Chapitre 4

Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme

Les *équations de Maxwell* sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme formulées à la fin du 19ème siècle par James Clerk Maxwell sur la base des différents théorèmes de Gauss, Ampère et Faraday qui décrivaient séparément les phénomènes électriques et magnétiques avant que Maxwell ne les unifie. Les lois de Maxwell régissent tous les phénomènes classiques liés aux champs électriques et magnétiques, et représentent par là une des plus belles applications du concept de champs en physique. Mais les équations de Maxwell de l'électromagnétisme sont un postulat déduit de l'observation expérimentale, et on les admet parce qu'elles correspondent aux observations expérimentales.

Dans ce chapitre, on démontre théoriquement l'existence d'un set d'équations pour décrire les rotations et les cisaillements du réseau cosmologique en l'absence de variations de l'expansion volumique, et on constate qu'il existe une analogie complète et parfaite entre ce set d'équations et le set des équations de Maxwell. Non seulement cette analogie démontre qu'il est possible de déduire théoriquement le set de ces équations sur la base de quelques principes physiques fondamentaux appliqués au solide cosmologique, mais elle permet aussi de considérer le réseau cosmologique comme un support physique pour les champs électromagnétiques, et de donner des interprétations physiques aux diverses grandeurs de l'électromagnétisme.

On commence par montrer la séparabilité du champ d'expansion volumique des autres champs dans l'équation de Newton d'un *réseau cosmologique* dans le cas où les concentrations de défauts ponctuelles sont des constantes. L'équation de Newton peut être séparée en deux parties, une partie dite *rotationnelle* et une partie dite *divergente.* Dans le cas où le champ d'expansion volumique peut être considéré comme quasi-constant, la partie rotationnelle fait alors apparaître un set d'équations pour le champ des rotations macroscopiques et des rotations locales (associées aux cisaillements du réseau) parfaitement identique à l'ensemble du set des *équations de Maxwell de l'électromagnétisme*. Cette analogie avec les équations de Maxwell ne laisse aucune place pour l'existence de *monopôles magnétiques*, mais il y a par contre possibilité d'imaginer l'existence de *charges électriques vectorielles*.

Séparabilité de l'équation de Newton en partie «rotationnelle» et partie «divergente»

Supposons que le champ d'expansion volumique au sein d'un réseau cosmologique présente un champ de fond τ_0 homogène auquel est superposé un champ d'expansion élastique $\tau^{él}$, de sorte qu'il peut s'écrire $\tau = \left(\tau_0 + \tau^{él}\right)$. En supposant de plus que les concentrations atomiques de lacunes et d'auto-interstitiels soient *des constantes homogènes* dans tout le réseau, et donc qu'elles ne dépendent pas du temps ($dC_I / dt = dC_L / dt = 0$), on peut écrire l'équation de Newton du réseau sous la forme représentée dans la figure 4.1.

Grâce l'hypothèse d'homogénéité des concentrations de lacunes et d'auto-interstitiels, la

linéarité des relations en les diverses vitesses montre qu'il est possible de les scinder en deux contributions en séparant les vitesses $\vec{\phi}$, $\vec{\phi}_L$ et $\vec{\phi}_I$ en une composante, indicée *«rot»*, associée aux déformations par cisaillements et rotations d'une part, et une composante, indicée *«div»*, associée aux déformations par expansion volumique d'autre part.

