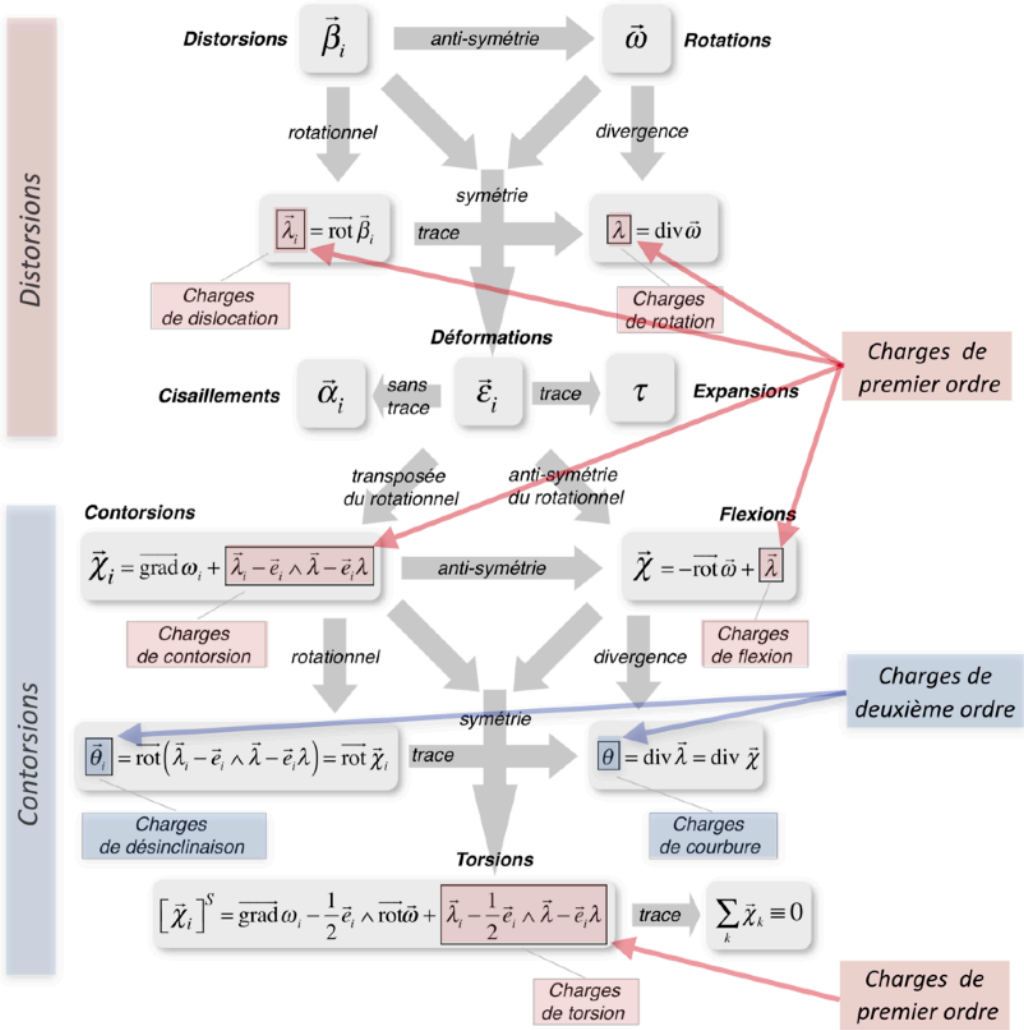


Figure 2.6 - *Le système des distorsions et des contorsions en présence de charges plastiques*

réduire leur ordre tensoriel, c'est-à-dire pour en faire des grandeurs vectorielles et des grandeurs scalaires. Ces opérations de symétrie sont reportées dans la figure 2.5(b).

Concernant les équations de géométrocompatibilité, on constate que la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation contient *une densité vectorielle* $\vec{\lambda}$ *de charges de flexion* et *une densité scalaire* λ *de charges de rotation.* On reviendra plus tard sur l'interprétation des charges vectorielles de flexion, mais on peut déjà donner une interprétation des effets des charges scalaires de rotation. En effet, si on considère la figure 1.15, on sait que la condition de compatibilité $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$ interdit la singularité par divergence du champ de rotation, ce qui signifie que si $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = \lambda \neq 0$ au sein du volume ***V***, il peut apparaître un champ de vecteurs rotation qui divergent, de la même manière que la présence locale d'une densité de charges électriques non nulle à un endroit de l'espace induit un champ électrique divergent.

Concernant les équations de géométrocinétique, on constate que le flux tensoriel $\vec{J}_i$ de charges de dislocation contient *un flux vectoriel* $\vec{J}$ *de charges de rotation* et qu'il refait apparaître la *source volumique scalaire* S_n *de sites de réseau.*

La combinaison mathématique de la dérivé particulaire des équations de géométrocompatibilité avec le rotationnel ou la divergence des équations de géométrocinétique permet de déduire *les équations de continuité* de la figure 2.5(b) pour les charges de distorsion plastique, qui relient l'évolution temporelle des densités de charge le long de la trajectoire du milieu aux variations spatiales des flux de charge. Ces équations de continuité font apparaître des termes de sources de charges plastiques assez étonnants, en ce sens que ces termes sont associés à *l'existence possible d'une non-commutativité de l'opérateur temporel de dérivé particulaire avec les opérateurs d'espace.* Finalement, en ce qui concerne la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, on constate qu'elle est liée au rotationnel de $\vec{\beta}_i$, de sorte qu'elle satisfait obligatoirement la relation de l'analyse vectoriel $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i = 0$ que nous appellerons *l'équation de conservation des charges de dislocation*, équation qui sera appelée par la suite à jouer un rôle considérable dans l'interprétation topologique des charges de dislocation.

Le concept macroscopique de charges de contorsion plastique

Dans la figure 1.16, on avait reporté le système complet des distorsions et des contorsions d'un réseau solide en coordonnées d'Euler, dans le cas d'un solide géométrocompatible. Le même schéma, s'il est tracé dans le cas d'un solide avec une *densité de charges de dislocation* $\vec{\lambda}_i$ non nulle, devient nettement plus complexe comme l'illustre la figure 2.6.

Hormis la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, la densité vectorielle $\vec{\lambda}$ de charges de flexion et la densité scalaire λ de charges de rotation, que nous appellerons des charges de 1er ordre associées aux distorsions plastiques, il apparaît des charges de 2ème ordre, associées aux contorsions plastiques, qu'on nommera la *densité tensorielle* $\vec{\theta}_i$ *de charge de désinclinaison* et la *densité scalaire* θ *de charge de courbure*.

On constate aussi que les expressions des *contorsions* $\vec{\chi}_i$, des *flexions* $\vec{\chi}$ et des *torsions* $\left[\vec{\chi}_i\right]^S$ du réseau solide deviennent nettement plus compliquées puisqu'elles font maintenant appel dans leur expressions respective à l'existence de *densités de charge de contorsion, de flexion et de torsion* de 1er ordre, déduites comme des combinaisons des charges de dislocation $\vec{\lambda}_i$, de flexion $\vec{\lambda}$ et de rotation λ.

Dans la figure 1.19, on a vu que la condition de compatibilité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = 0$ interdisait la singularité par désinclinaison du champ de rotation $\vec{\omega}^{(\varepsilon)}$ déduite du tenseur de déformation. Par conséquent, *si la condition de compatibilité n'est plus nulle*, donc si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}_i = \vec{\theta}_i \neq \vec{0}$, le parcours sur le contour fermé $\boldsymbol{C}$ aura comme résultat l'existence d'un vecteur de fermeture $\vec{\Omega}$ non nul, appelé *vecteur de Frank.* Ceci signifie d'un point de vue topologique et physique qu'il existera *des discontinuités des rotations par déformation.* Les discontinuités $\vec{\Omega}$ sont appelées des *désinclinaisons (disclinations* en anglais) au sein du réseau solide.

Concernant les équations de géométrocompatibilité pour les charges de 2ème ordre, on peut aussi donner une interprétation des effets des charges scalaires θ de courbure. En effet, si on considère la figure 1.20, on sait que la condition de compatibilité $\mathrm{div}\,\vec{\chi} = 0$ interdit la singularité par divergence du champ de flexion, ce qui signifie que si $\mathrm{div}\,\vec{\chi} = \theta \neq 0$ au sein du volume ***V***, il peut apparaître un champ de vecteurs de courbure qui divergent, de la même manière que la présence locale d'une densité de charges électriques non nulle à un endroit de l'espace induit un champ électrique divergent.

Les opérations par symétrie et par opérateurs d'analyse vectorielle permettant de déduire, à

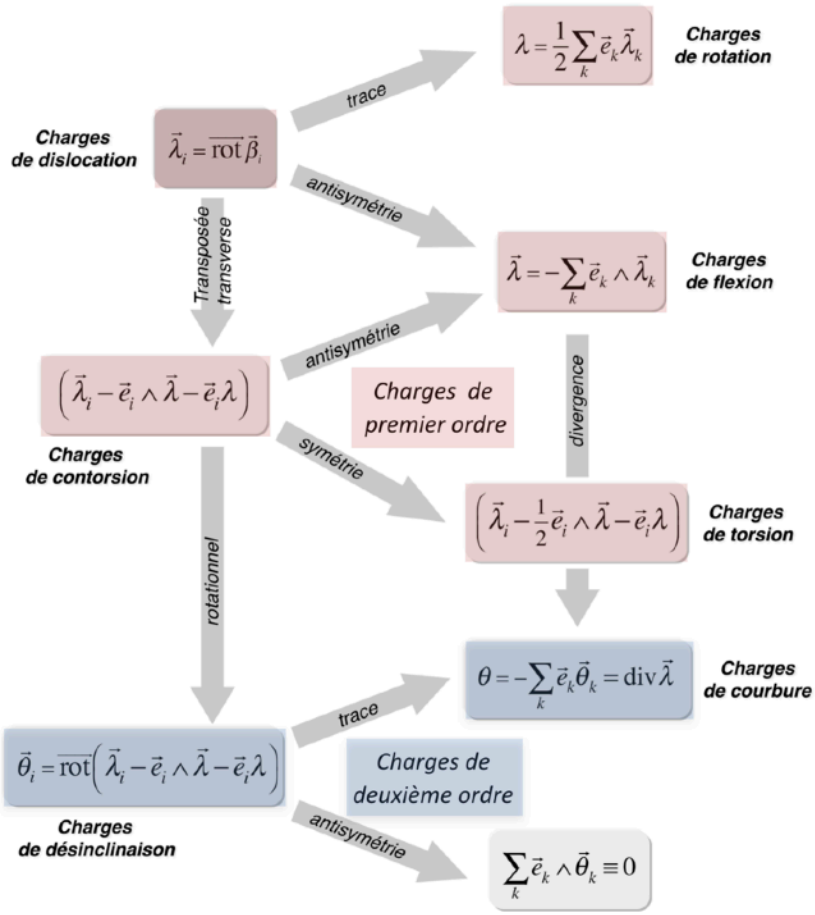


Figure 2.7 - *Déduction de l'ensemble des densités de charge à partir de la densité de charge de dislocation*

partir de la densité tensorielle de charge de dislocation $\vec{\lambda}_i$, l'ensemble des densité de charges reportées dans la figure 2.6 sont résumées à la figure 2.7.

Il est assez simple d'imaginer la réalisation d'une désinclinaison à l'échelle macroscopique dans un milieu continu solide en coupant localement ce solide et en tournant l'une par rapport à l'autre les deux mâchoires de la coupure, avant de les recoller ensemble. Ce processus est illustré schématiquement à la figure 2.8 à l'aide d'un tuyau de matière qu'on coupe selon le $abcd$ et qu'on recolle de deux manières différentes:

- soit par cisaillement du plan $a'b'cd$ d'une des mâchoires sans addition ou soustraction de matière (figure 2.8a), ce qui conduit à une *singularité topologique unidimensionnelle* située sur l'axe cd , appelée *désinclinaison vis* (en anglais *twist disclination*),
- soit par rotation d'une des interfaces autour de l'arrête cd avec addition ou soustraction de matière (figure 2.8b), ce qui conduit à une singularité topologique unidimensionnelle située sur l'axe cd , appelée *désinclinaison coin* (en anglais *wedge disclination*).

Sous la condition que l'expansion volumique élastique τ du milieu soit restée nulle au cours du processus de déformation plastique, le vecteur $\vec{\Omega}$, obtenu par le parcours sur le contour C entourant la singularité, correspond alors exactement à la rotation macroscopique qu'a subie la mâchoire $a'b'cd$. Comme le vecteur $\vec{\Omega}$ doit rester constant si on varie le diamètre du contour d'intégration C ou si on déplace ce contour verticalement, on déduit que *les charges de désin-*

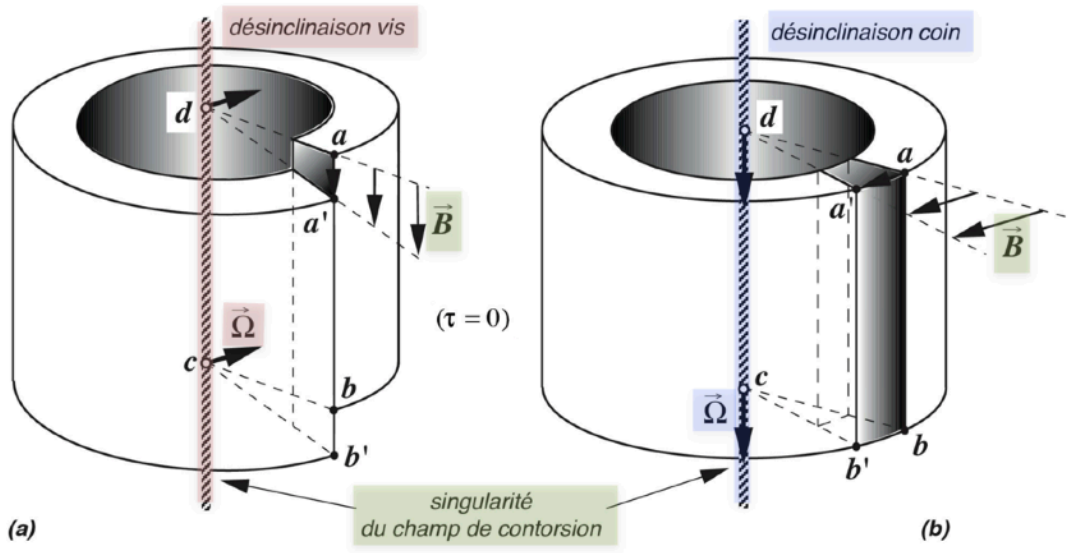


Figure 2.8 - *Réalisation de désinclinaisons vis* ***(a)*** *et coin* ***(b)*** *par découpage et recollage*

clinaison doivent se trouver confiner au voisinage immédiat de l'axe cd *du tuyau, et que leur densité tensorielle doit être une constante le long de cet axe.*

Les singularités topologiques ainsi obtenues sont responsables d'un champ de distorsion au sein du solide. Par conséquent, elles nécessitent une énergie de formation non nulle. Elles sont stabilisées au sein du solide par le recollage des deux mâchoires de la coupure, donc par les liaisons au sein du solide.

En comparant les figures 2.2 et 2.8, on constate une ressemblance étonnante entre dislocations et désinclinaisons vis, ainsi qu'entre dislocations et désinclinaisons coins. Cette ressemblance n'est pas fortuite, puisque les opérations utilisées pour générer ces discontinuités sont très semblables. Il est intéressant de constater notamment que les désinclinaisons macroscopiques présentent aussi un vecteur déplacement $\vec{B}$ allant de a à a' (figure 2.8), tout comme les dislocations macroscopiques (figure 2.2). Cependant, ce vecteur $\vec{B}$, dans le cas des désinclinaisons, augmente linéairement avec le diamètre de la boucle d'intégration C qu'on utilise pour le calculer. Ceci signifie qu'en présence d'une désinclinaison macroscopique, associée à une densité de charges de désinclinaison répartie le long de l'axe cd du tuyau, il doit aussi exister une densité de charges de dislocation. Mais celle-ci, au lieu d'être localisée sur l'axe cd du tuyau comme c'est le cas pour une dislocation macroscopique, va se trouver répartie de manière homogène sur une *surface* située dans le plan de coupure $abcd$ (figure 2.8), de telle sorte que le vecteur de Burgers $\vec{B}$ augmente linéairement avec le diamètre de la boucle d'intégration C.

On peut aussi imaginer qu'au sein d'un continu solide on découpe un vide de matière en forme de tore, comme illustré par la coupe représentée à la figure 2.4a, puis qu'on coupe le plan médian situé au centre du tore. Les deux mâchoires ab et $a'b'$ ainsi formées peuvent alors être déplacées l'une par rapport à l'autre, puis recollées. On peut procéder comme à la figure 2.9a, et déplacer les deux mâchoires parallèlement par une rotation $\vec{\Omega}$ de l'une par rapport à l'autre dans le plan de coupure. Après recollage, le milieu se trouve déformé par la rotation $\vec{\Omega}$ et le tore contient alors une *boucle de désinclinaison macroscopique de type vis*.

A noter ici que le champ de déplacement du milieu de part et d'autre du plan de coupure est tangentiel à ce plan et que le vecteur curviligne de déplacement $\vec{B}$ sur le plan de coupure croît d'une valeur nulle au centre jusqu'à une valeur maximum sur les bords du tore. Au niveau du tore, le champ de déplacement local $\vec{B}$ ressemble à s'y méprendre au champ de déplacement d'une dislocation vis refermée sur elle-même, mais c'est en fait une *pseudo-dislocation* car le *vecteur de Burgers curviligne*, tangentiel à la ligne de dislocation, est non conservé dans ce cas, comme le montre bien la figure 2.9b.

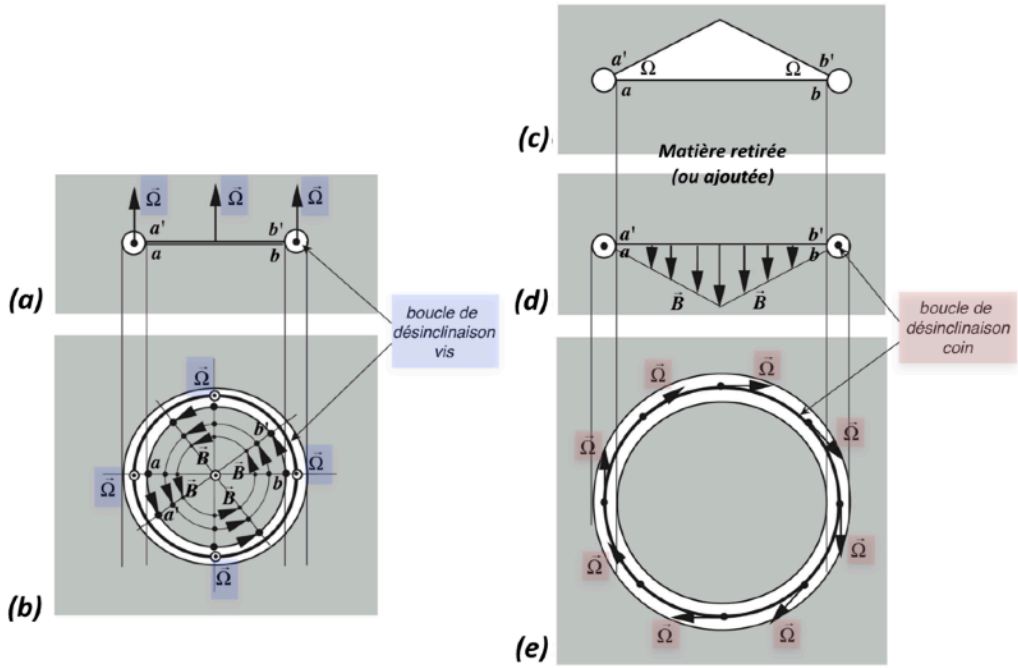


Figure 2.9 - *Réalisation d'une boucle de désinclinaison vis par rotation des mâchoires* ***(a)*** *et* ***(b)*** *et d'une boucle de désinclinaison coin par retrait (ou ajout) d'un morceau de milieu de forme conique* ***(c)***, ***(d)*** *et* ***(e)***

On pourrait aussi enlever un morceau de milieu au centre du tore, de forme lenticulaire ou conique et d'angle Ω à la base, comme illustré à la figure 2.9c. En ce cas, le plan de recollage présente un champ de déplacement local $\vec{B}$ correspondant à des vecteurs de Burgers perpendiculaires dont les longueurs présentent une symétrie circulaire (figure 2.9d). Au niveau du tore, la déformation requise pour le recollage est une rotation $\vec{\Omega}$ tangentielle au tore, qui correspondrait donc à une *boucle de désinclinaison macroscopique de type coin*, mais qui est en fait une *pseudo-désinclinaison* puisque le vecteur de Frank, toujours tangentiel à la ligne de désinclinaison, est non conservé le long de la ligne (figure 2.9d).

