Chapitre 12

Le spin des boucles topologiques

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à trouver la solution de la deuxième équation partielle de Newton au sein même du tore entourant une boucle de désinclinaison vis. Au coeur même d'une boucle de singularité topologique, on démontre qu'*il ne peut pas exister de solutions statiques à la deuxième équation partielle de Newton* pour les fluctuations gravitationnelles longitudinales. Il devient par conséquent impératif de trouver une solution dynamique à cette équation, et la solution dynamique la plus simple qu'il soit possible d'envisager est que *la boucle tourne sur elle-même*, dans un mouvement de rotation quantifié de la boucle autour d'un de ses axes. En résolvant ce mouvement de rotation avec la deuxième équation partielle de Newton, qui n'est en ce cas dynamique rien d'autre que l'équation de Schrödinger, on obtient la solution quantifiée des fluctuations gravitationnelles internes à la boucle, qui est en fait *le spin de la boucle*, qui peut prendre plusieurs valeurs différentes (1/2, 1, 3/2, etc.) et qui est parfaitement similaire au spin des particules du Modèle Standard. Si la boucle est composée d'une boucle de désinclinaison vis, il apparaît aussi *un moment magnétique* de la boucle, proportionnel au célèbre *magnéton de Bohr*.

On montre que, dans le cas de notre approche, ce mouvement de rotation est bien réel, et qu'il n'enfreint aucunement la relativité restreinte, au contraire de ce que croyaient initialement les pionniers de la physique quantique. En effet, l'argument des pionniers de la physique quantique était que le spin d'une particule ne peut en aucun cas être une rotation réelle de la particule sur elle-même à cause d'une vitesse équatoriale de rotation supérieure à la célérité de la lumière . Cet argument est balayé dans notre approche par le fait que l'expansion statique au voisinage du coeur de la boucle est très élevée, ce qui conduit à des célérités de la lumière au voisinage du coeur de la boucle beaucoup plus élevées que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle.

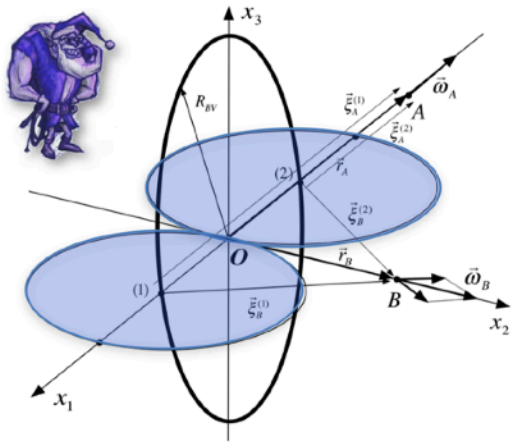
Dans cette argumentation sur la nécessité absolue d'un spin des boucles de singularité pour satisfaire la deuxième équation partielle de Newton, seule la valeur exacte du spin d'une boucle, à savoir les valeurs 1/2 ou 1, ne trouve pas pour l'instant d'explication simple.

De la non-existence d'un champ interne de perturbations statiques de l'expansion au sein d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

Nous avons déjà calculé les champs externes statiques de perturbations gravitationnelles d'expansion d'une boucle de désinclinaison vis (figure 7.10), et nous avons vu que ces champs sont responsables des effets d'attraction gravitationnelle à longue distance de la boucle via *la force de gravitation* (chapitre 8), mais aussi des effets de couplage à courte distance avec d'autres boucles via *la force faible* (chapitre 9).

Par contre, nous ne nous sommes pas encore penchés sur le cas du champ des perturba-

tions de l'expansion au voisinage immédiat de la boucle de désinclinaison vis. Ce champ doit être calculé au sein du tore entourant la boucle de désinclinaison vis. En utilisant une version statique simplifiée de la deuxième équation partielle de Newton de la figure 5.1, dans laquelle on introduit la densité d'énergie de distorsion $F_{dist}^{BV}(\vec{\xi})$ associée aux champs de rotation et de cisaillement de la pseudo-dislocation vis, on obtient une équation du deuxième degré dont la solution $\tau_{int}^{BV}(\vec{\xi})$ au sein du tore est reportée la figure 12.1 , et dans laquelle $\vec{\xi}$ représente le vecteur lieu repérant un point sur une section du tore par rapport au centre de cette section.