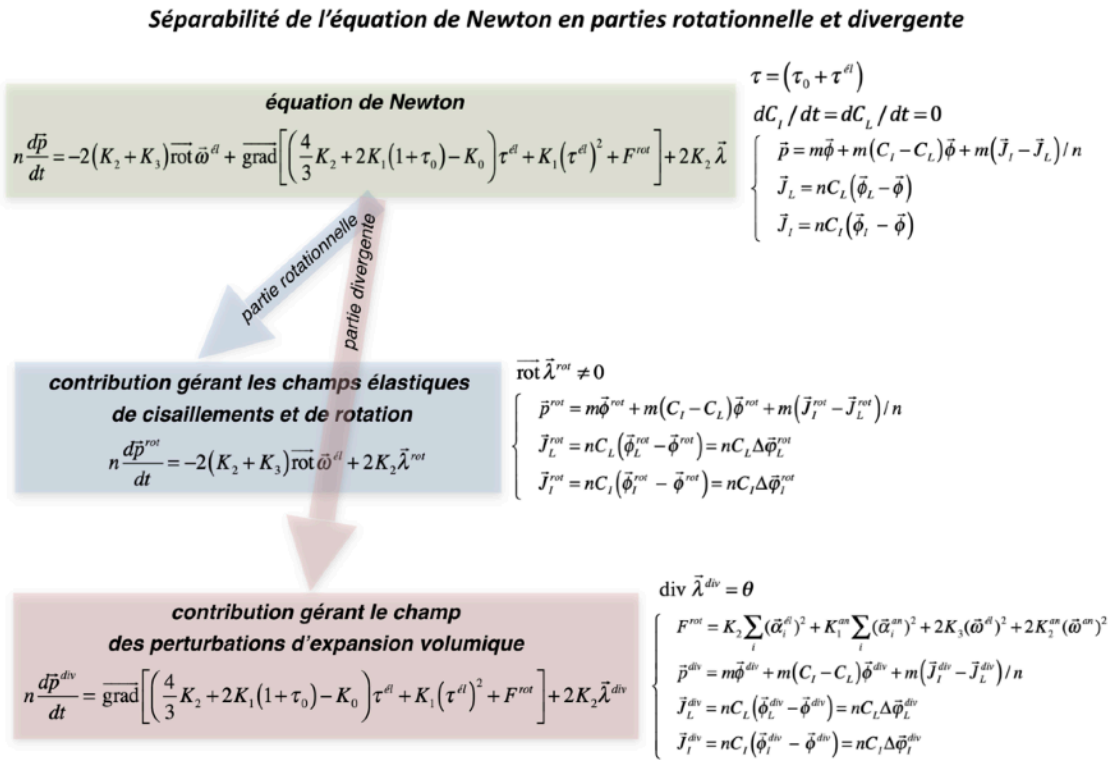


Figure 4.1 *- Séparabilité de l'équation de Newton en partie rotationnelle et en partie divergente sous conditions d'homogénéité des concentrations de lacunes et d'auto-interstitiels*

Il vient ainsi deux contributions à l'équation de Newton comme indiqué dans la figure 4.1:
-*une contribution gérant les champs élastiques de cisaillements et de rotation,* via le champ vectoriel de rotation $\vec{\omega}^{él}$. Cette contribution ne dépend de l'expansion volumique τ que par la présence de la densité de site $n = n_0\,\mathrm{e}^{-(\tau_0+\tau^{él})}$,
- *une contribution gérant le champ de perturbation d'expansion volumique*, qui est dépendante de la solution précédente via la densité d'énergie F^{rot} de déformation par cisaillements et rotations élastiques et anélastiques.

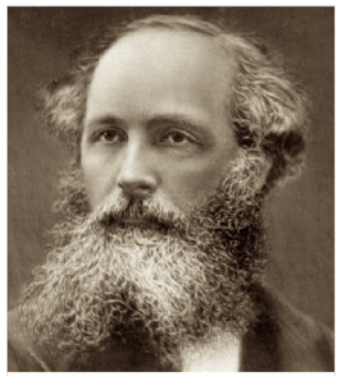
La densité de charges de flexion à aussi été scindée en deux parties: les *charges de flexion «rotationnelles»* et les *charges de flexion «divergentes»*, qui satisfont deux relations reportées aussi dans la figure 4.1, et qui permettent de relier l'équation de Newton pour l'expansion $\tau^{él}$ à la densité de charge de courbure θ au sein du réseau.

Cette scission de l'équation de Newton dans le cas où les concentrations de lacunes et d'interstitiels sont des constantes homogènes permet de résoudre les problèmes d'évolution spatio-temporelle du réseau cosmologique, en séparant la résolution des champs élastiques de cisaillements et de rotation de celle du champ d'expansion volumique. Mais comme la densité de

sites $n = n_0 \, \mathrm{e}^{-(\tau_0 + \tau^{él})}$ intervient à la fois dans les parties rotationnelles et divergentes, il existe un certain couplage entre les résultats des deux équations partielles de Newton. Cependant, moyennant des hypothèses simplificatrices supplémentaires, il peut être possible de résoudre de manière complètement indépendante ces deux sets d'équations. C'est ce qu'on va montrer dans la suite, en considérant le cas particulier où le champ d'expansion volumique peut être considéré comme quasi-constant.

Comportement "maxwellien" de la partie rotationnelle de l'équation de Newton

Emettons maintenant l'hypothèse que la valeur moyenne de l'expansion volumique $\langle \tau \rangle = \tau_0 + \langle \tau^{él} \rangle$ au sein du réseau cosmologique puisse être considérée en première approximation comme constante et homogène, de sorte que la densité de site n puisse aussi être considérée en moyenne comme une constante homogène. Avec cette hypothèse, l'équation de Newton se réduit à sa partie purement rotationnelle. Dans ce cas, le torseur de moment $\vec{m}$ dérive d'une équation d'état virtuel, la *densité volumique virtuelle d'énergie libre de rotation élastique*, liée aux déformations par cisaillements et par pures rotations élastiques, sans expansions volumiques, qui s'écrit $F^{él}_{rotation}\left(\vec{\omega}^{él}\right) = 2\left(K_2 + K_3\right)\left(\vec{\omega}^{él}\right)^2$. Toujours par hypothèse, on va aussi supposer que l'*anélasticité du réseau* se manifeste uniquement par cisaillement et/ou rotation, de sorte qu'elle peut très bien être représentée ici par un vecteur de rotation anélastique $\vec{\omega}^{an}$.



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Les équations nécessaires à la description complète des cisaillements et rotations élastiques du réseau cosmologique doivent encore incorporer les équations topologiques pour le vecteur de rotation élastiques $\vec{\omega}^{él}$, à savoir l'équation géométrocinétique et l'équation de géométrocompatibilité en présence de charges de dislocations. Comme la densité ρ de masse d'inertie du réseau est une constante puisque $\rho = m\left(n + n_I - n_L\right) = mn\left(1 + C_I - C_L\right) = cste$, on en déduit que $\mathrm{div}\left(n\vec{p}^{rot}\right) = -\partial\rho / \partial t = 0$. Avec toutes ces considérations, on peut finalement déduire le set complet d'équations reporté dans la figure 4.2, qui décrit l'évolution spatio-temporelle du réseau cosmologique en présence de purs cisaillements et de rotations locales.