Les dislocations quantifiées dans un réseau

Après avoir décrit les dislocations et le désinclinaisons macroscopiques qui peuvent apparaître dans un milieu continu, on peut maintenant se demander comment il est possible d'introduire ces défauts topologiques à l'échelle microscopique d'un réseau solide. Il est clair que la présence d'un réseau doit forcément impliquer une forme de quantification de ces défauts, sous

forme de *singularités topologiques du réseau.*

Ce n'est qu'en 1934 qu'a réellement démarré la recherche de ce type de singularités dans les réseaux solides, et donc que *la théorie des dislocations de réseau* est née, suite à trois fameux papiers publiés indépendamment et décrivant chacun à sa façon la dislocation coin. Ce sont les publications d'Orowan[3], de Polanyi[4] et de Taylor[5]. Puis c'est en 1939 que Burgers[6] décrivit les dislocations vis et mixtes. Et c'est finalement en 1956 que sont reportées les premières observations expérimentales de dislocations dans les métaux, simultanément par Hirsch, Horne et Whelan[7] et par Bollmann[8], grâce au microscope électronique. Quant aux désinclinaisons, c'est en 1904 que Lehmann[9] les observe pour la première fois dans des cristaux moléculaires, et c'est en 1922 que Friedel[10] en donne une première description physique. Ensuite, à partir de la moitié du vingtième siècle, la physique des défauts dans les solides a pris une ampleur considérable.

Comme la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation doit satisfaire l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$, il lui est impossible d'apparaître sous forme ponctuelle et elle doit se présenter sous la forme de *trois champs vectoriels non divergents*. Cette condition forte implique que la densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation doit toujours occuper un *domaine de volume non nul* au sein du milieu solide, qui doit présenter une *forme de corde tubulaire*, qui doit forcément traverser le solide de part en part, ou bien une forme de *boucle torique*.

Le domaine de charges $\vec{\lambda}_i$ de forme tubulaire ou torique peut être modélisé sous la forme d'une *ligne de dislocation,* communément appelée *dislocation,* représentable par une *fibre centrale unidimensionnelle* située au centre de la corde de densité $\vec{\lambda}_i$ non nulle de charges. Cette *ligne de dislocation* doit alors nécessairement, soit traverser le solide de part en part, soit former une *boucle de dislocation* fermée sur elle-même.

Les domaines connexes de densité non nulle de charges de dislocation peuvent être modélisés de la manière la plus simple sous forme de *cordes minces*. Si la corde de dislocation est suffisamment mince (de section suffisamment faible), la charge de densité $\vec{\lambda}_i$ peut être représentée par une seule grandeur confinée au voisinage immédiat de la fibre centrale de la corde, qu'on appellera *ligne de dislocation*, en introduisant la notion de *charge tensorielle linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation*, à savoir un ensemble de trois vecteurs définis sur la fibre centrale.

On peut alors montrer que les cordes rectilignes apparaissant dans un réseau solide sont *quantifiées* à l'échelle microscopique du réseau (figures 2.10 et 2.11), et que ces cordes repré-

---

[3] *E. Orowan, Z. Phys., vol. 89, p. 605,614 et 634, 1934*

[4] *M. Polanyi, Z. Phys., vol.89, p. 660, 1934*

[5] *G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London, vol. A145, p. 362, 1934*

[6] *J. M. Burgers, Proc. Kon. Ned. Akad. Weten schap., vol.42, p. 293, 378, 1939*

[7] *P. B. Hirsch, R. W. Horne, M. J. Whelan, Phil. Mag., vol. 1, p. 667, 1956*

[8] *W. Bollmann, Phys. Rev., vol. 103, p. 1588, 1956*

[9] *O. Lehmann, «Flussige Kristalle», Engelman, Leibzig, 1904*

[10] *G. Friedel, Ann. Physique, vol. 18, p. 273, 1922*

sentent alors des *singularités plastiques élémentaires* des champs de distorsion, autrement dit les *"particules élémentaires"* de la déformation plastique du réseau.

Si on considère le cas d'un réseau ordonné de particules à l'échelle microscopique, on peut y introduire des dislocations par coupure des liaisons sur un plan du réseau, déplacement parallèle des mâchoires et reconstitution des liaisons, comme illustré aux figures 2.10 et 2.11 dans le cas d'un réseau cubique simple.

Le vecteur de Burgers $\vec{B}$ des singularités ainsi obtenues, c'est-à-dire la discontinuité microscopique des déplacements du réseau due à la présence de la dislocation, se déduit en considérant un circuit fermé C sur le réseau du solide réel, entourant la singularité, et en cherchant le vecteur de fermeture $\vec{B}$ du circuit ouvert correspondant dans *le réseau virtuel non déformé*.

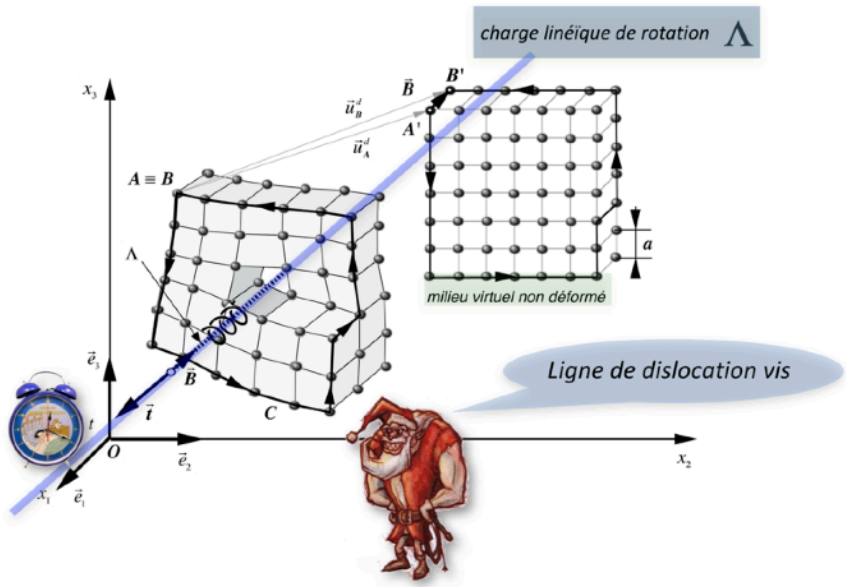


Figure 2.10 - *Ligne de dislocation de type vis quantifiée dans un réseau cubique*

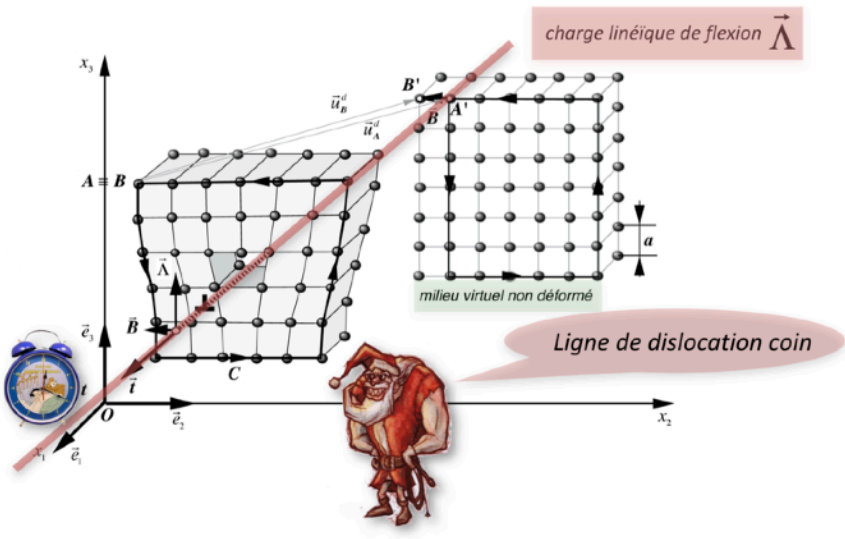


Figure 2.11 - *Ligne de dislocation de type coin quantifiée dans un réseau cubique*

Grâce aux figures 2.10 et 2.11, on constate que les singularités microscopiques de réseau ont une particularité essentielle: *leur vecteur de Burgers est quantifié*, c'est-à-dire que ses composantes $\boldsymbol{B}_i$ ne peuvent être que des multiples entiers du pas a du réseau du milieu virtuel, donc du réseau en expansion volumique homogène de valeur τ .

La nature de la singularité plastique microscopique peut changer suivant les directions respectives que prennent, dans le système de coordonnées locales, le vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ et le vecteur unité $\vec{\boldsymbol{t}}$ tangent à la ligne:

- lorsque $\vec{\boldsymbol{B}}$ est parallèle à $\vec{\boldsymbol{t}}$ (figure 2.10), la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente une trace non-nulle ($\Lambda \neq 0$), donc *une charge de rotation*, et une partie antisymétrique nulle ($\vec{\Lambda} = 0$). On parle en ce cas de *dislocations vis*, et de *charge linéique* Λ *de rotation de la dislocation vis*, et on représente symboliquement celle-ci par une vis située sur la ligne de dislocation. Comme $\Lambda = -\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{t}} \,/\, 2$, lorsque la dislocation vis présente une *rotation droite,* identique au sens de rotation d'une vis normale ou d'un tire-bouchon, Λ est positif et les vecteurs $\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ sont orientés dans des directions opposées. Par contre, si la dislocation vis présente une *rotation gauche*, donc dans le sens de rotation opposé à celui d'une vis normale ou d'un tire-bouchon, Λ est négatif et les vecteurs $\vec{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ sont orientés dans la même direction (figure 2.12). A noter que *le choix d'une direction* $\vec{\boldsymbol{t}}$ *donnée est parfaitement arbitraire puisque seul le signe de* Λ *est fixé.*

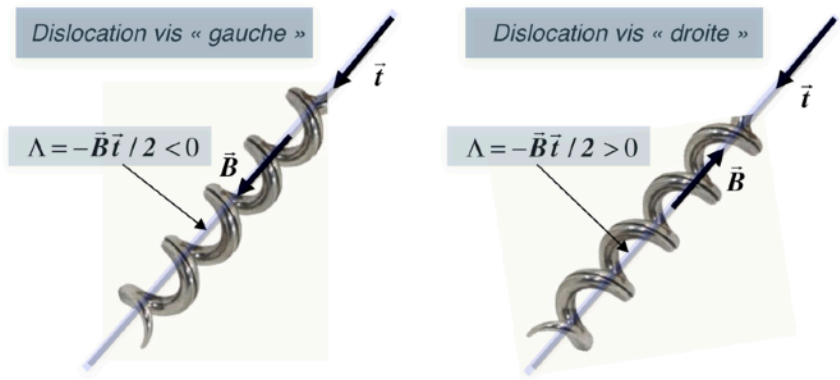


Figure 2.12 - *Vecteurs de Burgers de dislocations de type vis, «gauche» et «droite» respectivement*

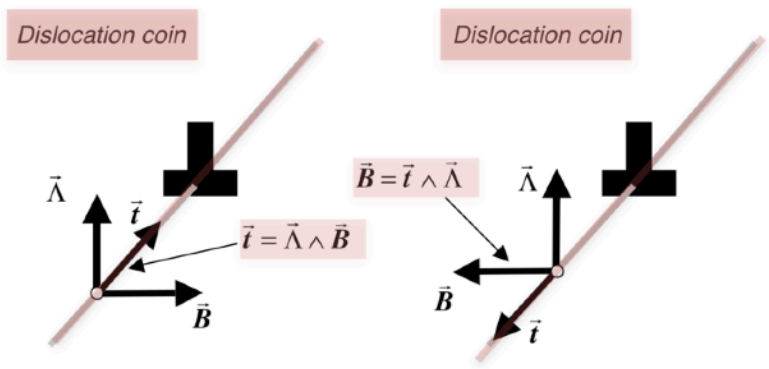


Figure 2.13 - *Vecteurs de Burgers de dislocations de type coin*

- lorsque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{t}$ (figure 2.11), la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente une trace nulle ($\Lambda = 0$), donc aucune charge de rotation, mais une partie antisymétrique non-nulle ($\vec{\Lambda} \neq 0$). On parle en ce cas de *dislocations coin*, et de *charge linéique* $\vec{\Lambda}$ *de flexion de la dislocation coin,* et on représente symboliquement celle-ci par un signe $\perp$ sur la ligne de dislocation, orienté de sorte à représenter le plan additionnel de particules. Le vecteur $\vec{\Lambda}$ possède toujours la direction du plan additionnelle $\perp$ de la dislocation coin (figure 2.13).
- lorsque $\vec{B}$ n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à $\vec{t}$, la *charge linéique* $\vec{\Lambda}_i$ *de dislocation* présente bien une trace non-nulle ($\Lambda \neq 0$), mais aussi une partie antisymétrique non-nulle ($\vec{\Lambda} \neq 0$), de telle sorte que celle-ci se comporte à la fois comme une source de rotations et de flexions élastiques et anélastiques. On parle en ce cas de *dislocations mixtes*.

Dans un réseau discret, une dislocation peut parfaitement changer de direction. Autrement dit, le long de la ligne de dislocation, le vecteur tangent $\vec{t}$ n'est pas forcément conservé. En ce cas, comme le vecteur de Burgers $\vec{B}$ est conservé dans le référentiel local, ceci signifie que la dislocation doit changer de nature. Par exemple, à la figure 2.14, on a représenté un modèle de réseau cubique simple dans lequel une dislocation vis pénètre dans la face de gauche, tourne en devenant mixte au sein du réseau et émerge sous forme d'une dislocation coin sur la face adjacente de droite.

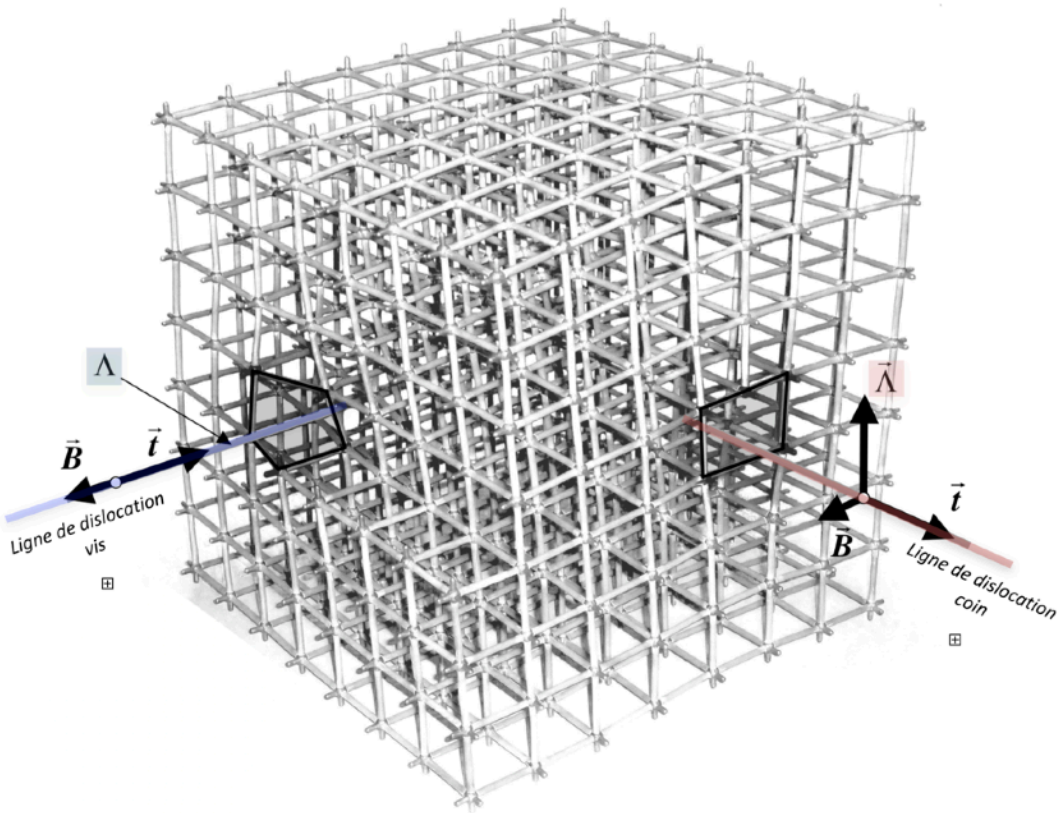


Figure 2.14 - *Dislocation passant de type vis à type coin dans un réseau cubique*

Les dislocations quantifiées sont les vecteurs les plus élémentaires de la déformation plastique d'un réseau. En ce sens, on pourrait les appeler les "*particules élémentaires*" de la déformation plastique. D'ailleurs, toute corde de dislocation possède son "*anti-corde*". En effet, il est

aisé de voir que deux dislocations parallèles de même direction $\vec{t}$ et de vecteurs de Burgers $\vec{B}$ et $-\vec{B}$ respectivement s'annihilent complètement si elles viennent à se rencontrer au sein du réseau.

On constate aussi que les dislocations vis, porteuses d'une charge linéique scalaire $\Lambda \neq 0$, sont *sources d'un champ de rotations locales divergentes,* qui est, comme nous l'avons vu, l'analogue du champ électrique. Ainsi, à une distance R de la corde, la norme du champ de rotation vaut simplement $|\vec{\omega}| = |\Lambda| / 2\pi R$

Quant aux dislocations coins, qui sont porteuses d'une charge de flexion $\vec{\Lambda} \neq 0$, elles sont *sources d'une flexion du réseau,* donc *d'une courbure locale du réseau* dans leur voisinage comme l'illustre bien la dislocation émergeant du cristal cubique à la figure 2.14.

Dissociation des dislocations quantifiées dans un réseau

Les dislocations apparaissant dans des structures un peu plus complexes que le réseau cubique simple, comme par exemple les réseaux cubiques à faces centrées, cubiques centrés ou hexagonaux, présentent en général *des structures de coeur nettement plus compliquées*. Il peut ainsi apparaître, essentiellement pour des raisons énergétiques, et suivant le système cristallin considéré, *une dissociation du coeur de la dislocation en deux ou plusieurs dislocations partielles,* dont les vecteurs de Burgers individuels sont des fractions des vecteurs de translation du réseau.