Solution statique $$\tau_{int}^{BV}(\vec{\xi}) = \frac{4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0) - K_0}{2K_1}\left[-1 + \sqrt{1 - \frac{K_1(K_2+K_3)}{\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+) - K_0\right)^2}\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2}{2\pi^4 R_{BV}^2}\frac{1}{\xi^2}}\right]$$

Condition d'existence d'une solution statique $$\xi > \xi_{cr} = \sqrt{\frac{K_1(K_2+K_3)}{2\pi^4\left(4K_2/3 + 2K_1(1+\tau_0+) - K_0\right)^2}}\frac{|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}|}{R_{BV}} \cong \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{K_1}{2K_0}}\frac{|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}|}{R_{BV}}$$

Conjecture 11: K_1 *satisfait la relation suivante dans le réseau cosmologique parfait*

$$K_1 > K_{1cr} = K_0\frac{2\pi^4 R_{BV}^2}{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2} \quad \Rightarrow \quad \textit{pas de solution statique possible}$$

Figure 12.1 *- Non-existence de solutions statiques pour les perturbations gravitationnelles internes à une boucle de désinclinaison vis*

Pour que cette équation ait une solution réelle, il faudrait que l'argument de la racine soit positif, donc que la distance $\vec{\xi}$ au coeur de la boucle satisfasse la condition d'existence reportée dans la figure 12.1, qui revient à dire que la distance $|\vec{\xi}|$ doit être supérieure à une certaine valeur critique ξ_{cr} pour qu'une solution statique existe. Si cette distance critique s'avère supérieure au rayon de la boucle R_{BV} , il est clair qu'une solution statique devient impossible. Il est assez facile alors de montrer que la condition pour laquelle $\xi_{cr} > R_{BV}$ est en fait une condition sur la valeur du module K_1, qui s'exprime comme $K_1 > K_{1cr} = 2\pi^4 K_0 R_{BV}^2 / \boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2$, et qui signifie

que si K_1 est supérieur à la valeur critique K_{1cr}, il ne peut pas exister de solution statique pour les perturbations gravitationnelles au sein du tore entourant la boucle de désinclinaison.

Il est intéressant de faire intervenir ici des valeurs numériques qu'on peut tirer du monde réelle, en utilisant par exemple l'analogie avec les électrons, à savoir que, pour ceux-ci, on a une charge électrique valant $\left|\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\right| = \boldsymbol{q}_{électron} = 1.6 \cdot 10^{-19}\left[C\right]$, un rayon estimé de l'ordre de $10^{-18}\left[m\right]$ et que les modules élastiques $K_3 = K_0$ sont en fait les analogues de la constante diélectrique du vide, de sorte que $K_3 = K_0 = 1/\varepsilon_0^{diélectrique} = 1.1 \cdot 10^{11}\left[m/F\right]$, la condition $K_1 > K_{1cr}$ impliquerait alors que $K_{1cr} = K_0 2\pi^4 R_{BV}^2 / q_{\lambda BV}^2 \cong 10^{-21}$.

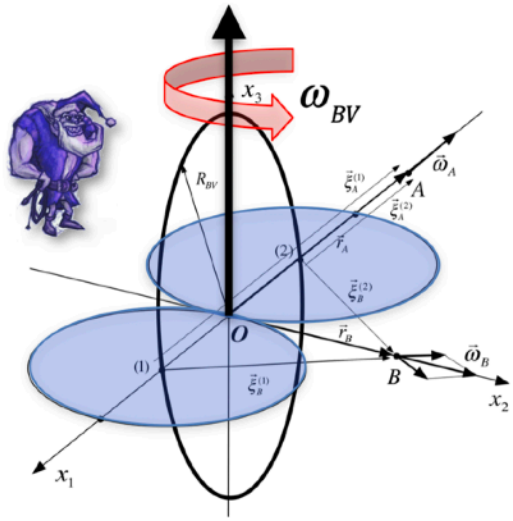
La condition que le module K_1 soit supérieur à la valeur critique $K_{1cr} \cong 10^{-21}$ à de fortes chances d'être remplie en présence d'une boucle de désinclinaison vis, ce qui est fortement conforté par l'application numérique obtenue grâce à l'analogie avec les électrons du monde réel. Admettons donc une nouvelle conjecture, la conjecture 11, qui stipule que K_1 satisfait bien la relation $K_1 \geq K_{1cr} = K_0\ 2\pi^4\ R_{BV}^2 / \boldsymbol{q}_{\lambda BV}^2$ dans le réseau cosmologique parfait.