Les relations ainsi obtenues pour le réseau cosmologique dans le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ mobile avec le milieu sont alors comparées avec les *équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans un milieu électriquement chargé, conducteur, magnétique et diélectrique*. On constate qu'il existe une analogie très forte entre ces deux ensembles d'équations, hormis le fait que les équations d'évolution font intervenir en principe la dérivée particulaire, alors que les équations de Maxwell font intervenir la dérivée partielle par rapport au temps. Cependant, il faut noter ici que la dérivée particulaire dans un référentiel local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ mobile avec le milieu peut être remplacée par la dérivée partielle par rapport au temps si les déformations restent suffisamment faibles et/ou lentes au voisinage de l'origine du référentiel local, ce que nous avons supposé dans le tableau de la figure 4.2.

L'analogie entre les équations d'un réseau cosmologique pris à expansion volumique quasi

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}^{rot}\cong(2\vec{J}) & = \textit{équation de géométrocinétique} \\ \mathrm{div}\,(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})=(2\lambda) & = \textit{équation de géométrocompatibilité} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(n\vec{p}^{rot})}{\partial t}\cong-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)+2K_2\vec{\lambda}^{rot} & = \textit{équation de Newton} \\ \mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})=0 & = \textit{équation de conservation de la densité de masse} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\vec{\omega}^{\acute{e}l})=\dfrac{1}{(K_2+K_3)}\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)+(2\vec{\omega}^{an})+\left(2\vec{\omega}_0(t)\right) & = \textit{phénoménologie de l'élasticité et l'anélasticité} \\ (n\vec{p}^{rot})=(nm)\left[\vec{\phi}^{rot}+\left(C_I-C_L\right)\vec{\phi}^{rot}+\left(\dfrac{1}{n}\left(\vec{J}_I^{rot}-\vec{J}_L^{rot}\right)\right)\right] & = \textit{phénoménologie du transport de masse} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(2\lambda)}{\partial t}\cong-\mathrm{div}(2\vec{J}) & = \textit{continuité des charges de rotation} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)(2\vec{J})\cong \\ \vec{\phi}^{rot}\dfrac{\partial(n\vec{p}^{rot})}{\partial t}+\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\dfrac{\partial(2\vec{\omega}^{\acute{e}l})}{\partial t}-\mathrm{div}\left(\vec{\phi}^{rot}\wedge\left(\dfrac{\vec{m}}{2}\right)\right) & = \textit{équation de bilan énergétique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_t=\sqrt{\dfrac{K_2+K_3}{mn}} & = \textit{célérité des ondes transversales} \end{cases}$$

Figure 4.2a *- Formulation «maxwellienne»* ***des équations d'évolution du réseau cosmologique*** *dans un repère local* $Ox_1x_2x_3$ *mobile avec le milieu*

constante et homogène et les équations de Maxwell de l'électromagnétisme est tout-à-fait remarquable, car elle est absolument complète, comme le montrent bien les équations reportées dans le tableau de la figure 4.2. Les équations de Maxwell y ont une correspondance précise avec les équations des rotations dans réseau cosmologique: l'équation de Maxwell-Ampère correspond à l'équation géométrocinétique, l'équation de Maxwell-Gauss à l'équation de géométrocompatibilité, l'équation de Maxwell-Faraday à l'équation de Newton et finalement l'équation de Maxwell-Thompson à l'équation de conservation de la densité de masse. En fait, nos équations contiennent un terme supplémentaire de *densité de charges* $\vec{\lambda}^{rot}$ *de flexion «rotationnelles»* dans le deuxième couple d'équations, qui n'a pas d'homologue dans les équations de Maxwell. En supposant alors un réseau cosmologique dans lequel $\vec{\lambda}^{rot}$ puisse être négligée, à savoir que $\vec{\lambda}^{rot}\approx 0$, l'analogie entre les équations du réseau cosmologique et les équations de Maxwell devient parfaite, et mérite d'être commentée plus en détail.

De l'analogie entre les charges de rotation et les charges électriques

Les équations du tableau 4.2 montrent une analogie complète entre la densité λ de charges de rotation et la densité ρ de charges électriques, qui interviennent respectivement