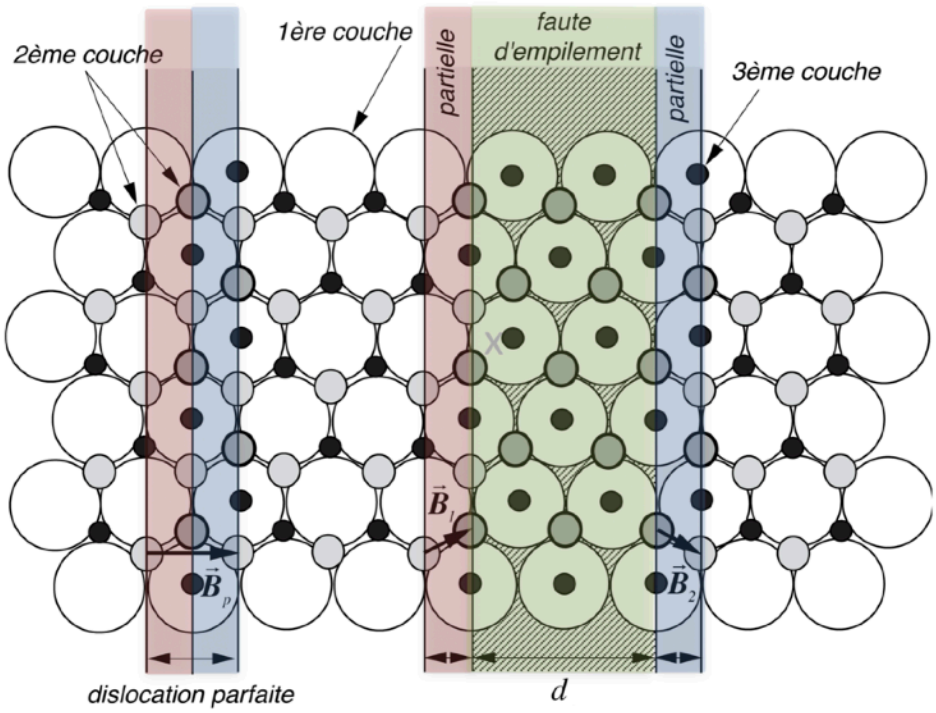


Figure 2.15 - *Dissociation d'une dislocation parfaite en deux partielles et ruban de faute d'empilement dans un un réseau cubique à faces centrées*

Par exemple, dans les métaux cubiques à faces centrées *(CFC)*, l'empilement des atomes est caractérisé par des séquences *abc abc abc ...* (figure 2.15). Le vecteur de Burgers $\vec{B}_p$

d'une dislocation parfaite doit en principe y relier deux noeuds du réseau. Mais pour des raisons énergétiques, les vecteurs de Burgers les plus favorables sont ceux qui ont une longueur minimale, car l'énergie de distorsion stockée dans le réseau par une dislocation est proportionnelle au carré de son vecteur de Burgers. Ainsi dans le cas de la figure 2.15, les dislocations ont intérêt à se dissocier sur leur plan de glissement en deux partielles de vecteurs de Burgers $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$, de sorte que $\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Dans le cas de cette dissociation, on a en effet $\vec{B}_1 \vec{B}_2 > 0$, de sorte que $\vec{B}_p^2 = \vec{B}_1^2 + \vec{B}_2^2 + 2\vec{B}_1 \vec{B}_1 > \vec{B}_1^2 + \vec{B}_2^2$. Les deux partielles obtenues à la figure 2.15 par cette dissociation sont dites *de type Shockley*. La distance entre les deux partielles est alors contrôlée par une compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles qui se repoussent, et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute d'empilement cristallin *(abc ac abc abc ...)* situé entre les deux dislocations partielles, comme le montre bien la figure 2.15.

Comme le ruban de faute d'empilement possède une énergie γ par unité de surface, l'énergie totale $E_t(d)$ par unité de longueur de dislocation pour une dislocation dissociée sur une distance d s'écrit $E_t(d) = \gamma d + E_d(d)$, où $E_d(d)$ est l'énergie des deux partielles en fonction de la distance d les séparant, qui est une fonction monotone décroissante diminuant de E_0 pour $d = 0$ à $2E_0 / 3$ pour $d \to \infty$ dans le cas des partielles de Shockley illustrées à la figure 2.15.

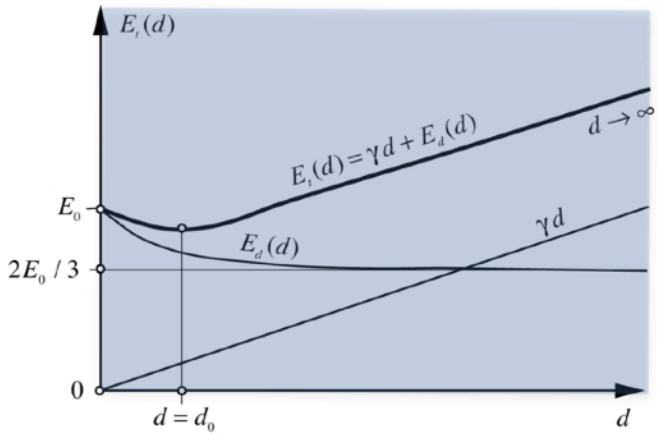


Figure 2.16 - *Energie totale de deux dislocations partielles en fonction de la distance les séparant, source d'une «force forte» d'attraction entre elles*

L'énergie $E_t(d)$ présente donc un minimum pour la distance $d = d_0$ (figure 2.16), qui est la distance d'équilibre entre les deux partielles, contrôlée par la compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles répulsives et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute d'empilement cristallin entre les deux partielles. On voit apparaître ici un comportement de l'énergie $E_t(d)$ qui induit une force d'interaction entre les deux partielles qu'on pourrait qualifier de *«force forte»*, au sens que l'énergie de la paire de partielles présente un minimum qui fixe la position d'équilibre d_0, mais que celle-ci ne cesse d'augmenter si on essaie d'augmenter la distance de séparation au-delà de d_0. Le qualificatif de «force forte» est proposé ici car le comportement attractif de la force d'interaction entre les partielles à grande distance présente une analogie très intéressante avec

la force forte agissant entre les quarks du Modèle Standard des particules élémentaires.

A titre d'illustration exemplaire, on a représenté à la figure 2.17 le modèle d'une dislocation mixte, avec une nature coin et vis à la fois, dissociée en deux partielles dans une structure cubique à faces centrées. On y voit clairement l'existence d'un défaut d'empilement entre les deux partielles. Et comme il s'agit là d'une dislocation mixte, les deux partielles y présentent une série de décrochements (kinks en anglais). De plus, on peut même observer la flexion du réseau induite par la partie coin de la dislocation dissociée.

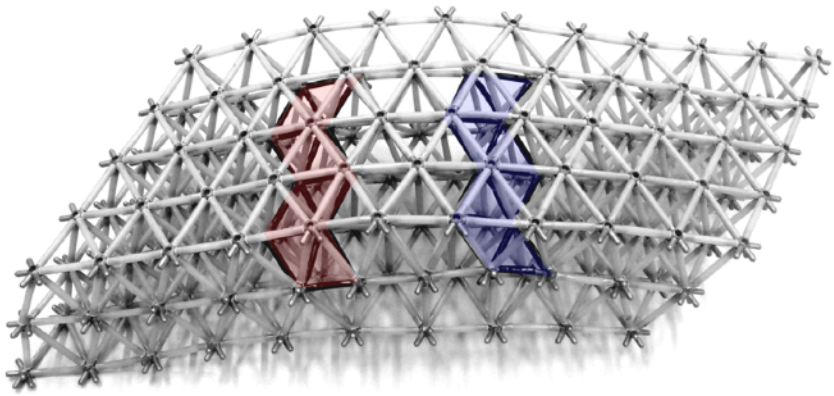


Figure 2.17 - *Modèle d'une dislocation mixte dans un réseau cubique à faces centrées, présentant une dissociation en deux partielles, ainsi que des décrochements sur les partielles*

L'ensemble de toutes les conséquences liés à la structure du réseau sont évidemment trop particulières de chaque structure cristalline envisageable pour être traitées ici en détail. Mais elles peuvent être abordées dans tout livre traitant des dislocations dans les structures cristallines.

Membranes de dislocations quantifiées dans un réseau

On appelle *membrane chargée* une interface mince qui contient des charges de dislocation, et qui sépare deux milieux ne contenant pas de charges. Ces membranes peuvent être des surfaces quelconques dans l'espace *(surfaces infinies, surfaces fermées sphéroïdales ou toriques, rubans ou tubes creux, plaques minces, etc.)*, à la seule condition topologique que, sur tout point de la membrane, l'équation de conservation des charges de dislocation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ soit satisfaite et que les charges de désinclinaison dérivent des charges de dislocation par la relation $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right]$.

Si une membrane chargée de dislocation est très mince, il est possible d'introduire la notion de *charge tensorielle surfacique* $\vec{\Pi}_i$ *de dislocation.* L'existence d'une *charge surfacique de dislocation* $\vec{\Pi}_i$ dans la membrane conduit à une discontinuité des composantes tangentielles des vecteurs de distorsion $\vec{\beta}_i$ de part et d'autre de celle-ci, et elle est soumise à la condition *qu'il existe un gradient des composantes du vecteur de Burgers sur la surface de la membrane*.

La modélisation bidimensionnelle d'une membrane mince obtenue avec des charges surfaciques est généralement appelée un *joint.* Le joint est alors entièrement caractérisé par la donnée du tenseur $\vec{\Pi}_i$ de charge surfacique de dislocation, dont les vecteurs sont *tangents à la*

surface de la membrane, ce qui est en fait une conséquence directe de l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ des charges de dislocations. Mais il peut aussi être caractérisé par la donnée de la partie anti-symétrique $\vec{\Pi}$ (la charge surfacique de flexion du joint) et de la trace Π (la charge surfacique de rotation du joint) du tenseur de charge $\vec{\Pi}_i$, comme dans le cas des lignes unidimensionnelles de dislocation. Ce point est parfaitement illustré dans la figure 2.18, dans laquelle on présente trois membranes minces dont les vecteurs de Burgers, croissant linéairement selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$, sont orientés respectivement selon les axes $\boldsymbol{O}x_3$, $\boldsymbol{O}x_1$ et $\boldsymbol{O}x_2$. Comme ces membranes minces de dislocation permettent en fait de désorienter ou d'accommoder les *grains solides* situés de part et d'autre de la membrane, on les appelle généralement des *joint de grains.*

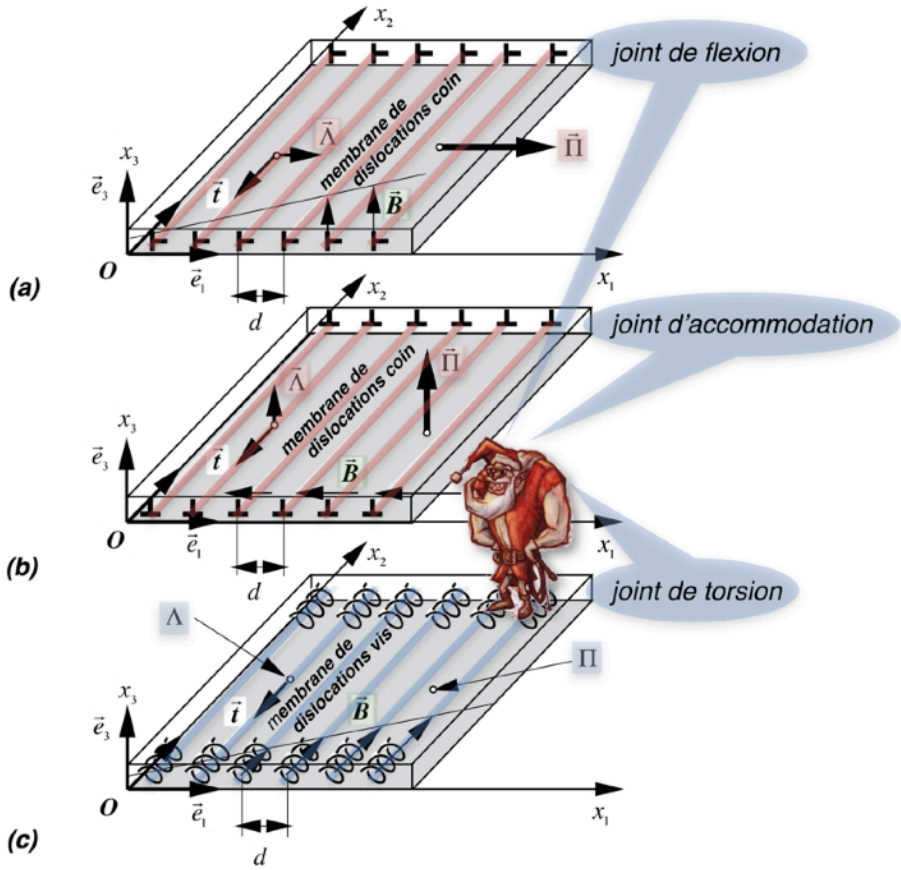


Figure 2.18 - *Membranes de dislocations de type coin: joint de flexion* ***(a)*** *et joint d'accomodation* ***(b)*** *ou membranes de dislocations de type vis: joint de torsion* ***(c)***

On peut par exemple considérer que ces membranes sont en fait chargées par des dislocations coins ou vis orientées parallèlement à l'axe $\boldsymbol{O}x_2$. On peut alors simplement représenter chaque dislocation individuelle par une charge linéique vectorielle $\vec{\Lambda}$ si c'est une dislocation coin ou par une charge linéique scalaire Λ si c'est une dislocation vis. On vérifie alors que:

- la membrane mince de type coin avec un vecteur de Burgers perpendiculaire à la surface et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 2.18a) peut être entièrement caractérisée par une *charge surfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$ *de flexion*, dont le vecteur est tangent au plan de la membrane, dirigé

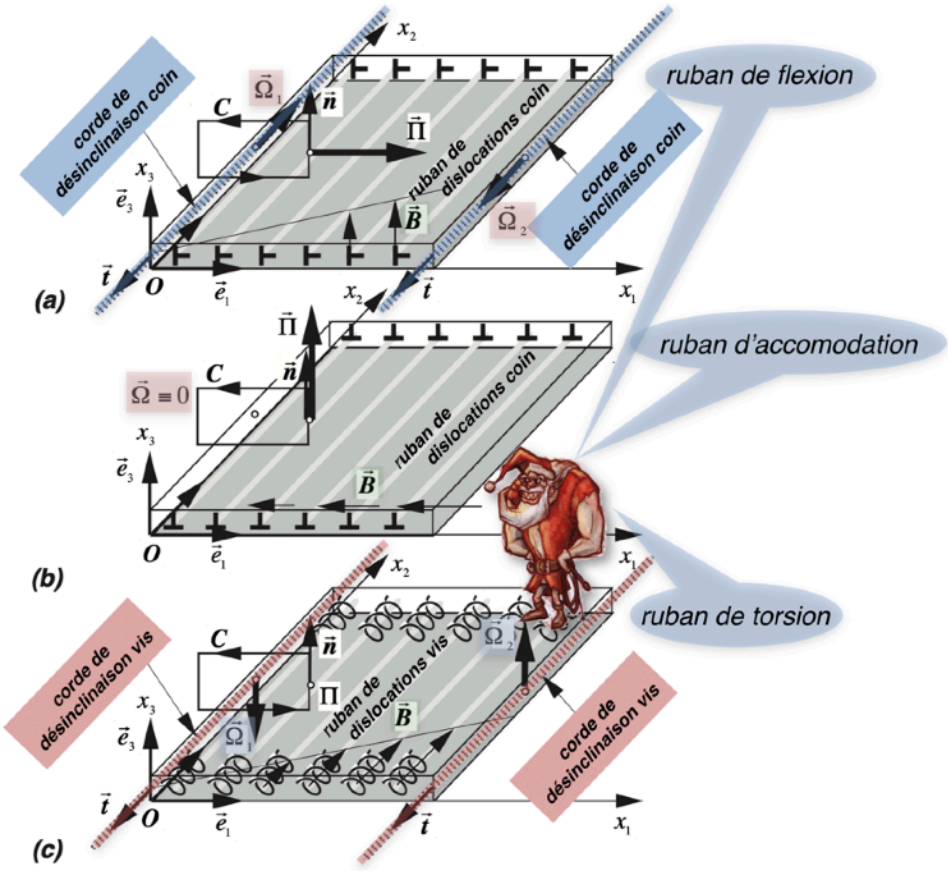


Figure 2.19 - *Rubans de dislocations bordés de lignes de désinclinaison de type coin* ***(a)*** *et de type vis* ***(c)****.*
Le ruban de dislocation ***(b)*** *n'est pas bordé de lignes de désinclinaisons.*

selon $\boldsymbol{O}x_1$, et valant $\vec{\Pi} = \vec{\Lambda} / \boldsymbol{d}$. Comme ce type de membrane coin permet de désorienter les grains solides situés de part et d'autre de la membrane, on l'appelle un *joint de désorientation*, et dans ce cas particulier, comme la désorientation correspond à une flexion du solide, on parle de *joint de flexion*.

- la membrane mince de type coin avec un vecteur de Burgers parallèle à la surface et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 2.18b) peut être entièrement caractérisée par une *charge surfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$ *de flexion*, dont le vecteur est perpendiculaire à la membrane, et valant $\vec{\Pi} = \vec{\Lambda} / \boldsymbol{d}$. Comme ce type de membrane coin permet en fait de modifier dans la direction $\boldsymbol{O}x_1$ la densité des plans cristallins des grains solides situés de part et d'autre de la membrane, elle peut être qualifiée de *joint d'accommodation*.

- la membrane mince de type vis avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe $\boldsymbol{O}x_1$ (figure 2.18c) est entièrement caractérisée par la *charge surfacique scalaire* Π *de rotation* $\Pi = \Lambda / \boldsymbol{d}$. Ce type de membrane vis correspond aussi à un *joint de désorientation* entre les grains solides situés de part et d'autre de la membrane. Dans ce cas particulier, comme la désorientation correspond à une rotation des grains l'un par rapport à l'autre, on parle de *joint de torsion*.