En admettant cette conjecture, le champ de perturbations «gravitationnelles» au sein du tore entourant la boucle de désinclinaison vis ne peut pas être une solution de l'équation statique, et doit par conséquent devenir un champ de perturbations «gravitationnelles» internes *dynamiques*, solution de la deuxième équation partielle de Newton de la figure 5.1. Mais autour de la boucle, cette équation de Newton pour les perturbations dynamiques n'est rien d'autre que l'équation de Schrödinger stationnaire de la figure 11.4. Il faut donc trouver un mouvement de la boucle qui ne soit pas une translation de celle-ci, mais un mouvement confiné au même endroit de l'espace. Or, le seul mouvement possible de la boucle qui soit confiné au même endroit de l'espace est en fait *une rotation de celle-ci sur elle-même*.

Rotation classique d'une boucle de désinclinaison vis (BV)

Considérons donc une boucle de désinclinaison vis de rayon R_{BV} comme représentée à la figure 12.2, et imaginons que celle-ci puisse tourner autour d'un axe de direction $\vec{e}_{axe}$ contenu dans le plan de la boucle avec *une pulsation* ω_{BV}, ce qui n'est pas impossible puisque la boucle correspond en fait à *une pseudo-dislocation vis*. Si on traite d'abord ce problème de façon classique, on peut utiliser des coordonnées polaires pour définir *le moment cinétique* $\vec{L}_{BV}$ de la boucle autour de son axe de rotation, en supposant la masse de la boucle distribuée uniformément sur la surface de la boucle, comme illustré dans la figure 12.2. Comme on ne connaît en fait qu'approximativement la distribution réelle de la masse au voisinage de la boucle, on va introduire un facteur numérique δ_1 de correction tel que $\delta_1 \cong 1$ dans le calcul de $\vec{L}_{BV}$, comme représenté à la figure 12.2.

On peut alors introduire *le moment d'inertie de la boucle* autour de l'axe de rotation en utilisant la relation connue $\vec{L}_{BV} \cong I_{BV}\omega_{BV}\vec{e}_{axe}$. Comme une boucle de désinclinaison vis possède aussi une *charge de rotation* $\boldsymbol{q}_{\lambda BV}$, analogue à la charge électrique, elle possède aussi un *«moment magnétique»* $\vec{\mu}_{BV}$ dans la direction de l'axe rotation qui est défini dans la figure 12.2, *en supposant la charge répartie sur le contour de la boucle.* Comme on ne connaît qu'approximativement la distribution de la charge au voisinage de la boucle, on va là aussi introduire un facteur numérique δ_2 de correction tel que $\delta_2 \cong 1$. Et on trouve alors une relation directe entre le «moment magnétique» $\vec{\mu}_{BV}$ et le moment cinétique $\vec{L}_{BV}$ de cette boucle, qui s'appelle *le*



Moment cinétique $(\delta_1 \cong 1)$

$$\vec{L}_{BV} = \delta_1 \oint \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm = \delta_1 \vec{e}_{axe} \int_0^{R_{BV}} 4 \int_0^{\pi/2} \underbrace{r\cos\theta}_{|\vec{r}|} \underbrace{r\cos\theta\, \omega_{BV}}_{|\vec{v}|} \underbrace{\frac{\delta_1 M_0^{BV}}{\pi R_{BV}^2} rd\theta dr}_{dm} = \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \cong I_{BV} \omega_{BV} \vec{e}_{axe}$$

$$\Rightarrow \quad I_{BV} = \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{4} \quad \textit{(moment d'inertie)}$$