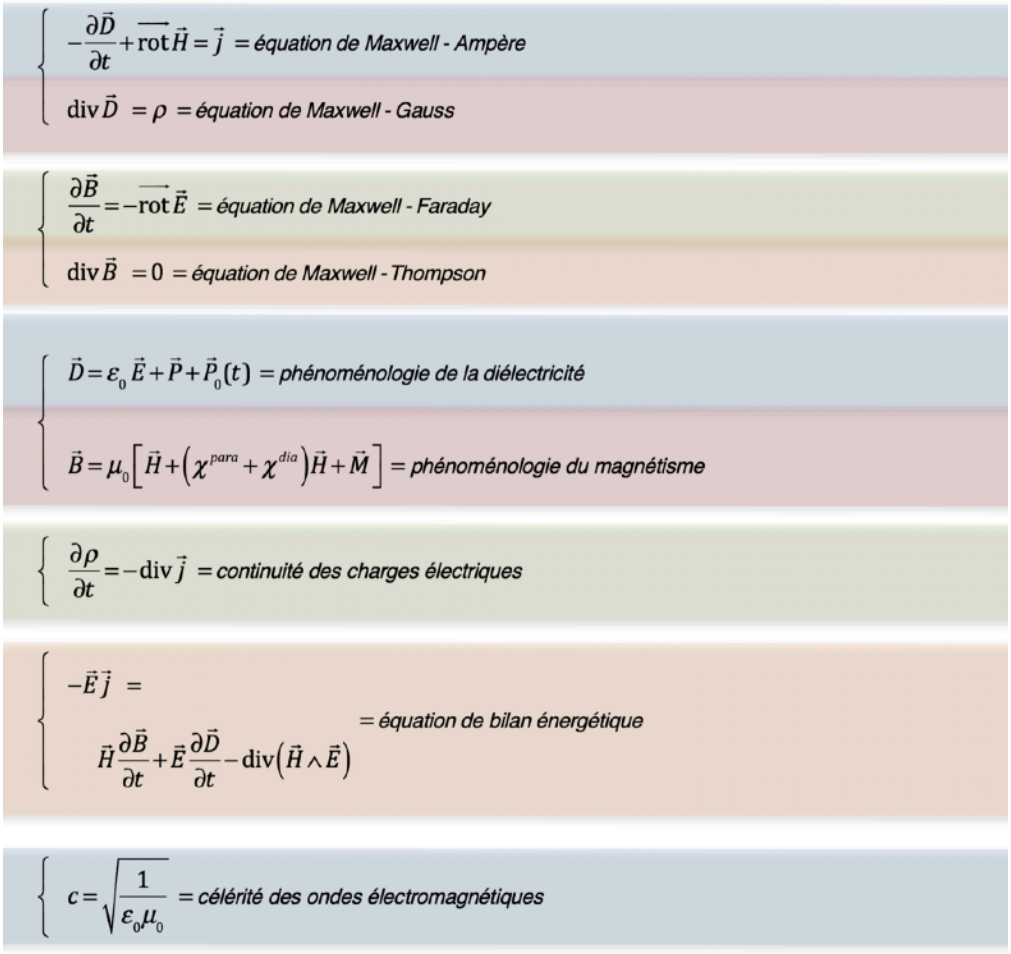


Figure 4.2b - *Formulation «maxwellienne» des* ***équations de l'électromagnétisme***

dans l'équation de géométrocompatibilité et dans l'équation de Maxwell-Gauss, ainsi qu'entre le flux vectoriel $\vec{J}$ de charges de rotation et la densité de courant électrique $\vec{j}$, qui interviennent respectivement dans l'équation de géométrocinétique et dans l'équation de Maxwell-Ampère. L'équation de continuité des charges de rotation est écrite dans ce tableau en considérant que la source de charges de rotation $S^{\lambda}=\left[d\left(\mathrm{div}\,\vec{\omega}^{él}\right)/dt-\mathrm{div}\left(d\vec{\omega}^{él}/dt\right)\right]$ décrite dans la figure 2.5 est nulle ($S^{\lambda}=0$), et elle correspond alors à l'équation de continuité des charges électriques lorsqu'on suppose l'absence de création et d'annihilation de charges électriques. On imagine immédiatement qu'il y a assurément là un lien à creuser entre la source S^{λ} de charges de rotation due à la non-commutation des opérateurs de temps et d'espace, et les phénomènes de création-annihilation de charges électriques.

De l'analogie entre l'anélasticité du réseau et la diélectricité de la matière

Le phénomène d'anélasticité introduit ici par le terme $2\vec{\omega}^{an}$ devient, dans la comparaison avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, l'analogue de la polarisation diélectrique $\vec{P}$ dans la relation $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}+\vec{P}_0(t)$, donnant le déplacement électrique $\vec{D}$ en fonction du

champ électrique $\vec{E}$ et de la polarisation $\vec{P}$ de la matière. Cette analogie entre les champs an $2\vec{\omega}^{an}$ et $\vec{P}$ est très forte puisque les comportements phénoménologiques possibles de ces deux grandeurs sont tout-à-fait similaires, avec dans les deux cas des comportements relaxationnels, résonants ou hystérétiques décrits en détail dans le livre[1]. Par exemple, dans le cas d'une relaxation pure, il est possible de relier $\vec{\omega}$ à $\vec{m}$ par l'intermédiaire d'un module complexe, tout comme il est possible de relier $\vec{D}$ à $\vec{E}$ via un coefficient diélectrique complexe en électromagnétisme. En fait, une comparaison plus poussée montrerait même que les comportements associés à l'activation thermique, donc à la température, présentent aussi des analogies.

Quant au terme de polarisation diélectrique homogène $\vec{P}_0(t)$ qu'on a introduit ici, il est l'analogue d'un terme de rotation globale $2\vec{\omega}_0(t)$ du réseau, donc du repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ dans le référentiel absolu du **GO.** Ce terme d'analogie disparaît par conséquent dans le cas où le repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ n'est qu'en translation $\vec{\phi}_{\boldsymbol{O}}(t)$ par rapport au référentiel absolu.

De l'analogie entre le transport de masse dans le réseau et le magnétisme de la matière

Comme la grandeur $n\vec{p}^{rot}$ représente à la fois la quantité de mouvement moyenne par unité de volume du solide et le flux de masse moyen au sein du solide, on en déduit que le flux de masse au sein du solide est dû à la fois à un transport de masse $nm\vec{\phi}^{rot}$ à vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ par le mouvement du réseau, à un transport de masse $nm\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ à vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ par le mouvement d'entraînement des défauts ponctuels par le réseau et à un transport de masse $m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)$ dû au phénomène d'auto-diffusion des lacunes et des interstitiels.