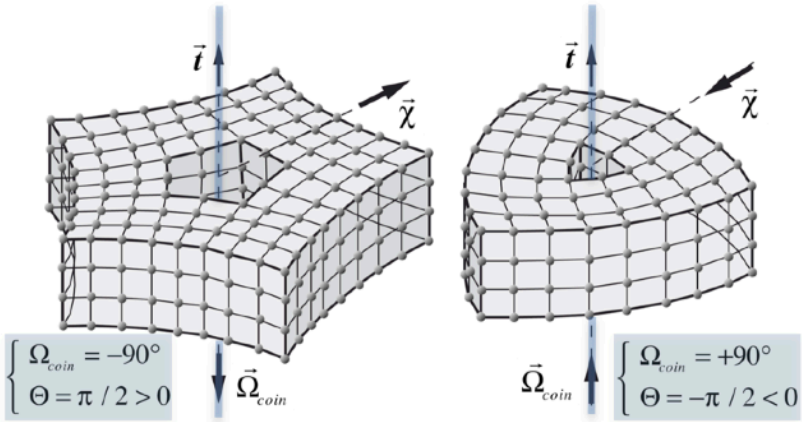


Figure 2.21 - *Exemples de désinclinaisons coins quantifiées* $\Omega = \mp 90°$ *sur un réseau cubique simple.*

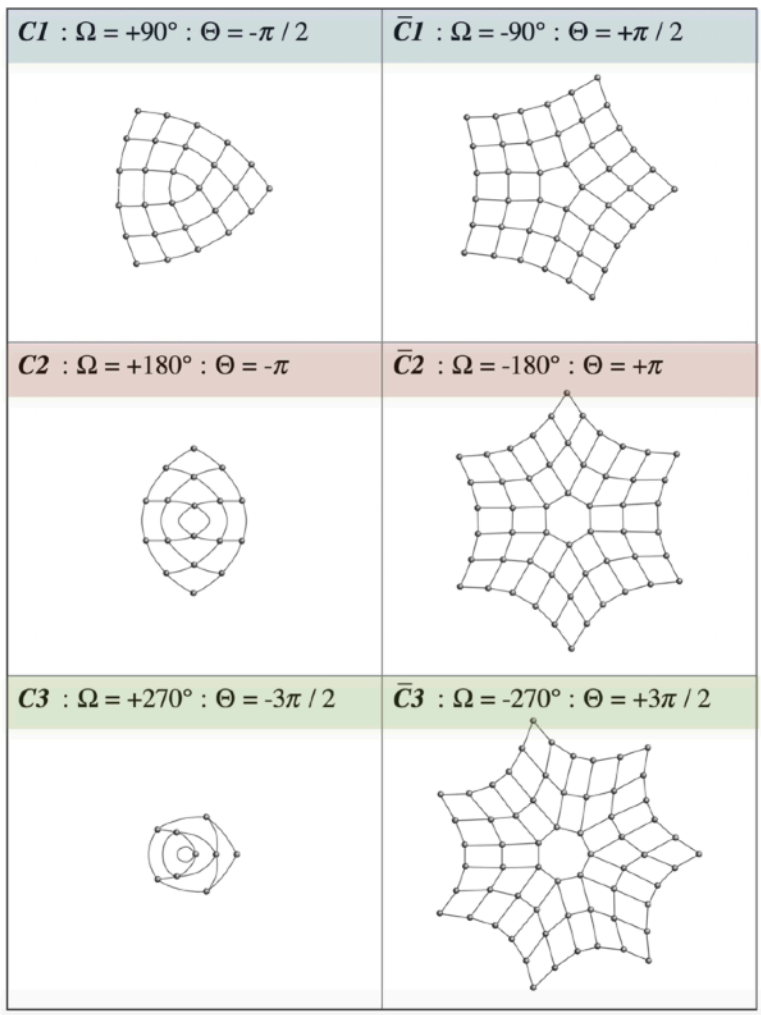


Figure 2.22 - *Famille de désinclinaisons coin quantifiées dans un arrangement plan quadratique*

Les désinclinaisons quantifiées dans un réseau

Comme les charges de désinclinaison dérivent toujours des charges de dislocation par la relation $\vec{\theta}_i = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{\lambda}_i - \vec{e}_i \wedge \vec{\lambda} - \vec{e}_i \lambda\right]$, *il ne peut pas exister de cordes de désinclinaison à l'état isolé.* Mais il peut apparaître des cordes de désinclinaisons *en présence d'un domaine de charges de dislocation étendu, comme une membrane de dislocation sous forme d'un ruban*.

On peut considérer par exemple le cas de rubans plans chargés de dislocation, qui s'interrompent brusquement le long de l'axe Ox_1, comme reportées dans la figure 2.16. Les frontières qui bordent ces rubans de dislocations sont alors des lignes de désinclinaison, car il apparaît sur ces frontières des singularités par désinclinaison du champ des rotations par déformations, comme décrites à la figure 1.19, possédant un vecteur de Frank $\vec{\Omega}$ non nul.

Dans cette figure, on constate les points suivants:

- le ruban de dislocation de type coin avec un vecteur de Burgers perpendiculaire à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 2.19a) correspond à un *joint de flexion localisé.* Il est bordé par *deux désinclinaisons de type coin* dont les vecteurs de Frank sont parallèles à l'axe Ox_2, et qui valent respectivement $\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2 = -\vec{\Pi} \wedge \vec{n} = -\left|\vec{\Pi}\right|\vec{t}$,
- le ruban de dislocation de type coin avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 2.19b) correspond à un *joint d'accommodation localisé.* Comme il n'y a pas alors de discontinuité du champ de rotation par déformations, il n'est bordé par aucune désinclinaison et $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}_2 \equiv 0$,
- le ruban de dislocation de type vis avec un vecteur de Burgers parallèle à la membrane et croissant selon l'axe Ox_1 (figure 2.19c) correspond à un *joint de torsion localisé.* Il est bordé par *deux désinclinaisons de type vis* dont les vecteurs de Frank sont parallèles à l'axe Ox_3, et qui valent respectivement $\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2 = -\Pi\vec{n}$.

On remarquera que la désinclinaison de la figure 2.19a correspond à la désinclinaison ma-

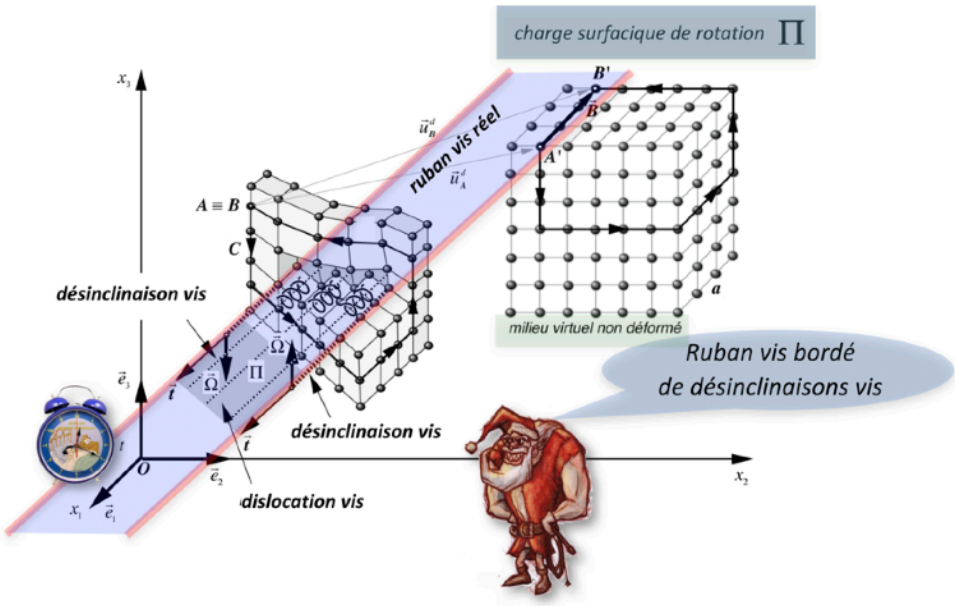


Figure 2.20 - *Ruban de dislocation bidimensionnel quantifié composé de trois dislocations de réseau de type vis*

croscopique représentée à la figure 2.8b, alors que la désinclinaison de la figure 2.19c correspond à la désinclinaison macroscopique de la figure 2.8a. La quantification sur un réseau cubique d'un ruban de désinclinaison similaire à celui de la figure 2.19c a est illustrée à la figure 2.20, dans laquelle on a reporté les deux désinclinaisons bordant un ruban de dislocation quantifié composé de trois dislocations vis de réseau alignées.

Bien qu'il ne puisse exister de désinclinaisons isolées, il est possible d'imaginer des milieux solides structurés qui contiendraient des désinclinaisons rectilignes quantifiées sur leur réseau dans le cas des désinclinaisons coins, comme le montre bien la figure 2.21. Dans cette figure, on a représenté deux désinclinaisons coins avec des vecteurs de Frank $\Omega = \mp 90°$ dans un réseau cubique simple, et on y a aussi reporté le vecteur de courbure $\vec{\chi}$ dû à la charge Θ.

On peut alors *imaginer qu'il puisse exister* différentes familles de désinclinaisons coin quantifiées en considérant des milieux solides avec différents arrangements des particules dans un plan sécant de la ligne de désinclinaison. Pour l'exemple, on va considérer ici des arrangements simples comme l'arrangement sur un réseau quadratique. Mais on pourrait évidemment considérer aussi des arrangements plus complexes, comme des structures tridimensionnelles cubiques centrées, hexagonales ou cubiques à faces centrées.

Dans le cas d'un arrangement quadratique, il peut exister au plus 3 différentes désinclinaisons coin quantifiées, qu'on appellera $C1$, $C2$ et $C3$, avec des angles de rotation Ω de +90°, +180° et +270°, auxquels correspondent 3 anti-désinclinaisons coin quantifiées, $\bar{C}1$, $\bar{C}2$ et $\bar{C}3$, avec des angles de rotation Ω de -90°, -180° et -270° (figure 2.22).

Dans le cas de la figures 2.22, on a reporté les désinclinaisons avec une taille calculée de sorte à ce que l'expansion volumique τ soit identique dans toutes les figures.

A noter aussi que la désinclinaison de +270° dans l'arrangement quadratique pourrait exister ou ne pas exister suivant le milieu imaginaire considéré, car leur existence est liée à la possibilité de connecter entre elles deux liaisons d'une même «particule» dans le milieu solide structuré qu'on considère.

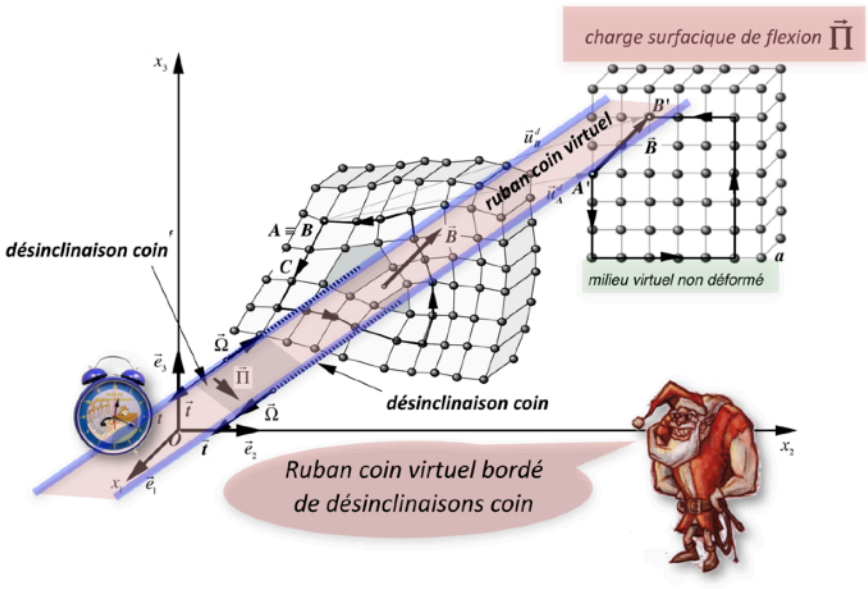


Figure 2.23 - *Doublet de désinclinaisons quantifiées de type coin avec ruban de dislocation virtuel*

Il a été montré qu'il ne peut exister de désinclinaisons isolées de vecteur de Frank non nul. Par conséquent, il est nécessaire de combiner plusieurs désinclinaisons à proximité les unes des autres de sorte à ce que le vecteur de Frank obtenu sur un contour entourant toutes ces désinclinaisons soit nul.

L'exemple reporté à la figure 2.23 illustre parfaitement ce fait: en couplant deux désinclinaisons coin quantifiées de type $C1$ et $\bar{C}1$ dans une structure cubique simple, le vecteur de Frank total devient nul, et il apparaît un ruban virtuel de dislocation de type coin entre les deux désinclinaisons, de vecteur de Burgers global $\vec{B}$ non nul. Le ruban de dislocation de type coin est similaire à celui représenté à la figure 2.19a et contient donc une *charge surfacique vectorielle* $\vec{\Pi}$ *de flexion*. Mais cette charge réelle $\vec{\Pi}$ de flexion n'est pas associée à des dislocations quantifiées réelles du réseau, mais à *un ruban virtuel de dislocation coin.* Dans le cas de ce doublet de désinclinaison coin, on imagine assez facilement que l'énergie de distorsion croît extrêmement vite si on éloigne les deux désinclinaison, de sorte que ces deux désinclinaisons peuvent être considérées comme liées par une *«force forte»*, c'est-à-dire une force attractive qui augmente lorsqu'on tente d'éloigner les deux désinclinaisons.

On peut retrouver les multiplets de désinclinaisons de vecteur de Frank nul qu'il est possible de construire sur la base des désinclinaisons coin quantifiées que nous avons décrites dans le cas du réseau quadratique simple. Les multiplets de base de vecteur de Frank nul, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent plus être ultérieurement décomposés en deux ou plusieurs multiplets de vecteur de Frank nul, sont reportés à la figure 2.24. On constate que, dans un réseau quadratique simple, il peut exister 3 doublets, 4 triplets et 2 quadruplets.

3 doublets
+90° / -90°
+180° / -180°
+270° / -270°

4 triplets	
+90° / +90° / -180°	*-90° / -90° / +180°*
+90° / +180° / -270°	-90° / -180° / +270°

2 quadruplets	
+90° / +90° / +90° / -270°	-90° / -90° / -90° / +270°

Figure 2.24 - *Les multiplets de désinclinaisons coin quantifiées dans une structure plane quadratique*

Dans le tableau 2.24, les multiplets composés avec des désinclinaisons $C3$ de +270° sont grisés, car ils pourraient ne pas exister, par exemple dans des milieux structurés n'autorisant pas de connecter entre elles deux liaisons d'une même «particule».

Réseaux solides à symétrie axiale

On appelle *cordes de dispiration*, ou *lignes de dispiration* ou tout simplement *dispirations*, des cordes mixtes résultant de la combinaison d'une corde ou d'une ligne de désinclinaison avec une corde ou une ligne de dislocation. A noter que le vocable de *«dispiration»* est un anglicisme importé tel quel de l'anglais car il n'existe aucune traduction française de ce terme.

On peut imaginer des réseaux qui présentent une certaine symétrie axiale des particules le composant, comme les réseaux cubiques ***(a)*** et ***(b)*** illustrés dans la figure 2.25. Cette symétrie axiale des particules peut présenter simplement une direction privilégiée des particules dans les plans de la structure, comme dans le cas ***(a)***, qui présente une structure alternée de couches successives ***a***, ***b***, ***a***, ***b***, ***a***, ***b***,… La symétrie axiale peut aussi présenter une direction et un sens préférentiels comme dans le cas ***(b)*** qui présente une structure alternée de couches successives ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ...

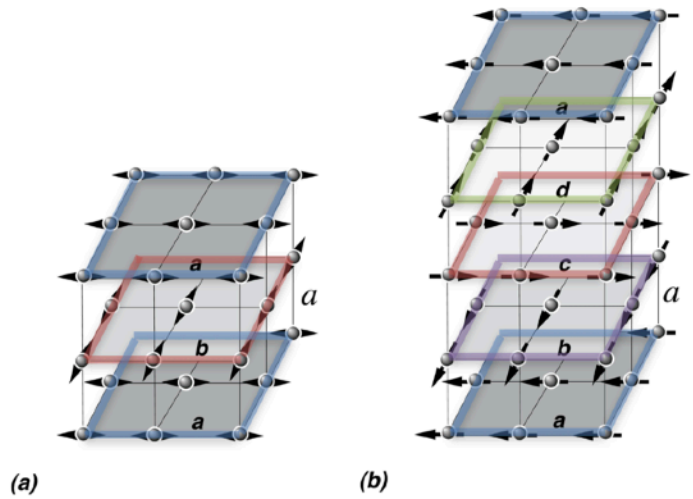


Figure 2.25 - *Réseaux cubique présentant une symétrie axiale, simple dans le cas* ***(a)****, et orientée de type dextrogyre (right-handed) en* ***(b)***

De plus, dans le cas ***(b)***, le sens de rotation des axes des particules le long de l'axe vertical produit un milieu orienté, qu'on qualifie de *dextrogyre (right-handed)* dans le cas ***(b)***, illustré à la figure et de *lévogyre (left-handed)* dans le cas où les plans tournent dans le sens opposé.

S'il est interdit de rompre l'orientation axiale des particules dans un plan, il n'est pas possible d'introduire une dislocation vis orientée verticalement avec un vecteur de Burgers quelconque. En effet, si la distance entre les plans horizontaux vaut a, afin d'assurer la continuité de l'orientation des particules, et aussi de leur sens dans le cas ***(b)***, il faut que la longueur du vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ de la dislocation vis soit égale à $\pm 2a$ dans le cas ***(a)***, et $\pm 4a$ dans le cas ***(b)***,

Dans les milieux à symétrie axiale tels ceux reportés à la figure 2.25, on vient d'expliquer que les dislocations vis doivent présenter des vecteurs de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}$ dont les longueurs sont des multiples de la longueur a du pas de réseau. En ce cas, les dislocations vis peuvent avoir intérêt à se scinder en partielles avec des vecteurs de Burgers de longueur a, en formant respectivement 2 ou 4 partielles dans les cas ***(a)*** et ***(b)*** respectivement. Entre les dislocations par-

tielles se forment alors des *rubans de fautes de raccordement* entre plans axiaux ***ab***, ***bc***, ***cd***, etc. La distance de séparation des partielles dépend alors de l'énergie γ par unité de surface de la faute de raccordement.

Si le ruban de faute de raccordement possède une énergie γ par unité de surface, l'énergie totale $E_t(d)$ par unité de longueur d'une dislocation vis dissociée sur des distances d s'écrit:
- $E_t(d)=\gamma d+E_d(d)$ dans le cas ***(a),*** où $E_d(d)$ est l'énergie des deux partielles en fonction de la distance d les séparant, qui est une fonction monotone décroissante diminuant de E_0 pour $d=0$ à $E_0/3$ pour $d\to\infty$,
- $E_t(d)=3\gamma d+E_d(d)$ dans le cas ***(b),*** où $E_d(d)$ est l'énergie des quatre partielles en fonction de la distance d les séparant, qui est une fonction monotone décroissante diminuant de E_0 pour $d=0$ à $E_0/3$ pour $d\to\infty$,

L'énergie $E_t(d)$ présente donc un minimum similaire à celui reporté à la figure 2.16 pour la distance $d=d_0$, qui est la distance d'équilibre entre les deux ou les quatre partielles, contrôlée par la compétition entre la diminution d'énergie associée à l'augmentation de distance entre les partielles et l'augmentation d'énergie due à la formation d'un ruban énergétique de faute de raccordement entre les partielles. Ce comportement de l'énergie $E_t(d)$ induit une force d'interaction entre les partielles qu'on peut tout-à-fait qualifier de *force forte*, au sens que l'énergie du triplet de partielles va augmenter si on essaie d'augmenter la distance de séparation au-delà de d_0. Cette force forte présente donc dans son comportement une analogie intéressante avec la force forte agissant entre des quarks dans le Modèle Standard des particules élémentaires.

On imagine alors immédiatement qu'il doit aussi exister des conditions de raccordement assurant la continuité de la symétrie axiale si on veut introduire une désinclinaison dans un tel réseau. En fait, pour s'assurer de cette continuité, il faudra obligatoirement associé à la désinclinaison une dislocation vis avec le bon vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$. Il apparaît donc ici une nécessité structurelle d'introduire des dispirations dans de tels milieux.