Moment magnétique $(\delta_2 \cong 1)$

$$\vec{\mu}_{BV} = \delta_2 \frac{1}{2} \oint \vec{r} \wedge \vec{v}\, d\boldsymbol{q} = \delta_2 \vec{e}_{axe} 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{R_{BV}\cos\theta}_{|\vec{r}|} \underbrace{R_{BV}\cos\theta\, \omega_{BV}}_{|\vec{v}|} \underbrace{\frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2\pi} d\theta}_{dq} = \delta_2 \frac{R_{BV}^2 \boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{4} \omega_{BV} \vec{e}_{axe} \cong g_{BV} \frac{\boldsymbol{q}_{\lambda BV}}{2M_0^{BV}} \vec{L}_{BV}$$

$$\Rightarrow \quad g_{BV} = 2\frac{\delta_2}{\delta_1} \cong 2 \quad \textit{(rapport gyromagnétique)}$$

Energie cinétique

$$E^{cin}_{rotation\,BV} = \delta_1 \frac{1}{2} \oint \vec{v}^2\, dm = \delta_1 \int_0^{R_{BV}} 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{r^2 \cos^2\theta\, \omega^2}_{\vec{v}^2} \underbrace{\frac{M_0^{BV}}{\pi R_{BV}^2} rd\theta dr}_{dm} = \delta_1 \frac{M_0^{BV} R_{BV}^2}{8} \omega_{BV}^2 \cong \frac{2\vec{L}_{BV}^2}{\delta_1 M_0^{BV} R_{BV}^2} \cong \frac{\vec{L}_{BV}^2}{2I_{BV}}$$

Figure 12.2 *- Solution classique de rotation de la boucle de désinclinaison vis: moment cinétique, moment magnétique et énergie cinétique*

rapport gyromagnétique g_{BV} qui vaut à peu près $2\delta_2 / \delta_1 \cong 2$.

On peut encore calculer l'*énergie cinétique* $E^{cin}_{rotation\,BV}$ associée à ce mouvement de rotation autour de l'axe de rotation, comme reporté dans la figure 12.2. Avec le facteur correctif δ_1 sur la distribution de la masse au sein de la boucle, on obtient une valeur de l'énergie qui est directement reliée avec le moment cinétique et le moment d'inertie puisque $E^{cin}_{rotation\,BV} \cong \vec{L}_{BV}^2 / (2I_{BV})$.

De la quantification du moment cinétique de la boucle vis

En admettant que la boucle de désinclinaison vis (BV) tourne effectivement sur elle-même, ce mouvement microscopique de rotation va induire un champ de fluctuations gravitationnelles dans le voisinage de la boucle, dépendant de la deuxième équation partielle de Newton de la figure 5.1. Or nous avons vu au chapitre précédent qu'en l'absence d'un potentiel variable dans le temps, la deuxième équation partielle de Newton conduit à l'équation de Schrödinger station-