Chacun de ces transports de masse possède un analogue dans les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Le transport de masse $nm\vec{\phi}^{rot}$ par le réseau est l'analogue du terme de base $\mu_0\vec{H}$ de l'*induction magnétique* dans le vide. Le transport de masse $nm\left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ par entraînement des défauts ponctuels par le réseau correspond parfaitement au terme $\mu_0(\chi^{para} + \chi^{dia})\vec{H}$ du magnétisme, dans lequel la susceptibilité magnétique se compose de deux parties: la *susceptibilité paramagnétique* χ^{para} positive, qui devient donc l'analogue de la concentration C_I d'interstitiels, et la *susceptibilité diamagnétique* χ^{dia} négative, qui est par conséquent l'analogue de la concentration C_L de lacunes.

Quant au phénomène d'auto-diffusion par les lacunes et les interstitiels, il apparaît dans ces équations par le terme $n\vec{p}^{rot}_{auto-diffusion} = m\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right) = mn\left(C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}\right)$ reliant la dernière partie de $n\vec{p}^{rot}$ aux vitesses $\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ et $\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}$ d'auto-diffusion des défauts ponctuels.

Le terme $\left(\vec{J}_I^{rot} - \vec{J}_L^{rot}\right)/n = C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ associé à ce transport de masse par auto-diffusion des défauts ponctuels devient, dans la comparaison avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, l'analogue parfait de la magnétisation $\vec{M}$ de la matière dans la relation donnant l'induction magnétique $\vec{B}$. L'analogie entre les champs $C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot} - C_L\Delta\vec{\varphi}_L^{rot}$ et $\vec{M}$ est très forte puisqu'il existe des comportements phénoménologiques similaires de ces deux grandeurs, comme des comportements relaxationnels décrits dans le livre[1], qui dérivent d'équations de transport et qui supposent implicitement que les processus d'auto-diffusion sont de type

---

[1] *G. Gremaud, "Théorie eulérienne des milieux déformables – charges de dislocation et désinclinaison dans les solides", Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), Lausanne (Switzerland) 2013, 751 pages, ISBN 978-2-88074-964-4*
G. Gremaud, "Eulerian theory of newtonian deformable lattices – dislocation and disclination charges in solids", Amazon, Charleston (USA) 2016, 312 pages, ISBN 978-2-8399-1943-2

markovien, donc qu'ils ne dépendent pas de l'histoire, c'est-à-dire des processus de transport antérieurs, ce qui est bien le cas des solides usuels.

Mais rien n'interdit à priori d'imaginer des réseaux solides pour lesquels les processus de transport ne seraient pas de type markovien. A titre d'exemple, on peut imaginer un réseau hypothétique dans lequel les lacunes seraient très fortement ancrées au réseau, alors que les interstitiels seraient quasiment libres de s'y mouvoir. La quantité de mouvement $n\vec{p}^{rot}$ au sein du solide s'écrirait $n\vec{p}^{rot} = nm\left[\vec{\phi}^{rot} + \left(C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot} + C_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}\right]$, et le transport de masse $n\vec{p}^{rot}$ contiendrait maintenant un terme $\left(2C_I - C_L\right)\vec{\phi}^{rot}$ associé à la fois aux lacunes et aux interstitiels, dont le coefficient $\left(2C_I - C_L\right)$ est l'analogue de la susceptibilité magnétique χ en électromagnétisme, et qui peut prendre une valeur positive ou négative suivant les concentrations C_I et C_L de défauts ponctuels. Il contiendrait de plus le terme $nmC_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}$ associé à un transport de masse par mouvement inertiel conservatif des interstitiels, parfaitement analogue à l'aimantation permanente $\vec{M}$ des matériaux ferromagnétiques et antiferromagnétiques en électromagnétisme.

La présence d'un terme constant $nmC_I\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}$ dans $n\vec{p}^{rot}$ correspondrait alors très clairement à un processus de type non markovien, puisque la valeur de $\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}$ doit essentiellement dépendre de l'histoire de cet hypothétique réseau solide. On pourrait imaginer par exemple que le mouvement des interstitiels soit contrôlé par un frottement de type sec avec le réseau, auquel cas il existerait une force critique de désancrage des interstitiels, ce qui conduirait à l'apparition de cycles d'hystérèse de $\Delta\vec{\varphi}_I^{rot}(t)$ en fonction de $\vec{\phi}^{rot}(t)$, absolument analogues aux cycles d'hystérèse de la magnétisation $\vec{M}(t)$ en fonction du champ magnétique $\vec{H}(t)$ observés dans les matériaux ferromagnétiques ou antiferromagnétiques.

L'analogie complète avec les grandeurs de la théorie de l'électromagnétisme

L'analogie reportée dans le tableau de la figure 4.2 entre les équations d'un réseau cosmologique pris à expansion volumique quasi constante et homogène et les équations de Maxwell de l'électromagnétisme est tout-à-fait remarquable, car elle est absolument complète, et elle fait appel aussi à des processus relaxationnels et hystérétiques très similaires dans les deux systèmes. On peut reporter dans le tableau 4.3 l'analogie complète qui existe entre les grandeurs physiques de notre approche et les grandeurs électromagnétiques de la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme.