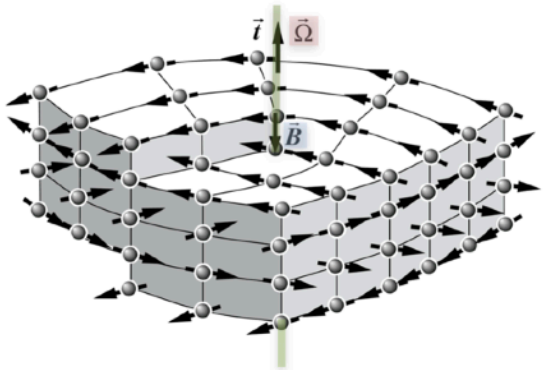


Figure 2.26 - *Dispiration de +90° introduite dans le milieu axial de la figure 2.25* ***(b)*** *montrant bien la nécessité d'ajouter un vecteur de translation* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *pour assurer la continuité axiale*

La figure 2.26 illustre parfaitement ce propos. En effet, pour introduire une désinclinaison Ω =+90° dans le milieu représenté à la figure 2.25*(b)*, il est nécessaire de lui ajouter une disloca-

tion vis correctement orientée, de vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ et de longueur a, qui assure la continuité de l'orientation axiale des particules sur les plans du milieu.

A noter qu'une dislocation vis de vecteur de Burgers de sens opposé et de longueur $3a$ aurait aussi pu assurer la continuité de l'orientation axiale des particules sur les plans du milieu, de sorte qu'il existe deux dispirations différentes de rotation Ω =+90° , toutes deux avec une charge linéique de courbure de $\Theta = -\pi / 2$, mais se différenciant par leur vecteur de Burgers $\vec{\boldsymbol{B}}$ associé à une charge linéique de rotation Λ valant $\Lambda = a$ ou $\Lambda = -3a$.

Il n'est pas trop difficile de rechercher quelles charges linéiques de torsion Λ doivent être associées aux différentes dispirations coin de charge linéique de courbure Θ qu'on peut introduire dans les structures cubiques représentées à la figure 2.25.

	Θ	$\Lambda_{(a)}$	$\Lambda_{(b)}^{(dextrogyre)}$	$\Lambda_{(b)}^{(lévogyre)}$
vis	0	$\pm 2a$	$\pm 4a$	$\pm 4a$
C1	$-\pi / 2$	$\pm a$	$+a\ , -3a$	$-a\ , +3a$
$\bar{C}1$	$+\pi / 2$	$\pm a$	$-a\ , +3a$	$+a\ , -3a$
C2	$-\pi$	$0\ , \pm 2a$	$+2a\ , -2a$	$+2a\ , -2a$
$\bar{C}2$	$+\pi$	$0\ , \pm 2a$	$+2a\ , -2a$	$+2a\ , -2a$
C3	$-3\pi / 2$	$\pm a$	$-a\ , +3a$	$+a\ , -3a$
$\bar{C}3$	$+3\pi / 2$	$\pm a$	$+a\ , -3a$	$-a\ , +3a$

Tableau 2.27 - *Charges linéiques de courbure Θ et de rotation Λ des dispirations dans les structures cubiques de la figure 2.25* ***(a)*** *et* ***(b)***

Dans le tableau 2.27, on a reporté ces charges pour les structures cubiques de la figure 2.25 ***(a)*** et ***(b)***. Dans le cas ***(a)***, la structure ne présente pas de différence entre une *orientation dextrogyre* et une *orientation lévogyre* des particules du réseau. Par contre, il apparaît une différence entre ces deux orientations dans le cas ***(b)***, ce qui implique un changement de signe de la charge Λ entre les milieux dextrogyre et lévogyre.

Les boucles quantifiées de dislocation et de désinclinaison dans un réseau

Pour satisfaire l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i = 0$, une corde de dislocation ou de désinclinaison ne peut pas s'interrompre brusquement au sein du milieu. Par contre, une telle corde se refermant sur elle-même pour former une boucle localisée satisfait toujours l'équation de conservation. Dans cette section, on va donc présenter ce type de boucles ainsi que leurs propriétés dans un réseau solide.

Pour une boucle de dislocation circulaire de rayon R, la charge linéique tensorielle $\vec{\Lambda}_i$ de la dislocation peut être reliée à son vecteur de Burgers en utilisant la relation $\vec{\Lambda}_i = -\vec{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{B}_i$ où $\vec{\boldsymbol{t}}$

représente le vecteur unité tangent à la ligne de dislocation.

Il apparaît alors trois types de boucles de dislocations suivant l'orientation du vecteur de Burgers par rapport à la normale $\vec{n}$ à la surface de la boucle, comme le montre la figure 2.28:
- les *boucles de glissement* (figure 2.28a) lorsque $\vec{B} \perp \vec{n}$, présentant à la fois des portions coin (où $\vec{B} \parallel \vec{m}$), des portions vis (où $\vec{B} \parallel \vec{t}$) et des portions mixtes. Leur vecteur de Burgers peut prendre n'importe quelle orientation dans le plan perpendiculaire à $\vec{n}$. Elles sont obtenues par le processus décrit à la figure 2.4b,
- les *boucles prismatiques* (figure 2.28) lorsque $\vec{B} \parallel \vec{n}$, qui ont leur vecteur de Burgers dans la direction imposée du vecteur unité $\vec{n}$ perpendiculaire au plan de la boucle, et qui sont obtenues par le processus décrit à la figure 2.4c et d.
- les *boucles mixtes* lorsque $\vec{B}$ présente une composante dans la direction de $\vec{n}$ et une composante dans le plan de la boucle.

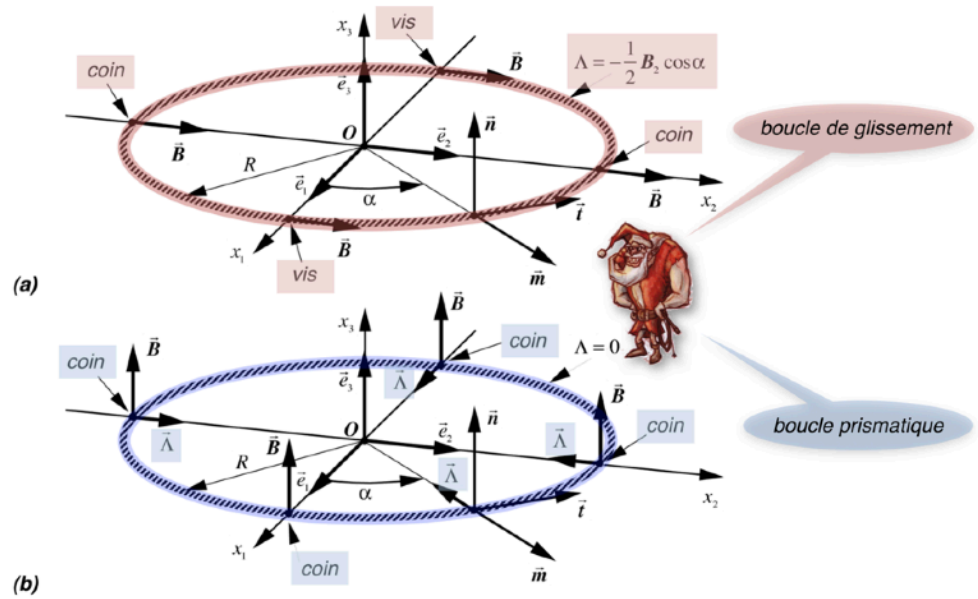


Figure 2.28 - *Boucle de dislocation de glissement* ***(a)*** *et boucle de dislocation prismatique* ***(b)***

On verra par la suite qu'il est utile d'introduire les notions de *charges scalaires globales de rotation* q_λ et de *charges scalaires globales de courbure* q_θ, qui seront en fait très importantes pour caractériser les effets topologiques à grande distance des singularités topologiques. Ces charges scalaires globales sont parfaitement analogues à la charge électrique d'un électron par exemple.

On peut définir une *charge scalaire globale* q_λ *de rotation* d'une boucle de dislocation comme l'intégrale (la somme) de sa *densité linéïque scalaire* Λ *de charge de torsion* prise sur le contour de la boucle:
- dans le cas de la boucle prismatique (figure 2.28b), la *charge scalaire globale* q_λ est nulle car la densité linéïque Λ de charge de torsion est nulle partout sur le contour de la boucle.
- dans le cas de la boucle de glissement (figure 2.28a), la densité linéïque Λ de charge de torsion évolue le long de la boucle en fonction du cosinus de l'angle de α, en devenant positive,

nulle, négative et nulle sur un tour complet, de sorte que la *charge scalaire globale* q_λ *de rotation* est aussi nulle ($q_\lambda = 0$) pour ce type de boucle. En revanche, comme la densité linéïque Λ de charge de torsion est positive pour $\alpha = 0$ *et négative pour* $\alpha = 180°$ dans le cas de la boucle de dislocation de glissement représentée à la figure 2.28a, on déduit que les boucles de dislocations de glissement présentent *un moment dipolaire de charges de rotation*.

On peut aussi définir une *charge scalaire globale* q_θ *de courbure* d'une boucle de dislocation comme l'intégrale (la somme) de sa d*ensité linéïque scalaire* Θ *de charge de courbure* prise sur le contour de la boucle:

- dans le cas de la boucle de glissement (figure 2.28a), comme la densité linéïque Θ de charge de courbure est nulle tout le long de la boucle, sa charge scalaire globale q_θ de courbure est nulle.
- dans le cas de la boucle prismatique (figure 2.28b), la densité linéïque Θ de charge de courbure n'est pas nulle et vaut $\Theta = -\vec{n}\vec{B} / R$, de sorte que *la charge scalaire globale* q_θ *de courbure de la boucle prismatique* vaut $q_\theta = -2\pi\vec{n}\left(\vec{t} \wedge \vec{\Lambda}\right) = 2\pi\vec{\Lambda}\vec{m}$.

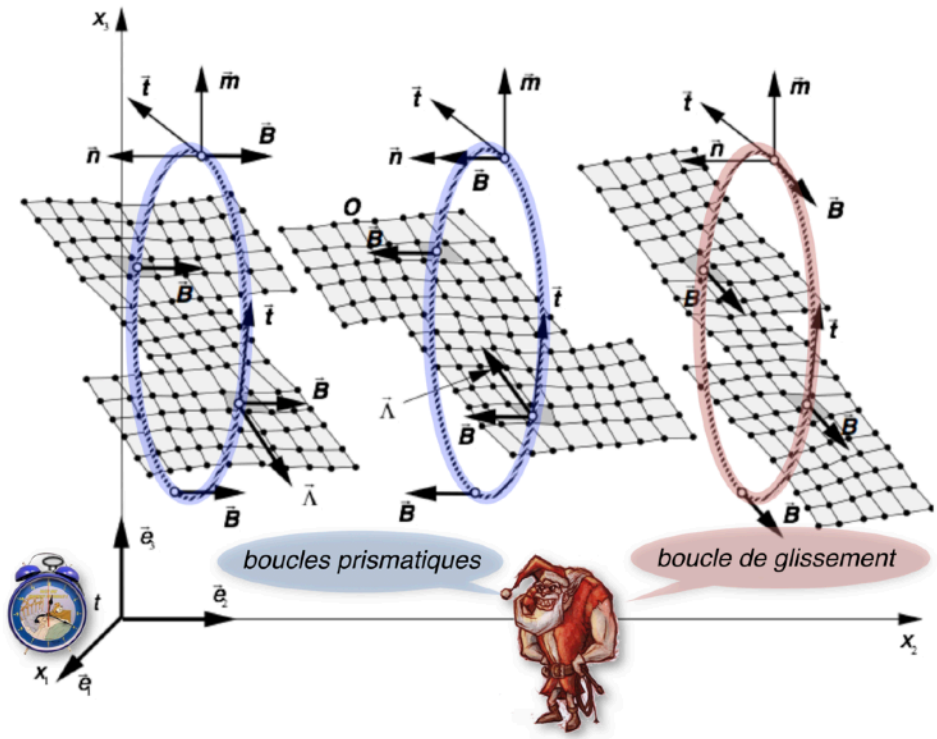


Figure 2.29 - *Quantification des boucles de dislocations sur un réseau*

A l'échelle microscopique d'un réseau solide, le vecteur de Burgers de boucles de dislocations se quantifient, comme le montre schématiquement la figure 2.29 pour des boucles prismatiques et une boucle de glissement au sein d'un réseau cubique. Dans cette figure, on observe aussi clairement les faits suivants:

- les boucles de dislocations prismatiques sont obtenues par l'ajout ou la suppression d'un plan de particules au sein de la boucle (translation perpendiculaire au plan de la boucle), de sorte que le réseau présente de l'*«extra-matière»* sur le plan de la boucle; à noter que la charge sca-

laire globale $\boldsymbol{q}_\theta$ de courbure divergente de la boucle prismatique est directement liée à l'existence de cette *«extra-matière»*,

- les boucles de dislocations de glissement sont obtenues par glissement (translation parallèle au plan de la boucle) dans la direction du vecteur de Burgers, de sorte que le réseau ne présente pas d'*«extra-matière»* en ce cas. Par contre, la présence d'une composante vis dans les régions où $\vec{\boldsymbol{B}} \,||\, \vec{\boldsymbol{t}}$ induit *un champ dipolaire de rotation au voisinage de la boucle de glissement.*

A la figure 2.9, on a montré la réalisation macroscopique d'une boucle de désinclinaison vis. Mais quelles en sont les caractéristiques principales? Pour cela, on considère une boucle constituée d'une désinclinaison vis générée par une rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis}$ du plan supérieur d'un angle α par rapport au plan inférieur, comme représenté à la figure 2.30 Le fait qu'on recolle deux plans qui ont été déplacés l'un par rapport à l'autre au sein de la boucle doit faire apparaître sur le plan de la boucle une charge surfacique Π de dislocation. Sur le contour de cette charge surfacique, il apparaît une boucle de désinclinaison vis dont le vecteur de Frank est directement lié à la charge surfacique Π de dislocation car $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{vis} = -\vec{\boldsymbol{n}}\Pi$, qui est elle-même liée à l'angle de rotation $\alpha = \boldsymbol{\Omega}_{vis} = -\Pi$ imposé aux deux mâchoires.

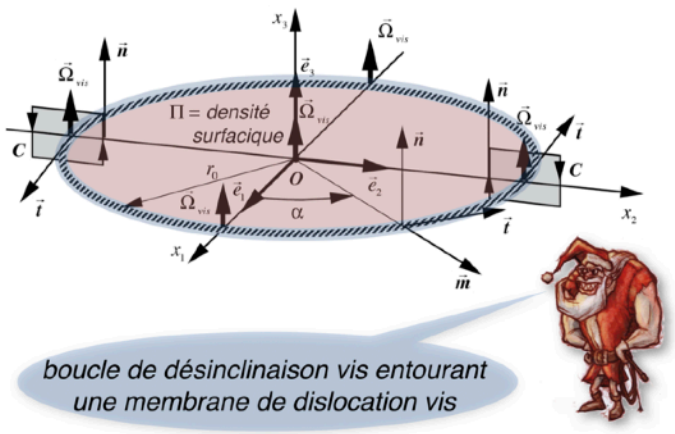


Figure 2.30 - *boucle de désinclinaison vis avec sa membrane chargée*

La charge surfacique Π de rotation peut être intégrée (sommée) sur la surface de la boucle, et il apparaît alors une *charge globale* $\boldsymbol{q}_\lambda$ *de rotation* d'une telle boucle, qui vaut $\boldsymbol{q}_\lambda = \pi R^2 \Pi$. Cette charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ est en fait la charge de rotation de la boucle de désinclinaison vis telle qu'elle est vue à grande distance de la boucle. Cela signifie qu'une telle boucle peut se comporter comme la source d'un champ $\vec{\omega}$ de rotation divergent au sein du milieu solide.

A noter qu'il est possible de voir une boucle de désinclinaison de manière quelque peu différente. En effet, le fait d'effectuer la rotation des deux plans l'un par rapport à l'autre induit un déplacement le long de la corde *similaire à celui d'une dislocation vis*. Le vecteur de Burgers et la charge linéique de cette *pseudo-dislocation vis* vaudrait alors $\Lambda_{vis} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{vis}\vec{\boldsymbol{t}} / 2 = R\Pi / 2$, de sorte que la charge globale de cette pseudo-boucle vis s'écrirait $\boldsymbol{q}_\lambda == 2\pi R \Lambda_{vis} = \pi R^2 \Pi$. On obtient donc bien la même valeur de la charge globale $\boldsymbol{q}_\lambda$ que celle obtenue en considérant la charge surfacique Π, ce qui permet de considérer indifféremment cette singularité comme une boucle de désinclinaison vis ou comme une pseudo-boucle de dislocation vis.

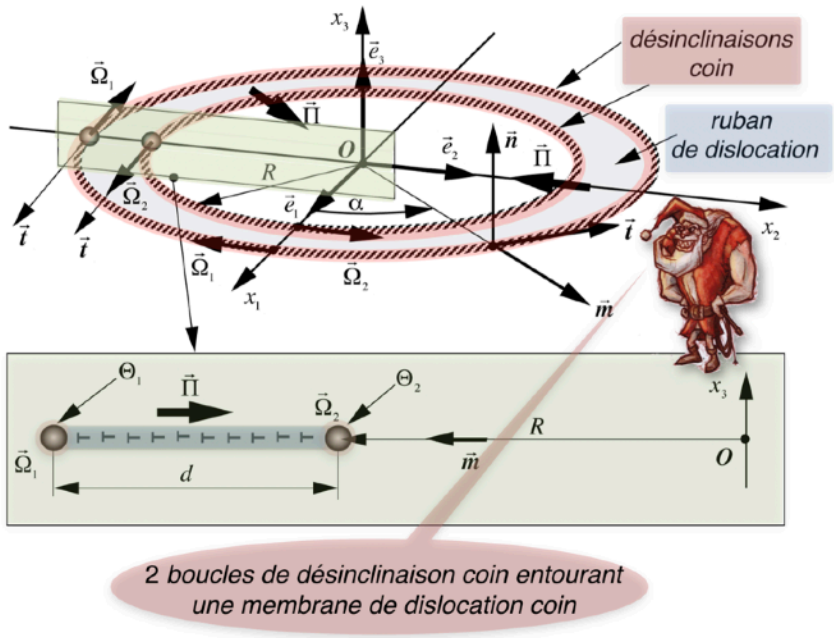


Figure 2.31 - *boucle de doublet de désinclinaisons coin liées par un ruban de dislocation*

A la figure 2.9, on a montré la réalisation macroscopique d'une boucle de désinclinaison coin. Mais quelles en sont les caractéristiques principales? Pour cela, on considère une boucle constituée d'un doublet de désinclinaisons coin liées par un ruban de dislocation virtuel, comme représenté à la figure 2.31, notamment sur l'illustration d'une coupe selon un plan perpendicu-

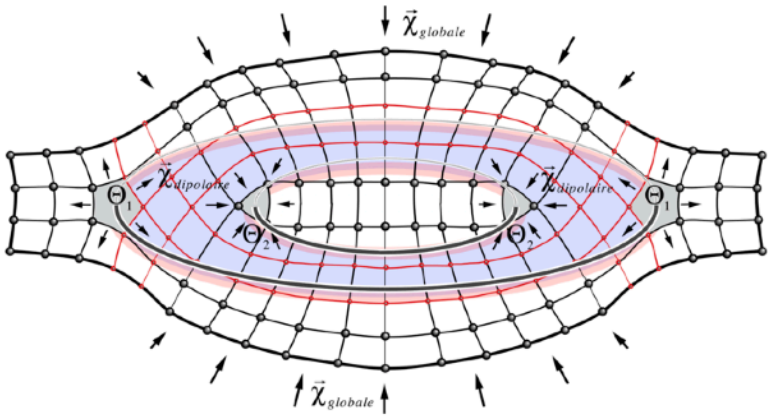


Figure 2.32 - *champ dipolaire local de flexion dû aux charges Θ_1 et Θ_2 et champ de flexion divergent dû à la charge q_θ d'une boucle de doublet de désinclinaison coin*

laire au plan des boucles. Les densités linéiques de charge scalaire de courbure Θ_1 et Θ_2 des deux désinclinaisons sont données par $\Theta_1 = -\vec{\Omega}_1\vec{t} = -\vec{\Pi}\vec{m}$ et $\Theta_2 = -\vec{\Omega}_2\vec{t} = -\vec{\Pi}\vec{m} = -\Theta_1$.