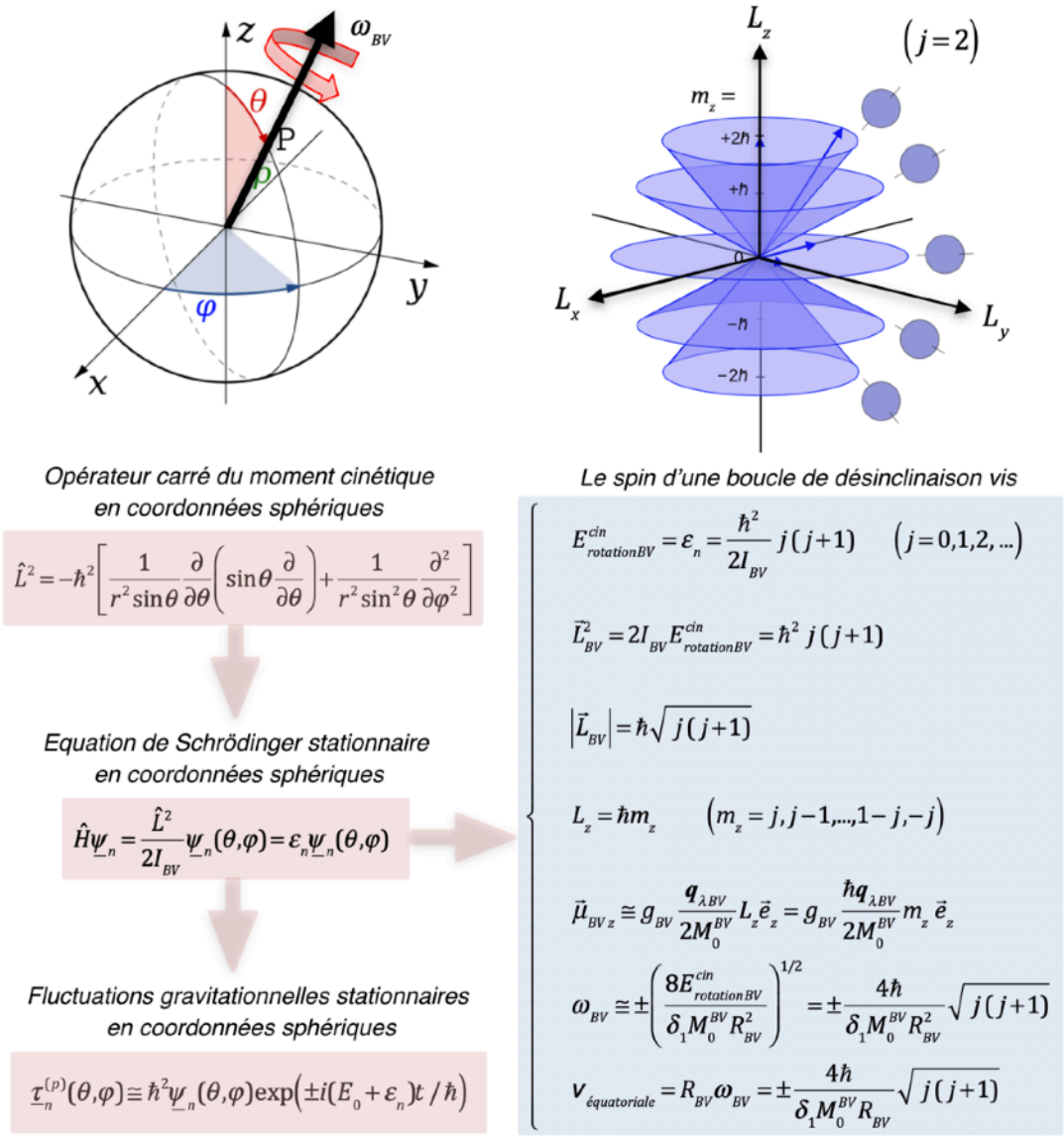


Figure 12.3 - *Solution quantique de rotation de la boucle de désinclinaison vis: niveaux d'énergie de rotation quantifiés et nombre quantique magnétique* m_z

naire de la figure 11.4. Le traitement du mouvement de rotation d'un objet microscopique autour d'un axe par l'équation de Schrödinger stationnaire est succinctement résumé à la figure 12.3.

Pour une particule soumise à une rotation, il est préférable de décrire l'opérateur $\hat{H}$ lié à l'hamiltonien classique en coordonnées sphériques (θ,φ). En l'absence d'un potentiel, cet opérateur $\hat{H}$ est lié à l'opérateur carré du moment cinétique $\hat{L}^2$ par la dernière relation obtenue dans la figure 12.2. Avec l'expression de cet opérateur en coordonnées sphériques, on déduit l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées sphériques, dont les solutions stationnaires possèdent des niveaux d'énergie de rotation quantifiés $\varepsilon_j = \hbar^2 j(j+1)/(2I_{BV})$. Pour chaque valeur de l'énergie ε_j correspondant à une vitesse angulaire donnée, il y a $2j+1$ états propres différents correspondant classiquement à des orientations différentes de l'axe de rotation. On dit que l'état d'énergie ε_j est $2j+1$ fois dégénéré. C'est le *nombre quantique*