Des effets d'une expansion volumique du réseau dans le référentiel absolu du GO

Dans cette analogie, l'existence d'une translation uniforme à vitesse $\vec{\phi}_{\boldsymbol{O}}(t)$ non nulle du réseau, donc du repère local $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$ par rapport au référentiel absolu $\boldsymbol{Q}\xi_1\xi_2\xi_3$ du **GO**, aurait pour analogue, dans les équations de Maxwell, un champ magnétique $\vec{H}_0(t)$ homogène dans l'espace. Cette dernière remarque implique que, si un réseau solide était en expansion dans le référentiel absolu du **GO**, il devrait apparaître un champ $\vec{\phi}_{\boldsymbol{O}}(t)$ dans les repères locaux $\boldsymbol{O}x_1x_2x_3$. Ce champ $\vec{\phi}_{\boldsymbol{O}}(t)$ devrait avoir pour analogue un champ magnétique $\vec{H}_0(t)$ *localement homogène* dans l'espace *si l'Univers était en expansion*, et qui pointerait dans la direction du mouvement du repère local de l'observateur par rapport à l'espace absolu.

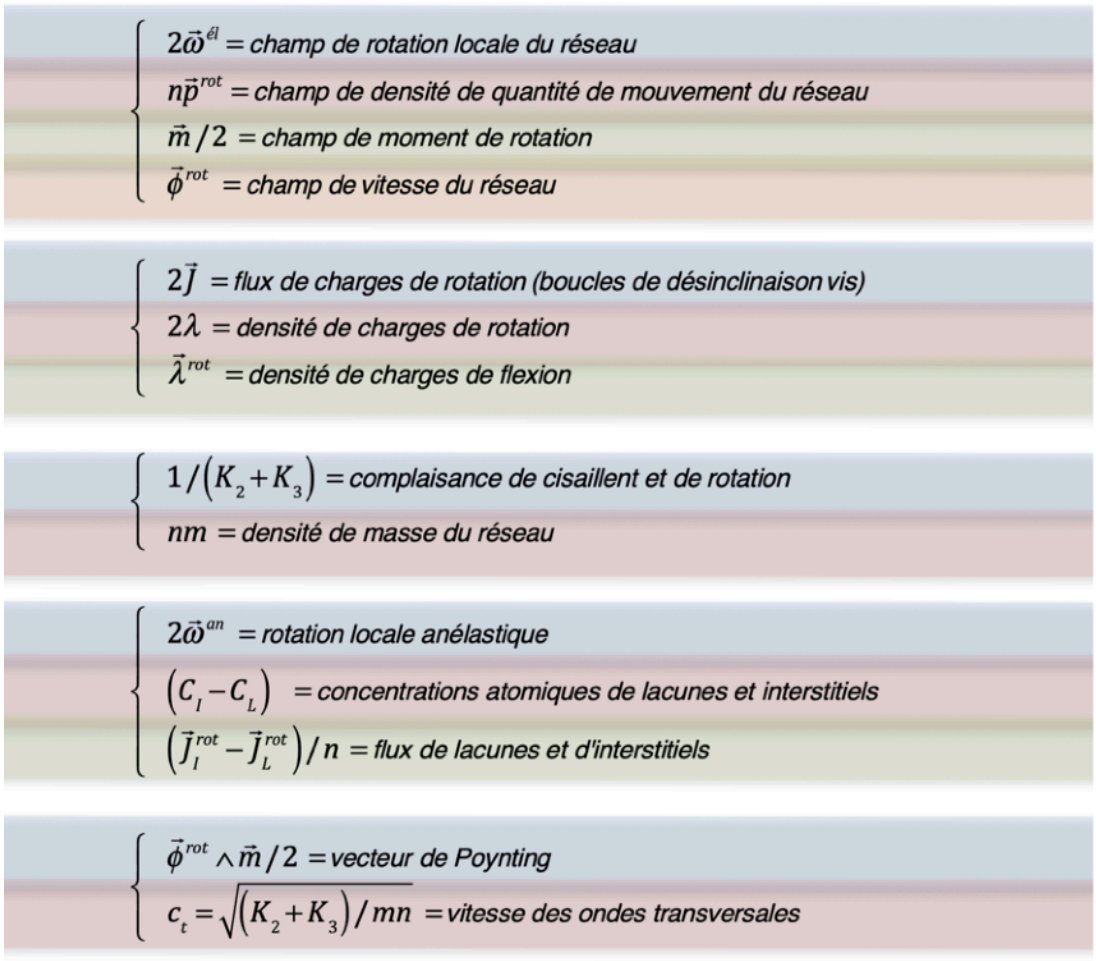


Figure 4.3a *- L'analogie complète entre* ***les grandeurs physiques du réseau cosmologique*** *et les grandeurs électromagnétiques des équations de Maxwell.*

Existe-t-il des «monopôles magnétiques» dans cette analogie?

L'équation $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})=0$ reflète le fait qu'on considère un solide avec un champ d'expansion volumique statique et homogène. L'existence d'une valeur non nulle et constante de $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})$, telle que $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})=\mathrm{div}\left[mn\left(1+C_I-C_L\right)\vec{\phi}^{rot}\right]+\mathrm{div}\left[m\left(\vec{J}_I^{rot}-\vec{J}_L^{rot}\right)\right]\neq 0$ impliquerait qu'il existe un champ constant et divergent de vitesse $\vec{\phi}^{rot}$ des sites de réseau, et donc, avec l'hypothèse que $\tau=cste$, une source de sites de réseau S_n non nulle, ou alors qu'il existerait un flux constant et divergent d'auto-diffusion $m\left(\vec{J}_I^{rot}-\vec{J}_L^{rot}\right)$, qui nécessiterait obligatoirement des sources localisées et non nulles de défauts ponctuels S_L^{pl} et/ou S_I^{pl}, ce qui est bien difficile à imaginer.