On déduit que l'existence de ces deux densités Θ_1 et Θ_2 de part et d'autre du ruban de dislocation génère un champ dipolaire $\vec{\chi}_{dipolaire}$ de flexion, localisé essentiellement au voisinage

des deux désinclinaisons. Ce champ dipolaire est illustré à la figure 2.32 dans le cas d'un doublet de désinclinaisons quantifiées de $\pm 90°$ dans une structure cubique. On y voit bien les courbures de flexion positives et négatives entourant les deux désinclinaisons.

Il est intéressant alors de voir que le ruban de dislocation de charge surfacique de flexion $\vec{\Pi}$ peut se ramener, par intégration sur la distance d séparant les deux désinclinaisons, à une charge linéique $\vec{\Lambda}$ de dislocation coin virtuelle répartie sur une boucle de rayon $R + d/2$. Ainsi, cette boucle de doublet de désinclinaisons peut être considérée comme similaire à une boucle de dislocation coin de charge linéique $\vec{\Lambda}$ telle que $\vec{\Lambda} = \vec{\Pi} d = -d\,\Theta_1 \vec{\boldsymbol{m}}$.

Une telle boucle de doublets de désinclinaisons possède alors une *charge scalaire globale* $\boldsymbol{q}_\theta$ *de courbure* liée au ruban de dislocation coin virtuelle qu'elle contient, et sa valeur s'écrit $\boldsymbol{q}_\theta = 2\pi \vec{\Lambda} \vec{\boldsymbol{m}} = 2\pi \boldsymbol{B}_3 = 2\pi d \vec{\Pi} \vec{\boldsymbol{m}} = -2\pi d \Theta_1$. On peut encore imaginer que le diamètre de la boucle interne de désinclinaison tende vers zéro et qu'il ne reste que la boucle de désinclinaison externe, de charge linéique Θ_1 et de rayon d. En ce cas, la charge globale de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ reste inchangée et est toujours donnée par la même relation. Cette charge globale de courbure $\boldsymbol{q}_\theta$ est celle qui est due au ruban de dislocation dans son entier, et celle qui est vue à distance suffisamment grande de la boucle pour qu'il ne soit plus possible de distinguer cette boucle d'une simple boucle de dislocation coin. La charge $\boldsymbol{q}_\theta$ est alors responsable de la flexion globale $\vec{\chi}_{globale}$ du réseau à grande distance, comme l'illustre bien la figure 2.32 dans le cas d'un doublet de désinclinaisons quantifiées de $\pm 90°$ dans une structure cubique.

Amas de dislocations, de désinclinaisons et de dispirations

Étant donné que les *cordes de dislocation, de désinclinaison* et *de dispiration* contenant des densités de charges tensorielles non nulles peuvent être refermées sur elles-mêmes sous forme de boucles, il est tout-à-fait possible d'imaginer l'existence de petits amas très localisés de telles boucles au sein d'un milieu solide. De tels amas sont en principe entièrement caractérisés par leur densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, qui prennent une valeur non nulle au sein des cordes, dans le domaine de l'amas.

Comme l'amas est composé exclusivement de boucles se refermant sur elles-même, il n'existe pas de vecteurs $\vec{\boldsymbol{B}}$ et/ou $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ non nuls sur tout contour entourant l'amas sans le traverser, ce qui implique qu'il n'existe pas de discontinuités du champ de déplacement virtuel $\vec{u}^{(\delta)}$ ni de discontinuités du champ de rotation locale $\vec{\omega}^{(\delta)}$ dans la partie du solide entourant l'amas, et que, par conséquent, *le solide reste parfait en-dehors de l'amas*.

Cependant, la présence de l'amas au sein du solide doit assurément impliquer un champ de distorsion élastique et anélastique du *solide parfait entourant l'amas* et jusqu'à une certaine distance de celui-ci, tout comme la présence d'une densité de charges électriques ρ localisée implique un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ à distance de ces charges en électromagnétisme.

Pour trouver ce champ, il faut faire intervenir ici le fait qu'il n'existe, hormis l'équation de conservation de la charge tensorielle $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$, aucune restriction sur les densités scalaires λ et θ de charges de rotation et de flexion. Par conséquent, il est tout-à-fait possible que, suivant la nature des charges composant l'amas, celui-ci puisse posséder des *charges scalaires globales de rotation* $\boldsymbol{Q}_\lambda$ *et de courbure* $\boldsymbol{Q}_\theta$ non nulles, définies par les sommes sur toutes les boucles fermées des charges globales $\boldsymbol{q}_{\lambda(i)}$ et $\boldsymbol{q}_{\theta(i)}$ telles que nous les avons définies précé-

demment pour chaque boucle individuelle dans la section précédente. On peut imaginer par exemple que la charge de courbure d'un amas puisse être due à des boucles de dislocation prismatiques, de nature lacunaire ou interstitielle (figure 2.29) et/ou des boucles de désinclinaison coin (figure 2.31), et que la charge de rotation puisse être due à des boucles de désinclinaison vis (figure 2.30).

Ces considérations permettent alors de retrouver les champs de distorsions élastiques et anélastiques qu'implique *à grande distance* la présence d'un amas localisé de charges.

La présence d'une charge scalaire globale $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de rotation non nulle dans un amas localisé de charges se comporte comme *la source d'un champ de rotation* $\vec{\omega}$ *divergent* au sein du solide parfait avoisinant l'amas de charges (fig. 2.33). Le champ de rotation présente alors une *singularité topologique* à l'endroit où se situe l'amas de charge $\boldsymbol{Q}_\lambda$, et sa norme $|\vec{\omega}|$ présente une décroissance en $1/R^2$ à grande distance de l'amas.

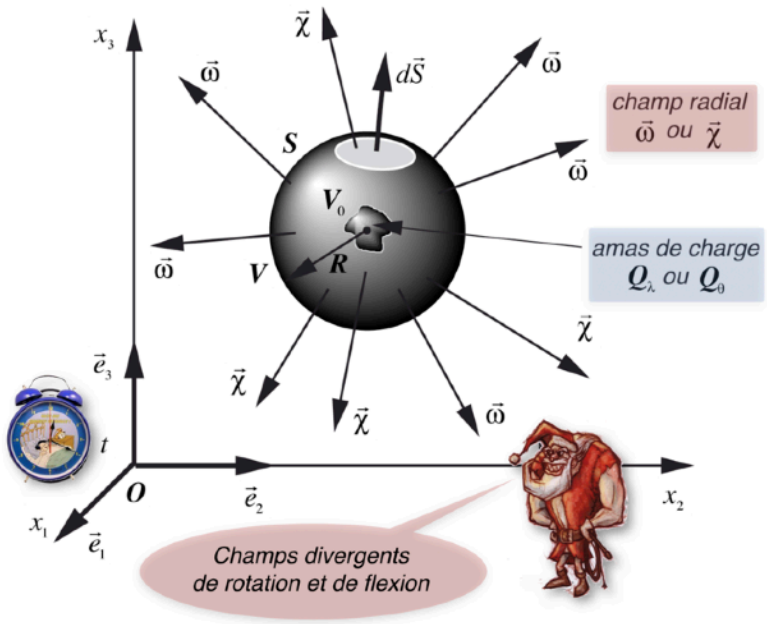


Figure 2.33 - *Champs divergents de rotation et de flexion au voisinage d'un amas de charges*

Tout se passe en fait exactement comme en électromagnétisme, où une densité ρ localisée de charges électriques, conduisant à une charge électrique macroscopique localisée $\boldsymbol{Q}$, se comporte comme une singularité responsable d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ divergent dans l'espace environnant.

Une charge scalaire macroscopique de courbure $\boldsymbol{Q}_\theta$ non nulle se comporte, quant à elle, comme *la source d'un champ de flexion* $\vec{\chi}$ *divergent* au sein du solide parfait avoisinant l'amas de charges (figure 2.33). Le champ de flexion présente alors une *singularité topologique* à l'endroit où se situe l'amas de charge $\boldsymbol{Q}_\theta$, et sa norme $|\vec{\chi}|$ présente aussi une décroissance en $1/R^2$ à grande distance de l'amas. Autrement dit, au voisinage d'une charge globale $\boldsymbol{Q}_\theta$ localisée de courbure, le solide présente des courbures par flexions de symétrie sphérique autour de la singularité.

Soit un *solide hypothétique* dans lequel les charges sont confinées dans des amas localisés, comme illustré par exemple à la figure 2.34, et donc dans lequel *il n'existe pas de cordes de dislocations et de désinclinaisons se propageant sur de grandes distances* par rapport à l'échelle à laquelle le solide est étudié. Il est clair que, suivant la complexité de la structure interne de ces amas, autrement dit la complexité de l'intrication des boucles composant ces amas, la description des champs de distorsion et de contorsion au sein même des amas peut être très complexe. Mais si ces amas ont des structures internes stables et qu'ils peuvent se mouvoir individuellement au sein du solide, mais sans interagir suffisamment entre eux pour modifier leur structure interne, il est possible de simplifier grandement la description des champs de distorsion régnant dans ce solide.

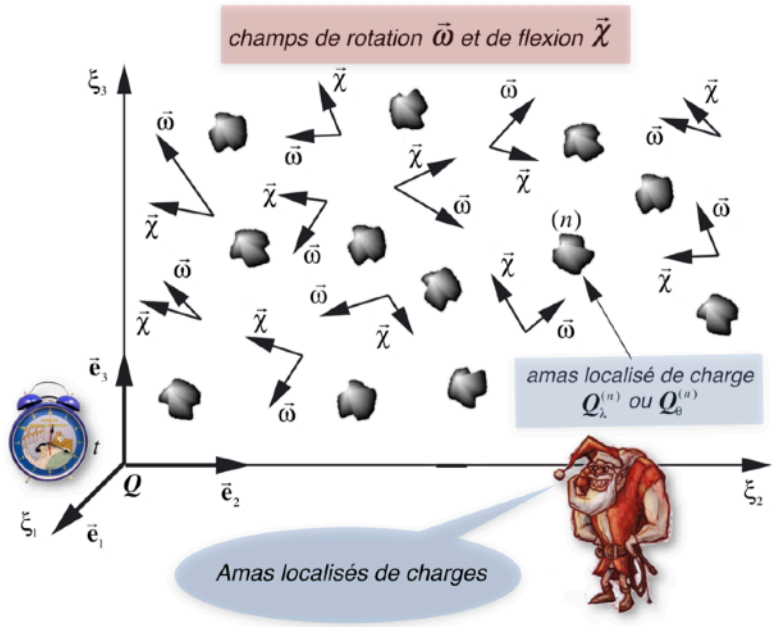


Figure 2.34 - *Description d'un solide contenant des amas localisés de charges*

Dans ce cas en effet, et dans la mesure où l'on est essentiellement intéressé à décrire les champs de distorsion et de contorsion élastiques et anélastiques dans les domaines du solide parfait, c'est-à-dire à une certaine distance à l'extérieur des amas de charges, le problème peut être résolu beaucoup plus simplement en ne considérant que les densités scalaires de charge λ et θ à l'intérieur des amas, qui peuvent se traduire à grande distance par l'existence de deux charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ pour chaque amas numéro (n).

En fait, la connaissance de la distribution des densité de charge λ et θ à l'intérieur d'un amas permet de trouver des conditions purement topologiques, et par conséquent indépendantes des propriétés élastiques du solide considéré, qui sont imposées aux champs de rotation $\vec{\omega}$ et de flexion $\vec{\chi}$ régnant dans le solide parfait à l'extérieur de l'amas. Ces conditions sont simplement exprimées par les équations scalaires de géométrocompatibilité $\lambda = \mathrm{div}\,\vec{\omega}$ et $\theta = \mathrm{div}\,\vec{\chi}$. Suivant l'inhomogénéité de la distribution interne des densités de charge λ et θ dans l'amas, il peut alors apparaître *à courte et moyenne distance* de chaque amas des *champs* $\vec{\omega}$ *et* $\vec{\chi}$ *dipolaires ou multipolaires*.

Par contre, *à grande distance* des amas de charges, c'est essentiellement la présence de charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ différentes de zéro qui sera responsable de l'apparition de *champs radiaux monopolaires de rotation* $\vec{\omega}$ *et de flexion* $\vec{\chi}$, comme on l'a déjà illustré à la figure 2.33.

Ainsi, dans ce cas particulier de charges localisées dans des amas, ce sont *les deux champs vectoriels invariants*, à savoir les champs de rotation $\vec{\omega}$ et de flexion $\vec{\chi}$, qui sont affectés à une certaine distance des amas de charges. Et il est tout-à-fait remarquable que chacun de ces amas peut être individuellement et complètement caractérisé, quant à ses effets à grande distance sur les champs de distorsion et de contorsion, par ses deux seules charges scalaires macroscopiques $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ et $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$, quand bien même ces amas peuvent avoir des structures de coeur très complexes, de nature tensorielle, donc très fortement dépendante de leur orientation spatiale dans le référentiel local.

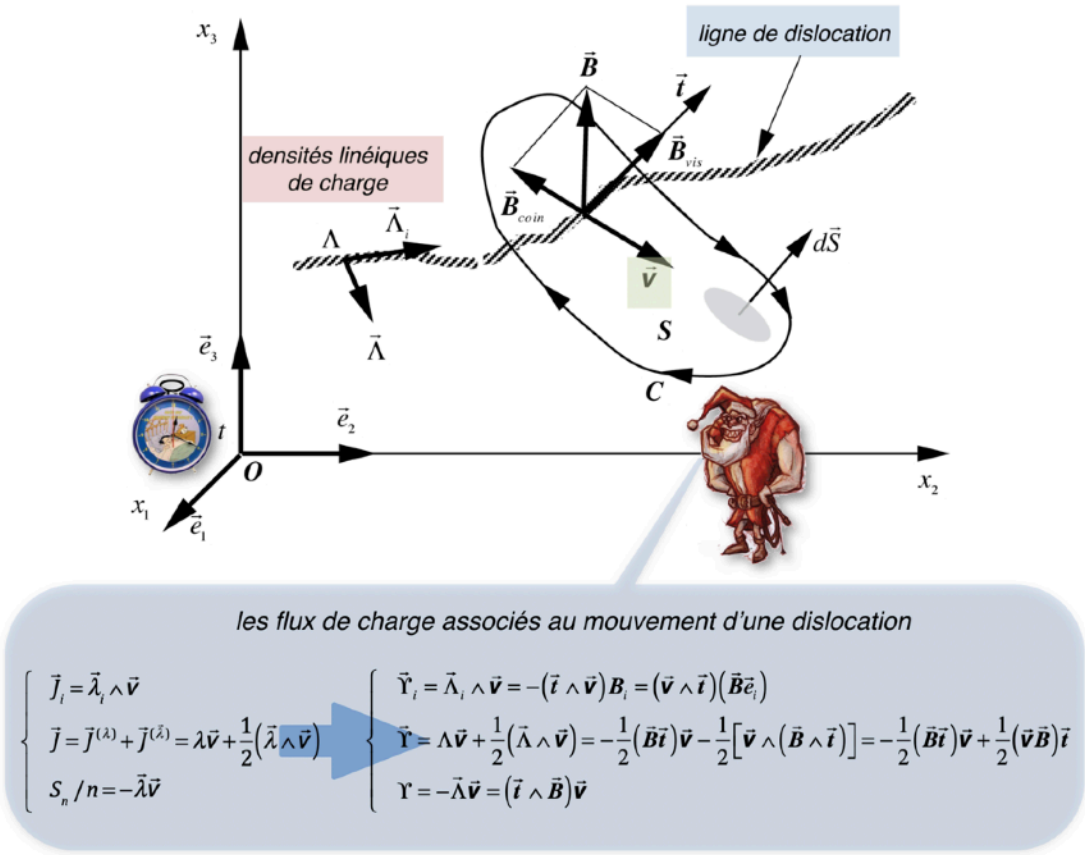
Dans l'analogie développée précédemment avec l'électromagnétisme, le champ de rotation $\vec{\omega}$ est l'analogue du déplacement électrique $\vec{D}$, et la charge macroscopique de rotation $\boldsymbol{Q}_{\lambda(n)}$ est l'analogue de la charge électrique macroscopique $\boldsymbol{Q}$ d'un corpuscule en électromagnétisme. Mais existe-t-il aussi une analogie similaire pour le champ de flexion $\vec{\chi}$ et la charge globale de courbure $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$? Une réponse partiellement positive peut être donnée ici. En effet, la présence d'un amas de charge de flexion $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)}$ macroscopique est responsable d'un champ vectoriel de flexion $\vec{\chi}$ non nul et divergent dans son voisinage, donc d'une *courbure spatiale du réseau solide* entourant cet amas, ce qui se traduit par l'apparition de champs non nuls de cisaillement et d'expansion volumique. Ainsi, la présence d'un amas de charges tel que $\boldsymbol{Q}_{\theta(n)} \neq 0$ implique, vis-à-vis du réseau solide, un résultat présentant une certaine analogie avec celui que stipule la théorie de la gravitation générale d'Einstein vis-à-vis de l'espace-temps en présence de matière, à savoir qu'un amas de matière situé en un endroit de l'espace est directement responsable d'une *courbure de l'espace-temps* l'avoisinant. On reviendra plus tard en détail sur cette analogie.

Flux de charges de dislocation

L'interprétation macroscopique des tenseurs de densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation ainsi que l'équation de conservation $\mathrm{div}\,\vec{\lambda}_i \equiv 0$ à laquelle satisfont ces tenseurs ont fait apparaître les notions de cordes et de boucles de dislocation, de désinclinaison et de dispiration. Il a aussi été montré qu'à grande distance d'amas de charges plastiques, ce sont essentiellement les deux champs vectoriels invariants, à savoir les champs de rotation $\vec{\omega}$ et de courbure $\vec{\chi}$, qui sont affectés par les composantes scalaires λ et θ des charges. Il reste maintenant à faire le lien entre ces grandeurs et les flux de charges $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ introduits dans les équations géométrocinétiques de la figure 2.5.