magnétique m_z qui caractérise la quantification de la projection du moment cinétique selon un certain axe z, il peut prendre les $2j+1$ valeurs suivantes $m_z = j, j-1, ..., 1-j, -j$, de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe Oz prend les valeurs $L_z = \hbar m_z$. Hormis l'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle, on déduit encore le *moment magnétique quantifié de la boucle* selon l'axe Oz, qui dépend directement du nombre quantique magnétique m_z, qui dépend aussi du *facteur de Landé* g_{BV} de la boucle vis, qui est à peu près égal à 2 dans le cas de la boucle de désinclinaison vis, mais qui dépendrait de la distribution de la masse et de la charge dans le cas d'autres types de singularités topologiques. On constate que, dans l'expression *du moment quantifié,* on retrouve alors la valeur du fameux *magnéton de Bohr,* à savoir $\hbar \boldsymbol{q}_{\lambda BV} / 2M_0^{BV}$.

Finalement, la résolution de l'équation stationnaire de Schrödinger dans ce cas permet de déduire les fonctions d'onde propres $\underline{\psi}_n(\theta,\varphi)$ corrélées aux différents niveaux d'énergie ε_n, et de les utiliser pour obtenir les perturbation gravitationnelles stationnaires $\underline{\tau}_n^{(p)}(\theta,\varphi)$ dans le voisinage immédiat de la boucle sous la forme $\underline{\tau}_n^{(p)}(\theta,\varphi) \cong \hbar^2 \underline{\psi}_n(\theta,\varphi) \exp\left(\pm i(E_0 + \varepsilon_n)t / \hbar\right)$.

De l'interprétation tout-à-fait classique du spin d'une particule

En physique quantique, le spin d'une particule chargée comme l'électron a bien été attribué initialement à une rotation propre de la particule. Cependant, le fait que l'électron soit considéré comme une particule sphérique, qui plus est extrêmement petite, a fait douter de cette interprétation «classique» du spin. Mais l'argument le plus fort pour renoncer à cette interprétation «classique», bien que les effets du spin comme le moment magnétique de l'électron correspondent rigoureusement à une rotation propre de la particule sur elle-même, est le fait qu'un calcul de la vitesse équatoriale de rotation de l'électron donne une vitesse largement supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui ne cadre pas du tout avec la théorie de la Relativité Restreinte.

Mais il en va tout autrement dans notre approche. En effet, essayons de calculer la vitesse équatoriale dans le cas de la boucle de désinclinaison vis, qui s'obtient à partir de son rayon R_{BV} et de la pulsation ω_{BV} de son mouvement de rotation comme $\boldsymbol{v}_{équatoriale} = R_{BV}\omega_{BV}$. Pour déterminer la pulsation ω_{BV} de la rotation, on égale l'énergie cinétique classique de rotation de la boucle à son énergie cinétique déterminée via l'équation de Schrödinger, et il vient les expressions pour ω_{BV} et $\boldsymbol{v}_{équatoriale}$ reportées dans la figure 12.3. Numériquement, utilisons les valeurs connues de l'électron, à savoir sa masse $M_0^{BV} \equiv M_0^{électron} = 9{,}1 \bullet 10^{-31}\left[kg\right]$, son rayon approximatif de l'ordre de $10^{-18}\left[m\right]$, la valeur de δ_1 voisine de 1, la valeur de la constante de Planck $\hbar \equiv 6{,}6 \bullet 10^{-34}\left[m^2 kg / s\right]$, et son spin connu de $j = 1/2$, et il vient alors la vitesse équatoriale $\boldsymbol{v}_{équatoriale} \cong 2{,}5 \bullet 10^{15}\left[m / s\right]$. On retrouve bien que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle est largement supérieure à la vitesse de la lumière au sein du réseau, à savoir $c_{t0} \equiv c = 3{,}3 \bullet 10^8\left[m / s\right]$, comme l'avaient trouvé les pionniers de la physique quantique.