Dans le cadre de l'analogie avec l'électromagnétisme, une relation $\mathrm{div}(n\vec{p}^{rot})=cste\neq 0$ aurait pour analogue la relation $\mathrm{div}\,\vec{B}=cste\neq 0$. Or, cette dernière relation fait apparaître la notion bien connue de *monopôles magnétiques*, de *particules de charge magnétique unipolaire*, proposées par certaines théories, mais jamais observées expérimentalement. D'après notre analogie avec le réseau cosmologique, les monopôles magnétiques ne pourraient pas être des particules stables, mais devraient correspondre aux de sources localisées et continues de sites

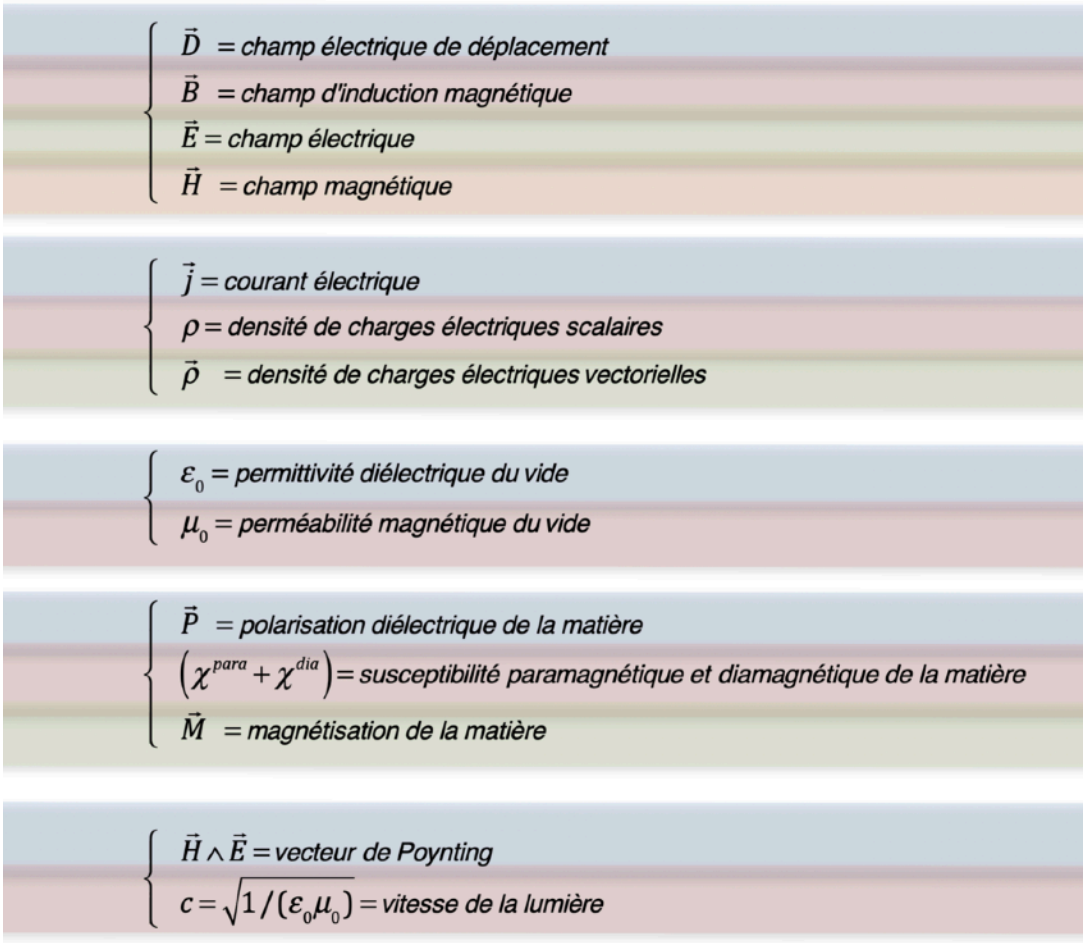


Figure 4.3b - *L'analogie complète entre les grandeurs physiques du réseau cosmologique et* ***les grandeurs électromagnétiques des équations de Maxwell****.*

de réseau ou de défauts ponctuels, ce qui est particulièrment difficile à imaginer. On en déduit que dans le cadre de notre analogie, l'existence de monopôles magnétiques en tant que particules isolées en électromagnétisme n'est pas possible.

Existe-t-il des «charges électriques vectorielles» dans cette analogie?

On peut légitimement se demander ce que pourrait être l'analogie de la densité de charges de flexion «rotationnelles» $\vec{\lambda}^{rot}$ dans les équations de Maxwell. S'il existait une grandeur analogue à $\vec{\lambda}^{rot}$ dans les équations de Maxwell, on pourrait la qualifier hypothétiquement de *densité* $\vec{\rho}$ *de «charges électriques vectorielles»* en posant l'analogie suivante $\vec{\rho} \Leftrightarrow \vec{\lambda}^{rot}$. Les équations de Maxwell s'écriraient alors un peu différemment des équations connus, avec un terme supplémentaire de charge non pas dans l'équation $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ comme le suggèrent les théories de monopôles magnétiques, mais dans l'équation de Maxwell-Faraday de la manière suivante $\partial \vec{B} / \partial t = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \kappa\vec{\rho}$, dans laquelle κ est un nouveau *coefficient électrique*, analogue du module $2K_2$ *:* $\kappa \Leftrightarrow 2K_2$.