Considérons donc un tube rempli d'une densité $\vec{\lambda}_i$ de charges de dislocation, qui se déplace à *la vitesse relative* $\vec{\boldsymbol{v}}$ *par rapport au réseau,* où la vitesse est mesurée perpendiculairement à la direction du tube. On peut montrer que la relation existant entre la densité tensorielle de charge $\vec{\lambda}_i$ en mouvement à vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ par rapport au réseau et *le flux tensoriel de charges* $\vec{J}_i$ qui est associé à ce mouvement s'écrit alors $\vec{J}_i = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{\boldsymbol{v}}$, dont on déduit aussi *le flux vectoriel de charges* $\vec{J} = \vec{J}^{(\lambda)} + \vec{J}^{(\vec{\lambda})} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} + \left(\vec{\lambda} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}\right)/2$ et *la source scalaire de sites* $S_n / n = -\vec{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}}$.

On peut appliquer cette relation au cas des lignes de dislocation. On considérons une ligne



$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{\lambda}_i \wedge \vec{v} \\ \vec{J} = \vec{J}^{(\lambda)} + \vec{J}^{(\vec{\lambda})} = \lambda \vec{v} + \frac{1}{2}\left(\vec{\lambda} \wedge \vec{v}\right) \\ S_n / n = -\vec{\lambda}\vec{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\Upsilon}_i = \vec{\Lambda}_i \wedge \vec{v} = -\left(\vec{t} \wedge \vec{v}\right) B_i = \left(\vec{v} \wedge \vec{t}\right)\left(\vec{B}\vec{e}_i\right) \\ \vec{\Upsilon} = \Lambda \vec{v} + \frac{1}{2}\left(\vec{\Lambda} \wedge \vec{v}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{B}\vec{t}\right)\vec{v} - \frac{1}{2}\left[\vec{v} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{t}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(\vec{B}\vec{t}\right)\vec{v} + \frac{1}{2}\left(\vec{v}\vec{B}\right)\vec{t} \\ \Upsilon = -\vec{\Lambda}\vec{v} = \left(\vec{t} \wedge \vec{B}\right)\vec{v} \end{cases}$$

Figure 2.35 - *Les flux de charge associés à une ligne de dislocation se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $Ox_1x_2x_3$*

de dislocation comme celle reportée à la figure 2.35, qui se déplace par rapport au réseau à vitesse $\vec{v}$. Il est clair que, dans le cas d'une ligne, la vitesse $\vec{v}$ ne peut être que perpendiculaire en tous points à la direction $\vec{t}$ de la ligne. Dans le cas d'une ligne, on peut intégrer (sommer) le flux vectoriel de charges $\vec{J}_i$ sur la surface du contour C entourant la ligne de dislocation et mobile avec elle. Les intégrations sur la surface du contour des flux de charges $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ vont donner les *flux linéiques associés à la dislocation mobile*, c'est-à-dire les flux totaux par unité de longueur de dislocation, qu'on représentera par les symboles $\vec{\Upsilon}_i$ et $\vec{\Upsilon}$. Comme les flux $\vec{J}_i$ et $\vec{J}$ ont comme dimension l'inverse d'un temps (1/s), les flux linéiques $\vec{\Upsilon}_i$ et $\vec{\Upsilon}$ auront comme dimension une surface par unité de temps (m²/s). Quant à la source de sites de réseau S_n / n, son intégrale représentera aussi une surface par unité de temps (m²/s), et on l'écrira Υ. Il vient alors les relations reportées dans la figure 2.35, qui relient les *flux linéiques* $\vec{\Upsilon}_i$ *et* $\vec{\Upsilon}$*,* ainsi que la *source linéïque de sites* Υ aux *densités linéïques de charge* $\vec{\Lambda}_i$, $\vec{\Lambda}$ et Λ des dislocations. On en déduit aussi les relations liant directement les flux linéiques $\vec{\Upsilon}_i$, $\vec{\Upsilon}$ et Υ au vecteur de Bürgers $\vec{B}$ de la dislocation.

Si la dislocation ne comporte qu'une composante vis, le flux $\vec{\Upsilon}_{vis}$ sera donné par la relation reportée dans la figure 2.36. Cette relation montre que, comme la vitesse $\vec{v}$ est toujours perpendiculaire à la direction $\vec{t}$ de la ligne, les dislocations purement vis peuvent se mouvoir dans toutes les directions perpendiculaires à la direction $\vec{t}$. On parle en ce cas d'un mouvement de

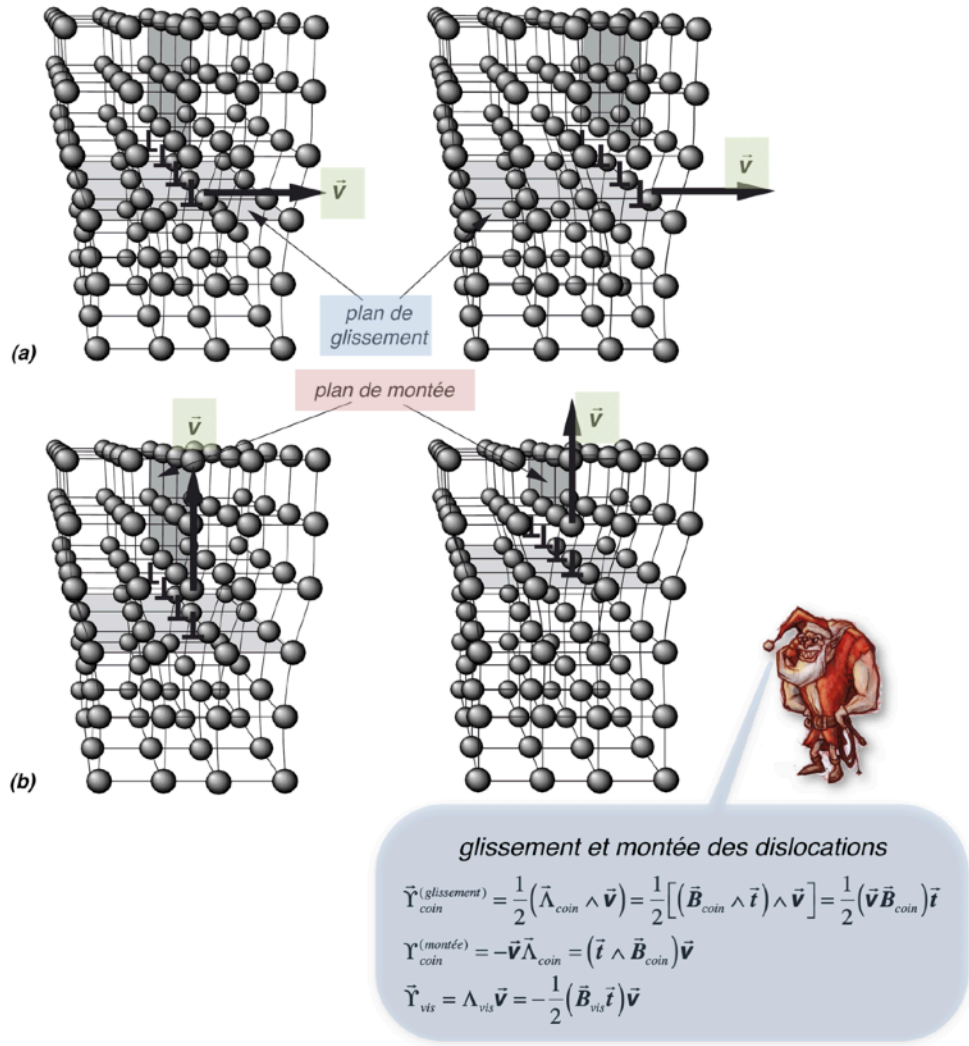


Figure 2.36 - *Les mouvements de glissement* ***(a)*** *et de montée* ***(b)*** *d'une dislocation coin*

glissement des dislocations vis, et les plans sur lesquels la dislocation vis se déplace sont appelés des *plans de glissement*.

Dans le cas d'une dislocation purement coin, il apparaît deux types de mouvement possibles, conduisant aux flux linéïques $\vec{\Upsilon}_{coin}^{(glissement)}$ et $\Upsilon_{coin}^{(montée)}$ dont les expressions mathématiques sont reportées dans la figure 2.36:

- le mouvement pour lequel $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{\Lambda}$, et qui est responsable d'un flux de charge vectoriel $\vec{\Upsilon}_{coin}^{(glissement)}$. Ce mouvement est représenté à la figure 2.36a. Il correspond à un mouvement conservatif de *glissement* de la dislocation coin sur son *plan de glissement,* défini comme le plan perpendiculaire à $\vec{\Lambda}$, donc le plan qui contient à la fois le vecteur de Burgers $\vec{B}_{coin}$, la direction $\vec{t}$ de la ligne et le vecteur vitesse $\vec{v}$.

le mouvement pour lequel $\vec{v}$ est parallèle à $\vec{\Lambda}$, et qui est responsable d'un flux de charge scalaire $\Upsilon_{coin}^{(montée)}$. Ce mouvement est représenté à la figure 2.36b. Il correspond à un mouvement non conservatif de *montée* de la dislocation coin perpendiculairement à son *plan de glissement.* La dislocation *«monte»* dans le réseau, en créant ou en annihilant un plan du réseau. Ce mou-

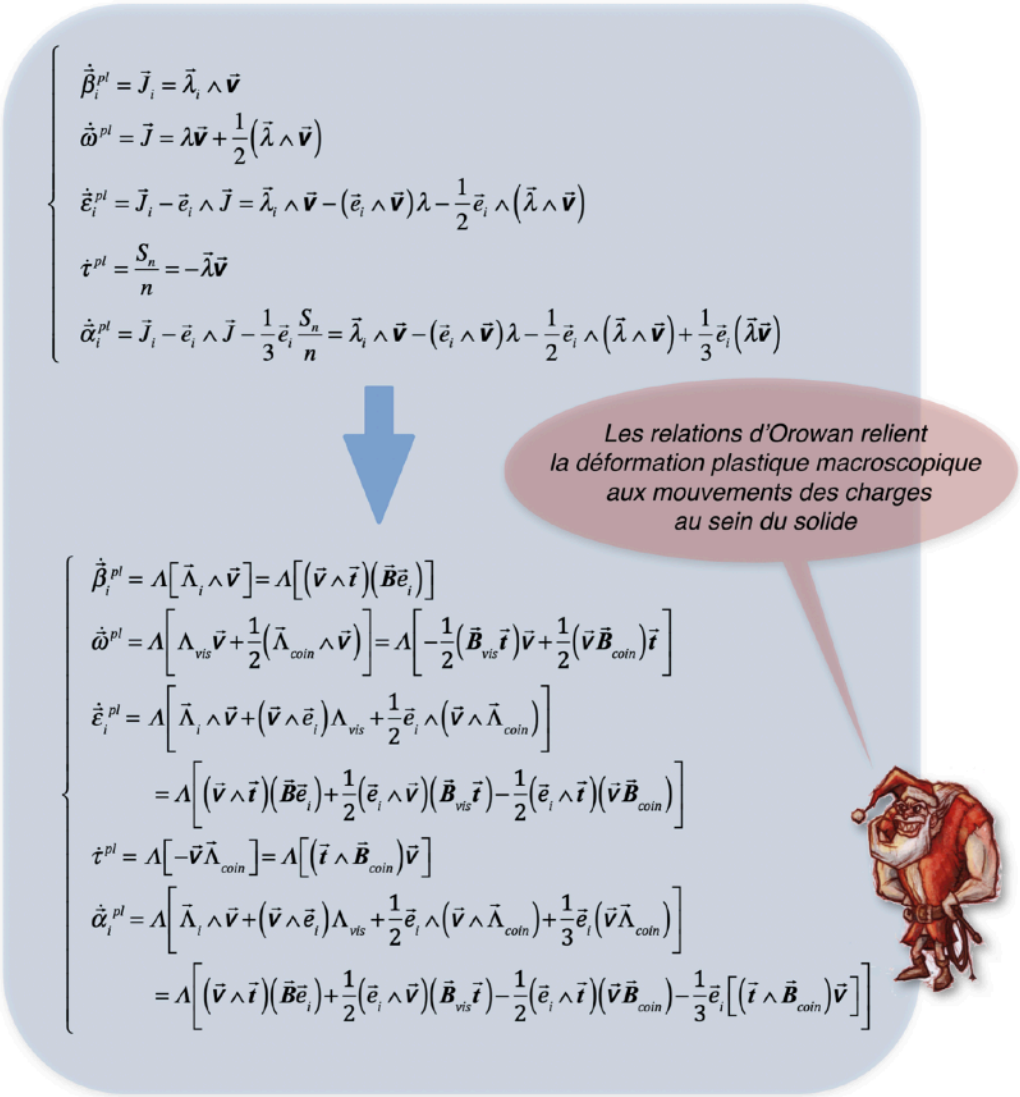


Figure 2.37 - *Les relations d'Orowan qui relient les distorsions plastiques au mouvement des charges*

vement est donc non conservatif au sens qu'il détruit ou construit du réseau, et c'est ce mouvement qui est responsable de l'existence d'une source S_n de sites de réseau dans l'équation géométrocinétique de l'expansion volumique reportée dans la figure 2.5, et qui s'écrit comme $S_n = -n\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\Lambda}_{coin} = n\left(\vec{\boldsymbol{t}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{coin}\right)\vec{\boldsymbol{v}}$.

C'est le mouvement des charges de dislocation qui est responsable de la déformation plastique macroscopique d'un solide. A partir de la connaissance des flux $\vec{J}_i$ de charges de dislocation, il est alors possible de remonter aux *distorsions plastiques macroscopiques* $\vec{\beta}_i^{\,pl}$ du solide grâce aux fameuses *relations d'Orowan*. Les dérivés totales le long de la trajectoire du milieu des distorsions plastiques macroscopiques $\dot{\vec{\beta}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\varepsilon}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\alpha}}_i^{\,pl}$, $\dot{\vec{\omega}}^{pl}$ et $\dot{\tau}^{pl}$ du solide chargé sont reportées dans la figure 2.37, en fonction des densités volumiques de charges $\vec{\lambda}_i$, $\vec{\lambda}$ et λ, en fonction des densités linéïques de charges $\vec{\Upsilon}_i$, $\vec{\Upsilon}$ et Υ associés au mouvement des lignes de dislocation, et finalement en fonction des vecteurs de Burgers des dislocations en lieu et place des densités linéiques de charge des lignes de dislocation.

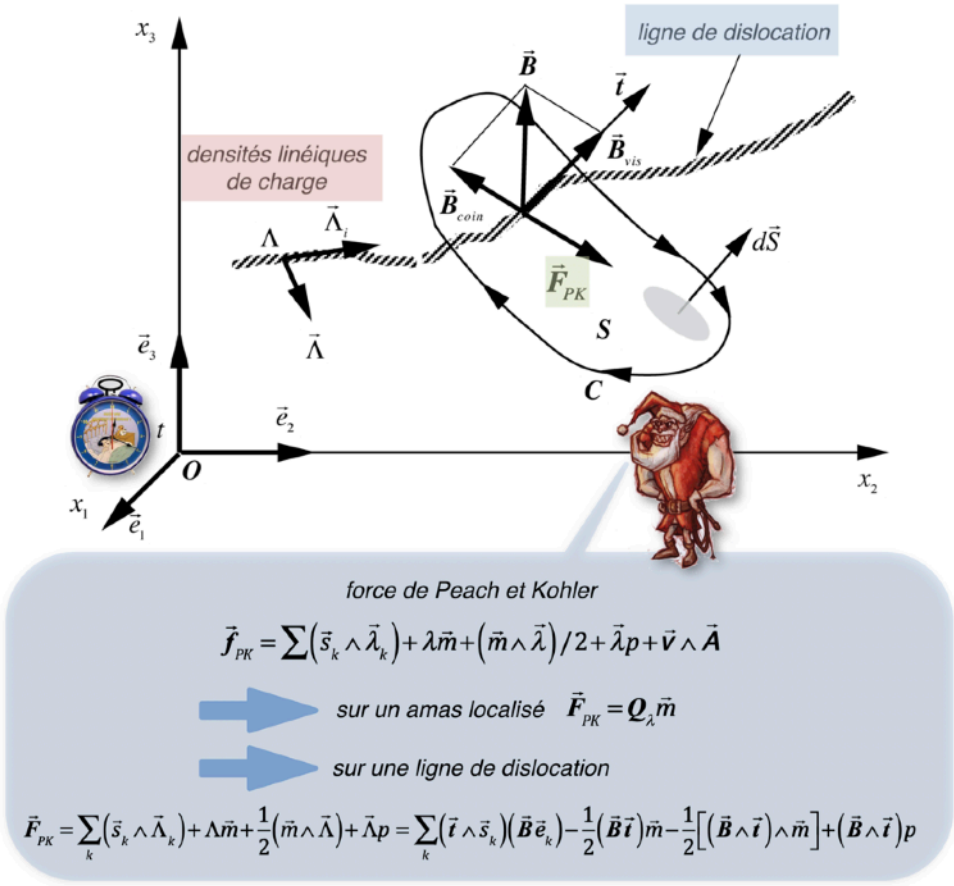


Figure 2.38 - *La force de Peach et Koehler $\vec{F}_{PK}$ agissant sur les singularités topologiques*

La force de Peach et Kohler agissant sur une ligne de dislocation

En établissant l'équation de bilan énergétique d'un solide contenant des dislocations, il apparaît un terme de puissance $\boldsymbol{P}_{ch} = \vec{s}_k \vec{J}_k + \vec{m}\vec{J} - pS_n / n$ qui n'est rien d'autre que la puissance fournie aux charges par les champs de contrainte $\vec{s}_k, \vec{m}, p$ apparaissant au sein du solide déformable. Dans ce terme de puissance, il est possible de remplacer les flux $\vec{J}_k$, $\vec{J}$ et S_n / n par leurs expressions en fonction de la vitesse des charges $\vec{\boldsymbol{v}}$, tirées de la figure 2.35. Il vient une expression de $\boldsymbol{P}_{ch}$ contenant cette fois les densités de charges $\vec{\lambda}_k$, $\vec{\lambda}$ et λ. La puissance $\boldsymbol{P}_{ch}$ fournie aux charges est donc le produit $\boldsymbol{P}_{ch} = \vec{\boldsymbol{f}}_{PK}\vec{\boldsymbol{v}}$ d'une vitesse par un terme qui ne peut être qu'une force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ agissant sur les densités de charges $\vec{\lambda}_k, \vec{\lambda}, \lambda$ par unité de volume. L'expression obtenue pour cette force est reportée dans la figure 2.38.