Mais il intervient dans notre théorie un fait complètement nouveau, qui est l'expansion volumique statique énorme au voisinage immédiat de la boucle tournante. En effet, exprimons l'expansion volumique statique à la limite du tore où les perturbations d'expansion peuvent devenir statiques. A cette limite, l'expansion volumique statique est maximum, et elle est donnée par la solution unique de l'équation pour $\tau_{int}^{BV}(\vec{\xi})$ de la figure 12.1 lorsque le terme sous la racine est nulle, et on obtient que $\tau_{statique\,max}^{BV} = \left[K_0 - 4K_2/3 - 2K_1(1+\tau_0)\right]/(2K_1) \cong K_0/(2K_1)$. On en déduit par conséquent que la vitesse réelle des ondes transversales dans le voisinage immédiat

de la boucle vaut en fait $c_t\big|_{limite} \cong c_{t0}\, e^{\tau^{BV}_{statique\,max}/2} \cong c_{t0}\exp(K_0/4K_1)$. Par conséquent, la vitesse $c_t\big|_{limite}$ est assurément très supérieure à $c_{t0} \equiv c = 3{,}3\bullet 10^8\,[m/s]$ puisque $K_0/K_1 >> 1$. En fait, il suffit que $c_t\big|_{limite} \cong c_{t0}\exp(K_0/4K_1) > \boldsymbol{v}_{équatoriale} \cong 2{,}5\bullet 10^{15}[m/s]$ pour que la vitesse équatoriale de rotation de la boucle soit possible. On peut essayer de déterminer quelle est la valeur limite du module K_1 pour que la rotation de la boucle soit possible. On obtient très facilement qu'il faut simplement que $K_1/K_0 < 1{,}6\bullet 10^{-2}$. Or cette condition est toujours satisfaite puisque on a, d'après la conjecture 6, que $K_1/K_0 << 1$. On est donc assuré que, *dans notre approche,* le mouvement de rotation de la boucle sur elle-même est non seulement parfaitement possible, mais qu'il est surtout <u>*obligatoire*</u> puisque c'est la seule solution possible à la deuxième équation partielle de Newton.

On en conclue donc qu'il existe à nouveau une explication tout à fait «classique» de la notion de spin d'une particule, en tant que réel mouvement quantifié de rotation de la boucle autour d'un axe, qui n'enfreint aucunement les principes de la relativité restreinte. Cette explication enlève d'une part tout le côté mystérieux de la notion de spin en physique quantique, et explique d'autre part parfaitement l'existence d'un moment magnétique de spin quantifié de l'électron, associé directement à la rotation réelle de la boucle chargée.

Du problème de la valeur du spin d'une boucle topologique

Si l'existence d'une rotation propre des boucles est une nécessité dans notre approche pour satisfaire la deuxième équation partielle de Newton au voisinage immédiat de la boucle, il est encore une question à laquelle nous n'avons pas de réponse: quelle valeur faut-il attribuer au spin de la boucle?

Autrement formulée, cette question revient à rechercher la valeur à attribuer au nombre quantique azimutal j qui caractérise la quantification de l'énergie de rotation et du moment cinétique de la boucle, ainsi que de son moment magnétique (figure 12.3).

Expérimentalement, on sait que le spin de l'électron vaut $j = 1/2$ et que le spin du boson intermédiaire W^- vaut $j = 1$. Mais la raison profonde pour laquelle ces particules possèdent ces valeurs particulières reste très mystérieuse. Dans notre approche, il en va de même: hormis le fait que les spin $j = 1/2$ et $j = 1$ sont les plus faibles, et donc correspondent aux énergies cinétiques les plus basses possibles, aucun argument raisonnable ne permet pour l'instant de faire un choix de la valeur de j à choisir pour une boucle de désinclinaison vis. Regardons par conséquent l'effet d'un spin $j = 1/2$ ou d'un spin $j = 1$ sur une boucle de désinclinaison vis.