Dans le cas statique, si une telle charge vectorielle existait vraiment, l'équation la contenant s'écrirait de la façon suivante $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \kappa\vec{\rho}$, et aurait pour analogue dans le réseau cosmologique

l'équation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{m}/2\right)=2K_2\vec{\lambda}^{rot}$. Elle impliquerait donc pour le champ de déplacement que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{D}=\varepsilon_0\kappa\vec{\rho}$, de sorte que la densité $\vec{\rho}$ de *«charges électriques vectorielles»* serait source d'un champ électrique $\vec{E}$ rotationnel et d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ rotationnel, tout comme la densité scalaire ρ de charges électriques est source d'un champ de déplacement électrique $\vec{D}$ divergent par la relation $\mathrm{div}\,\vec{D}=\rho$. Si on compare maintenant les coefficients des deux théories, on obtient, à partir des analogies $\varepsilon_0 \Leftrightarrow 1/\left(K_2+K_3\right)$ et $\kappa \Leftrightarrow 2K_2$, qu'il existe l'analogie suivante $\varepsilon_0\kappa \Leftrightarrow 2K_2/(K_2+K_3)$ entre les coefficients des deux théories.

Mais les observations expérimentales n'ont jamais mis en évidence l'existence de telles *«charges électriques vectorielles».* En fait, cela s'explique assez simplement par le fait que les singularités topologiques considérées dans le réseau cosmologique seront toujours exclusivement des boucles de désinclinaison vis, des boucles prismatiques de dislocation coin et des boucles de glissement de dislocation mixte, et dans le cas de telles boucles, il est facile de voir que la charge vectorielle globale $\vec{q}_{\vec{\lambda}}$ obtenue par intégration de la charge de flexion linéïque $\vec{\Lambda}$ sur le contour de la boucle est nulle, de sorte que la densité $\vec{\rho}$ de charges électriques vectorielles obtenue comme la valeur moyenne de la somme de toutes les charges vectorielles $\vec{q}_{\vec{\lambda}}$ contenues par unité de volume est forcément nulle, de sorte que $\vec{\rho}=0$. On peut donc introduire ici une nouvelle conjecture pour notre approche, à savoir:

Conjecture 5 - *Il n'existe pas de charges vectorielles électriques localisées $\vec{q}_{\vec{\lambda}}$ dans le réseau cosmologique, de sorte que la densité $\vec{\rho}$ de charges électriques vectorielles est forcément nulle dans les équations de Maxwell:*

$$\vec{\rho}=0$$

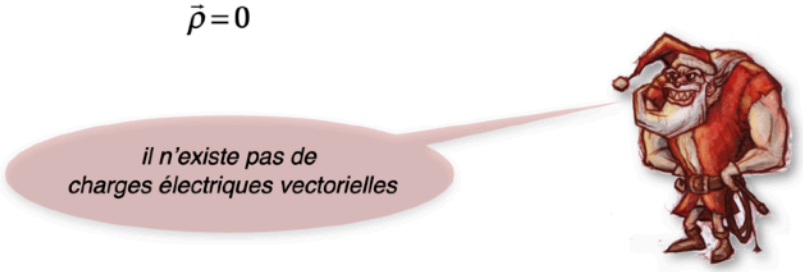


Figure 4.4 *- La cinquième conjecture qui conclue à la non-existence de «charges électriques vectorielles»*

A noter qu'il pourrait peut-être exister de longues «cordes» de dislocation coin qui traverseraient tout le réseau cosmologique et qui présenteraient bien une densité linéïque $\vec{\Lambda}$ de *charge électrique vectorielle,* ce qui ferait alors effectivement apparaître une densité vectorielle $\vec{\rho}$ non nulle de charges électriques vectorielles dans les équations de Maxwell. Mais il s'agit là d'une hypothèse quelque peu extravagante.

De l'importance de cette analogie

En fait, l'existence d'une analogie entre deux théories est toujours très fructueuse en physique, par l'apport réciproque de chacune des théories. Dans notre cas, il est clair que cette analogie avec la théorie des champs électromagnétiques va nous permettre dans la suite d'utiliser pour la description d'un réseau tout l'arsenal des outils théoriques développés depuis fort

longtemps en théorie des champs, telles que, par exemple, la transformation de Lorentz ou la théorie des potentiels retardés. Dans l'autre sens, la théorie développée ici est en fait une théorie nettement plus complexe que l'électromagnétisme classique, puisqu'elle découle d'une théorie tensorielle qui peut être réduite à une théorie vectorielle par contraction sur les indices des tenseurs, et en choisissant de plus des cas particuliers « bridés » de comportement du réseau solide, comme la constance et l'homogénéité de l'expansion volumique. En tenant compte de l'aspect tensoriel de la théorie des réseaux solides et en renonçant au « bridage » des comportements de ceux-ci, l'analogie va devenir particulièrement intéressante et fructueuse, comme on le verra par la suite.