Cette force qui dépend des tenseurs de contrainte $\vec{s}_k$, $\vec{m}$ et/ou p est généralement appelée *la force de Peach et Koehler*. Comme la dimension des $\vec{\lambda}_k, \vec{\lambda}, \lambda$ est l'inverse d'une longueur (1/m) et que la dimension du torseur des moments est un moment par unité de volume, à savoir des (Nm/m³), la force $\vec{\boldsymbol{f}}_{PK}$ a pour dimension une force par unité de volume (N/m³). Le dernier terme contenant *un vecteur* $\vec{\boldsymbol{A}}$ est rajouté ici car c'est *un terme de force qui ne produirait pas de travail*, et donc qui n'apparaîtrait pas dans l'expression de la puissance $\boldsymbol{P}_{ch}$. Nous verrons d'ailleurs plus tard que ce terme correspond en fait à une force relativiste analogue à la

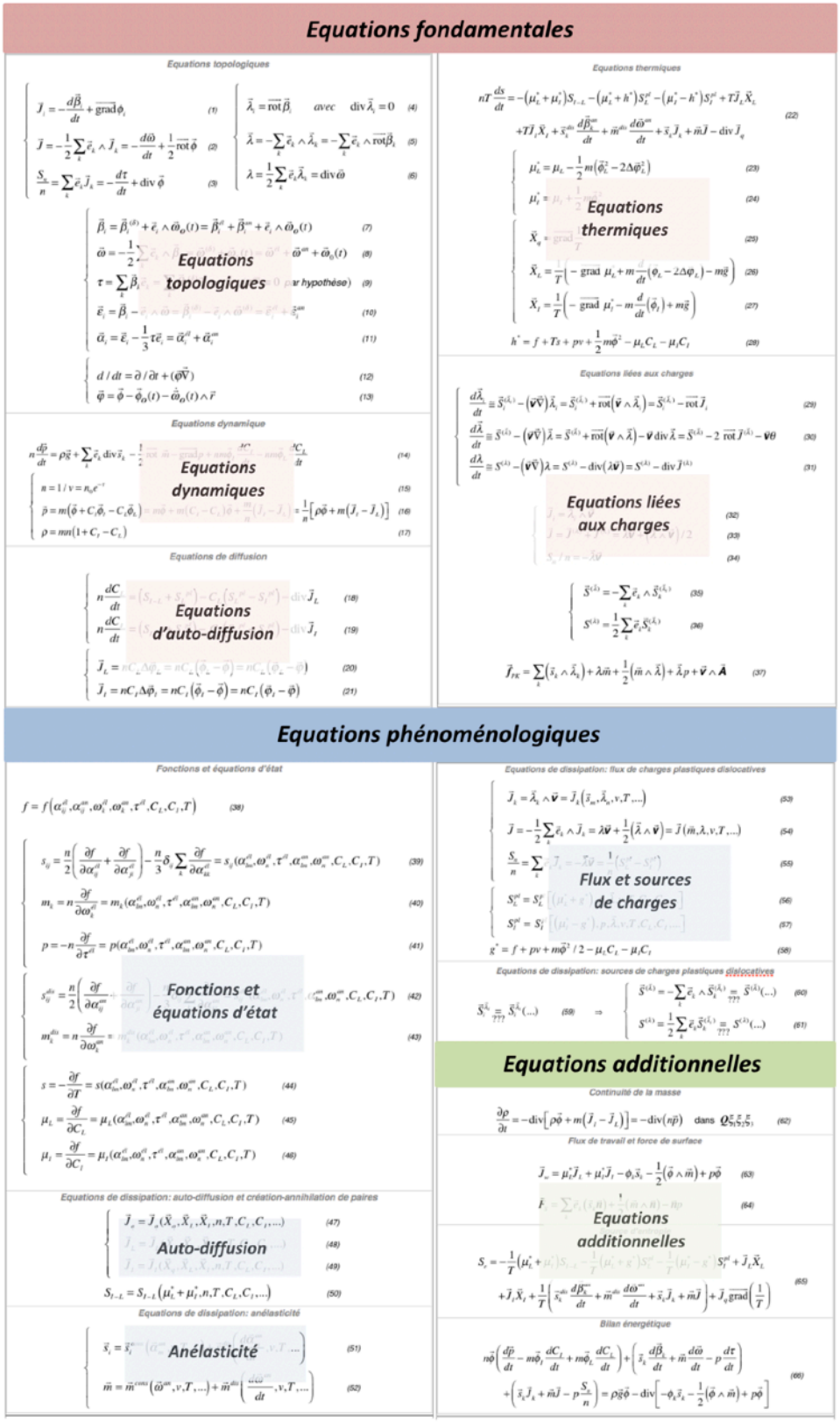


Figure 2.39 - *Représentation synoptique des équations fondamentales et phénoménologiques nécessaires à la description de l'évolution spatio-temporelle d'un milieu solide élastique, anélastique et auto-diffusif, contenant des charges plastiques mobiles.*

force de Lorentz en électromagnétisme.

La force de Peach et Koehler peut aussi être écrite dans le cas d'une dislocation, en intégrant la relation donnant $\vec{f}_{PK}$ sur la surface d'une section de la corde. Il vient alors, en négligeant pour l'instant le terme contenant le vecteur $\vec{A}$, les expressions de la force de Peach et Koehler agissant sur une ligne de dislocation qui sont reportées dans la figure 2.38, exprimées respectivement à partir des *densités linéïques de charge* $\vec{\Lambda}_i$, $\vec{\Lambda}$ et Λ des dislocations, et du vecteur de Bürgers $\vec{B}$ de la dislocation.

La dimension de la force $\vec{F}_{PK}$ agissant sur la dislocation est une force par unité de longueur (N/m). C'est en fait la *force par unité de longueur de la ligne* en présence des champs de contrainte $\vec{s}_k, \vec{m}, p$. L'écriture de la force de Peach et Koehler $\vec{F}_{PK}$ en utilisant les tenseurs de contrainte $p, \vec{m}, \vec{s}_k$ est très intéressante, car elle permet de s'en faire une représentation beaucoup plus claire qu'avec la notation $\vec{F}_{PK} = \sum\left(\vec{\sigma}_k \wedge \vec{\Lambda}_k\right)$ habituellement utilisée dans la littérature qui utilise exclusivement le tenseur de contrainte symétrique $\vec{\sigma}_k$. En effet, supposons un solide dans lequel l'expansion volumique est nulle, et donc qui possèderait une pression p négligeable. En ce cas, on sait qu'on peut remplacer le tenseur de cisaillement $\vec{\alpha}_k$ par le vecteur de rotation $\vec{\omega}$, de sorte que la force devient *une force de glissement* qui s'écrit $\vec{F}_{PK} = \Lambda\vec{m} + \left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right)/2$, dans laquelle le terme $\Lambda\vec{m}$ est la force agissant sur la composante vis Λ de la dislocation et le terme $\left(\vec{m} \wedge \vec{\Lambda}\right)/2$ est la force agissant sur la composante coin $\vec{\Lambda}$ de la dislocation. Comme la composante m_k du moment de rotation est associée aux composantes de cisaillement σ_{ij} et σ_{ji} du tenseur de contrainte, on peut se faire immédiatement une représentation très claire des forces agissant sur une dislocation. De même en va-t-il concernant la force de pression $\vec{\Lambda}p$, qui n'agit que sur la composante coin $\vec{\Lambda}$ des dislocations et qui correspond, vu sa direction (figure 2.36), à *une force de montée des dislocations*.

Dans le cas d'une charge localisée $\boldsymbol{Q}_\lambda$ de rotation, on obtient la force de Peach et Koehler en intégrant la force sur tout le volume de la charge localisée. Le résultat est reporté dans la figure 2.38. En ce cas, la dimension de $\vec{F}_{PK} = \boldsymbol{Q}_\lambda\vec{m}$ est celle d'une pure force, exprimée en (N), et qui est l'analogue de la force électrique $\vec{F}_{électrique} = q\vec{E}$ agissant sur une charge électrique localisée en électromagnétisme.

Des potentialités de la représentation eulérienne des milieux chargés

La densité tensorielle $\vec{\lambda}_i$ et le flux tensoriel $\vec{J}_i$ de charges de dislocation définis dans ce chapitre permettent de trouver l'ensemble des équations fondamentales et phénoménologiques d'évolution spatio-temporelle auxquelles doit satisfaire un réseau solide anélastique et auto-diffusif contenant des charges de dislocation. Ce développement est fait avec nombres de détails dans mon premier livre. On ne décrira ici que très sommairement deux aspects importants qui peuvent être traités dans le cadre de la représentation eulérienne des milieux solides contenant des charges plastiques.

Il est possible de combiner l'ensemble des résultats décrits jusqu'à maintenant pour obtenir les équations complètes d'évolution spatio-temporelle d'un réseau solide auto-diffusif, présentant des comportements phénoménologiques d'élasticité et d'anélasticité, et contenant des densités et des flux de charges de dislocation. Comme le montre la figure 2.39, ce système d'équations est assez complexe, surtout au niveau du nombre élevé d'équations phénoménologiques d'état et d'équations phénoménologiques de dissipation nécessaires à une description complète

de tous les phénomènes possibles dans un tel milieu, et sur lesquelles on ne s'appesantira pas dans ce livre.

Les concepts de densités et de flux de charges de dislocation permettent de décrire les phénomènes de plasticité et d'anélasticité au niveau microscopique du réseau solide discret, en y introduisant une microstructure évolutive de charges plastiques qui devrait permettre de traduire les comportements non-markoviens de la plasticité. De plus, l'approche par des charges plastiques au niveau microscopique du réseau solide discret permet aussi en principe de trouver des expressions locales exactes pour les équations dissipatives liées aux charges plastiques.

Les concepts de densités et de flux de charges de dislocation permettent de décrire les phénomènes de plasticité et d'anélasticité au niveau microscopique du réseau solide discret, en y introduisant une microstructure évolutive de charges plastiques qui devrait permettre de traduire les comportements non-markoviens de la plasticité. De plus, l'approche par des charges plastiques au niveau microscopique du réseau solide discret permet aussi en principe de trouver des expressions locales exactes pour les équations dissipatives liées aux charges plastiques.

En introduisant le solide le plus simple qu'il est possible de considérer, à savoir le *solide parfait isotrope*, on peut obtenir *l'équation de Newton* de ce solide. On peut alors montrer que ce solide est parfaitement décrit par *des équations analogues aux équations de Maxwell lorsque l'expansion volumique est homogène au sein du solide*.

On peut aussi calculer les champs de distorsions, les énergies et les interactions des dislocations dans ce solide parfait. Dans le cas de dislocations immobiles dans le réseau solide, les *distorsions statiques du réseau* induites par celles-ci stockent de l'*énergie élastique* au sein du réseau. Cette énergie stockée peut alors être considérée comme l'*énergie de repos des dislocations*. Dans le cas où les dislocations sont mobiles dans le réseau, les *déplacements du réseau* induits par le mouvement des dislocations sont associés à une *énergie cinétique*. A basse vitesse, cette énergie cinétique est directement liée à l'énergie de repos de ces dislocations via des relations similaires à la fameuse *expression d'Einstein* $E_0 = M_0 c^2$, ce qui permet d'introduire *de manière tout-à-fait classique* la notion de *masse d'inertie des dislocations*.

A partir des champs de distorsion induits par les dislocations et de la force de Peach et Koehler, on peut aussi décrire les interactions pouvant intervenir entre dislocations.

Finalement, on peut encore introduire le *modèle de la corde*, qui va permettre de traiter *la dynamique d'une dislocation* qui se déplace dans le réseau tout *en se déformant.* Le modèle de la corde s'avère extrêmement utile et performant pour traiter les problèmes de plasticité et d'anélasticité dus au mouvement des dislocations et intervenant dans les solides usuels, tels que les métaux par exemple. Mais il n'est pas du ressort de ce livre de traiter en détail la problématique de ces phénomènes, qui peut être abordée dans de nombreux livres traitant de ce sujet particulier. Cependant, pour attiser l'intérêt du lecteur, on a reporté l'équation de la corde d'une dislocation dans la figure 2.40a, et, à titre d'exemple, deux applications typiques :

- *l'interaction thermiquement activée d'une dislocation avec un champ d'obstacles ponctuels:* pour introduire ce type d'interactions dans le modèle de la corde, il faut connaître la distribution spatiale des obstacles dans le solide, ainsi que les champs de contraintes internes générés par ceux-ci. Ces champs de contraintes dus aux obstacles peuvent être exprimés et visualisés au niveau du plan de glissement de la dislocation, comme illustré dans la figure 2.40b, où il apparaît de nombreuses forces de Peach et Koehler $\sum \boldsymbol{f}_n\left(x_1, u(x_1,t)\right)$ se combinant pour agir sur

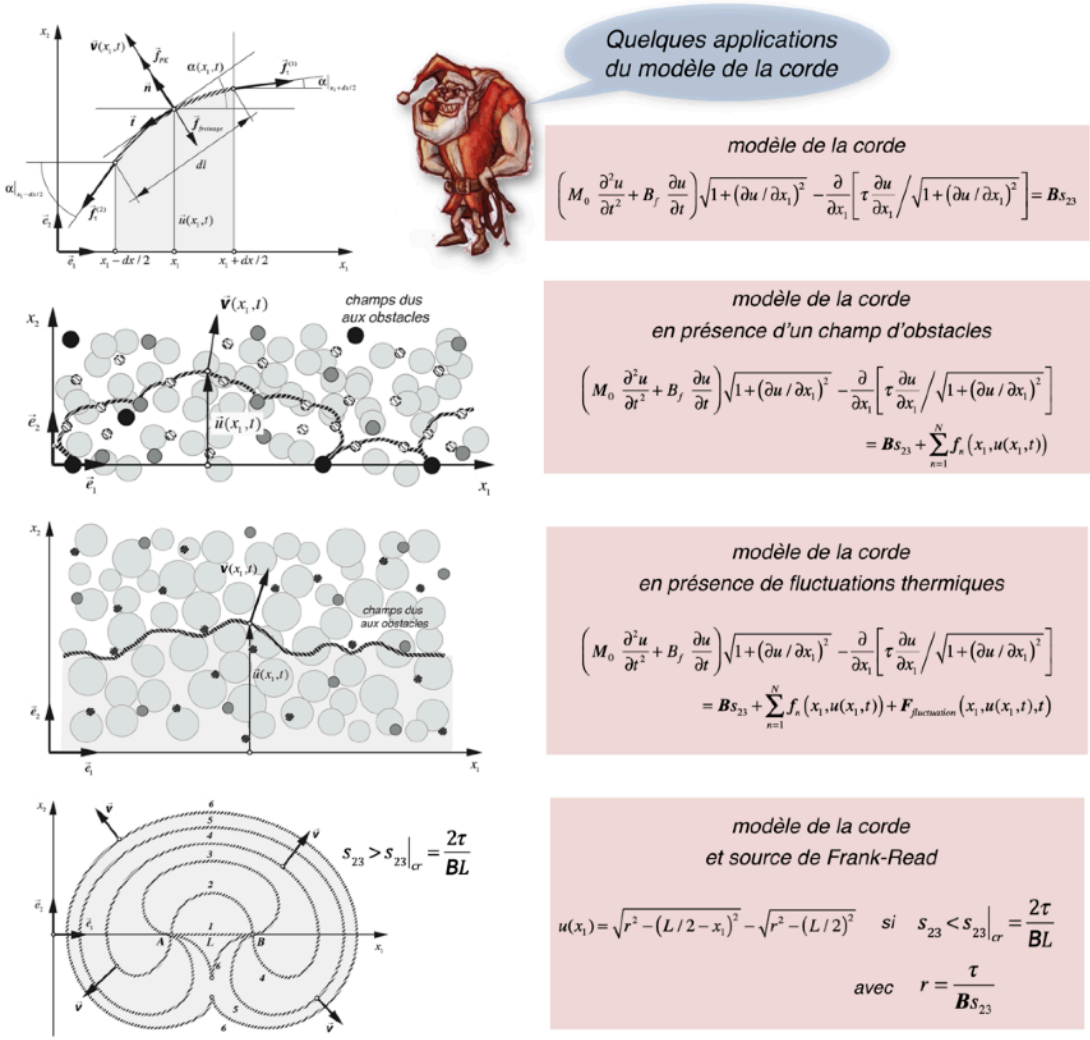


Figure 2.40 - *Le modèle de la corde et quelques unes de ses applications*

la dislocation. Mais l'équation de la corde de la figure 2.40b en présence d'interactions avec des obstacles est une équation purement mécanique, qui ne peut pas tenir compte des effets de température, tels que la migration des obstacles par diffusion ou le franchissement des obstacles par activation thermique. Introduire les effets de température dans l'équation de la corde est théoriquement possible en développant une image *«brownienne»* de la dislocation, c'est-à-dire en introduisant un terme de fluctuations thermiques locales $\boldsymbol{F}_{fluctuation}\left(x_1,u(x_1,t),t\right)$ dans l'équation de la corde, comme illustré à la figure 2.40c, calqué sur le terme de fluctuations thermiques dans le modèle de *l'équation de Langevin.* Il est clair qu'une telle approche de la dynamique des dislocations s'avère vite très complexe.

En général, on aborde ces problèmes d'interactions de dislocations avec des obstacles de manière beaucoup plus pragmatique, en développant, sur la base du modèle de la corde, des modèles simplifiés et judicieusement adaptés au problème à traiter. Pour approfondir ce sujet, on trouvera des exemples de mécanismes d'interaction des dislocations avec des obstacles, illustrés par des résultats expérimentaux et des modélisations théoriques, dans de nombreux livres traitant des dislocations, ou de manière plus résumée dans des articles de revue tels que

«dislocation-point defect interactions»[11] et *«dislocation-lattice interactions»*[12] .

- *la source de dislocations de Frank-Read:* on suppose maintenant un segment de dislocation de longueur L ancré sur son plan de glissement en deux points ***A*** et ***B*** situés sur l'axe Ox_1 en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$, comme illustré dans la figure 2.40d. De tels points d'ancrage peuvent être dus à l'existence d'interactions fortes et localisées de la dislocation avec des obstacles (autres dislocations, précipités, etc.). En utilisant l'équation de la corde dans le cas statique, on montre assez facilement que la déformée du segment de dislocation sous l'effet d'une contrainte statique est une portion de cercle dont le rayon dépend de la contrainte s_{23} appliquée au solide. En fait, le rayon de courbure $r = \tau / (Bs_{23})$ du segment est inversement proportionnel à la contrainte statique de cisaillement s_{23} , ce qui signifie que celui-ci diminue lorsque s_{23} augmente. Cependant, il est clair qu'il existe une limite minimum pour le rayon de courbure, qui intervient pour une contrainte critique $s_{23}\big|_{cr}$ telle que le rayon de courbure devient égal à $L/2$ **.** Pour toute valeur de s_{23} supérieure à $s_{23}\big|_{cr}$, il ne peut pas exister de solution statique pour la déformée du segment de corde. Il apparaît alors une solution dynamique complexe de l'équation de la corde, qui correspond en fait à un mécanisme de *source de Frank-Read* .

Le segment rectiligne initial représenté par *(1)* dans la figure 2.40d se courbe entre les deux points d'ancrage jusqu'à former un demi-cercle *(2)*. Puis il continue à s'étendre au-delà des points d'ancrage, étapes *(3), (4) et (5),* jusqu'à ce que le brin du segment partant de ***A*** rejoigne le brin de segment partant de ***B*** *(6)*. A cet endroit, comme les deux brins ont le même vecteur de Burgers, ils se lient entre eux en formant d'une part un nouveau segment *(1)* grandissant entre les points d'ancrage ***A*** et ***B*** , et d'autre part une boucle fermée *(6)* qui ne va pas cesser de grandir. Ce mécanisme constitue donc un phénomène de source ininterrompue de boucles de dislocation. C'est essentiellement ce phénomène, qui est très bien observé par microscopie électronique, qui explique pourquoi il est possible d'effectuer d'importantes déformations plastiques de certains solides comme les métaux. Et c'est bien ce type de phénomène qui peut être responsable de l'existence d'une source non-nulle de charges de dislocation dans l'équation de continuité de la densité $\vec{\lambda}_i$ des charges de dislocation à la figure 2.5, qui induit une *non-commutativité de l'opérateur temporel de dérivé particulaire avec les opérateurs d'espace.*

---

[11] *G. Gremaud, chap.3.3, dans «Mechanical spectroscopy», Trans Tech Publications, Zürich, 2001, p.178-246*

[12] *W. Benoit, chap. 3.2, dans «Mechanical spectroscopy», Trans Tech Publications, Zürich, 2001, p. 158-177*