- Boucle de désinclinaison vis de spin 1/2

Considérons une boucle de désinclinaison vis de spin $j = 1/2$. Quelle que soit la direction de l'axe de rotation, il ne peut alors y avoir que deux états propres de la boucle, correspondant à une rotation dextrogyre ou lévogyre de la boucle autour de l'axe de rotation, puisque l'état de dégénérescence de l'énergie est en ce cas de $2j+1 = 2$. L'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle valent donc en ce cas $E^{cin}_{rotation\,BV} = 3\hbar^2/(8I_{BV})$ et $\left|\vec{L}_{BV}\right| = \hbar\sqrt{3}/2$. Quant au nombre quantique magnétique m_z, il peut prendre les deux valeurs $m_z = \pm 1/2$ de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe Oz prend les valeurs $\pm\hbar/2$. On retrouve donc ici exactement la notion de spin d'une *particule de spin 1/2*. Le *moment magnétique de la boucle* selon l'axe Oz s'écrit alors $\vec{\mu}_{BV\,z} \cong \pm g_{BV}\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\vec{e}_z/(4M_0^{BV})$ avec $g_{BV} \cong 2$.

- Boucle de désinclinaison vis de spin 1

Considérons maintenant une boucle de désinclinaison vis de spin $j=1$. Quelle que soit la direction de l'axe de rotation, il ne peut alors y avoir que trois états propres de la boucle, correspondant à une rotation dextrogyre, à une rotation lévogyre, ou à aucune rotation de la boucle autour de son axe de rotation, puisque l'état de dégénérescence de l'énergie vaut en ce cas de $2j+1=3$. L'énergie cinétique et le moment cinétique de la boucle valent $E^{cin}_{rotation\,BV}=\hbar^2/I_{BV}$ et $\left|\vec{L}_{BV}\right|=\hbar\sqrt{2}$ respectivement. Quant au nombre quantique magnétique m_z, il peut prendre les trois valeurs suivantes $m_z=-1,0,+1$ de sorte que la projection L_z du moment cinétique sur un axe Oz prend les valeurs 0 et $\pm\hbar/2$. On retrouve donc ici exactement la notion de spin d'une *particule de spin 1*. Le *moment magnétique de la boucle* selon l'axe Oz s'écrit alors $\vec{\mu}_{BV\,z}\cong 0,\pm g_{BV}\hbar\boldsymbol{q}_{\lambda BV}\vec{e}_z/(2M_0^{BV})$ avec $g_{BV}\cong 2$.

Du lien existant entre les notions de bosons, de fermions et de spin

La question de savoir si une boucle de singularité topologique se comporte comme un fermion ou un boson en cas de superposition de plusieurs boucles (voir chapitre 11) et la question de la valeur du spin d'une boucle de singularité topologique sont assurément liés très intimement. En effet, nous savons de la physique quantique que les fermions ont un spin de 1/2 et que les bosons ont un spin de 1. De la physique quantique, on sait aussi que la composante de spin de la fonction d'onde Ψ de deux particules est symétrique lorsque les spins des deux particules sont parallèles, et antisymétrique si les spins sont anti-parallèles, et on a donc les possibilités suivantes pour la fonction d'onde Ψ de deux particules:

• *Fermions:* fonction d'onde antisymétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale antisymétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale symétrique.

• *Bosons:* fonction d'onde symétrique $\Rightarrow$ spins parallèles et composante spatiale symétrique, ou spins anti-parallèles et composante spatiale antisymétrique.

Il serait très intéressant de creuser ce problème, et de voir quelle interprétation topologique lui donner dans le cadre de notre approche des boucles topologiques. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre 13 traitant du modèle standard des particules.

Des conséquences très importantes de l'existence du spin sur le comportement cosmologique du réseau

Le fait qu'il existe un spin des particules a des conséquences très importantes quant au comportement cosmologique du réseau. En effet, comme la présence du spin implique *(i)* que $K_1>K_{1cr}$, avec $K_{1cr}\cong 10^{-21}$ pour l'électron, et *(ii)* que $K_1/K_0<1{,}6\bullet 10^{-2}$, on déduit que $K_1>0$, de sorte que l'expansion du réseau *ne peut pas être infinie* et que l'on se trouve forcément dans un des cas d'univers oscillant entre big-bang et big-crunch. En ajoutant à cette condition sur K_1 les conditions tirées de la conjecture 6, notamment que $K_0=K_3>>K_1>0$, on déduit que le seul comportement admissible pour l'évolution cosmologique du réseau correspond aux figures 3.8(g) et 3.10.